

Н. Бурбаки

**Очерки по истории
математики**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
Б91

Б91 **Бурбаки Н.**
Очерки по истории математики / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2013. – 292 с.

ISBN 978-5-458-29097-5

Предлагаемая читателям книга является частью многотомного сочинения "Элементы математики", выпускаемого группой крупных французских математиков, объединившихся под общим псевдонимом Никола Бурбаки. В эту работу включена, без каких-либо существенных изменений, большая часть исторических заметок, опубликованных в моих "Элементах математики". "Заметки" переделаны так, что их можно читать независимо от "Элементов", поэтому в принципе они доступны каждому, хорошо знакомому с основами классической математики.

ISBN 978-5-458-29097-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Автором этой книги является группа математиков, в большинстве французских, выступающая под общим псевдонимом Н. Бурбаки. Эта группа сложилась в середине тридцатых годов, и вскоре определилась общая цель ее участников: создать такой трактат, который явился бы обзором всей математики, построенным на современном уровне научной строгости и опирающимся на возможно более общие принципы. Первая книга этого грандиозного сочинения, получившего название «Элементы математики», появилась в 1939 г.

К настоящему времени «Элементы математики» насчитывают уже 26 томов. Все они посвящены одной проблеме — изложению фундаментальных структур анализа [о понятии структуры см. статью Н. Бурбаки «Архитектура математики», помещенную в конце данной книги (стр. 245)]. Сгруппированы они в шесть книг: 1. Теория множеств, 2. Алгебра, 3. Общая топология, 4. Функции действительного переменного, 5. Топологические векторные пространства, 6. Интегрирование. Выходят они по мере написания, вне логической последовательности. О структуре всего трактата Н. Бурбаки еще ничего определенного не опубликовали. «Элементы математики» постепенно переводятся на русский язык (уже изданы: Книга 3. Общая топология. Основные структуры, Физматгиз, 1958. Книга 3. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, Физматгиз, 1959. Книга 5. Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959. Книга 6. Алгебра, Физматгиз, 1962. Книга 7. Теория множеств, готовится к печати в Издательстве иностранной литературы).

Всякая попытка анализа логической структуры современной математики невозможна без изучения ее исторического развития. Такова одна из общих закономерностей математики, как и всякой другой науки. Осознание указанной взаимосвязи в «Элементах математики» проявилось в большом числе исторических очерков, разбросанных по разным томам. Настоящая книга возникла как собрание этих очерков, несколько переработанных, чтобы обеспечить их взаимную связь. При этом «Очерки по истории математики» приобрели некоторую цель-

ность и как бы новое качество, сделавшись ценным сочинением по истории математики.

Следовало бы сразу отметить, что «Очерки по истории математики» не являются ни полным, ни систематическим трактатом. Но об этом, равно как и о своих целях, говорит Н. Бурбаки в предисловии. Поэтому мы не будем останавливаться на подобных вопросах. Сделаем лишь некоторые замечания об особенностях этой книги.

«Очерки» — плод коллективного труда. Развитие всех частей математики к настоящему времени привело нашу науку к такому положению, что серьезное продвижение как в практической, так и в теоретической области требует усилий коллектива. Такое же положение сложилось и в истории математики. В особенности настоятельно необходим коллективизм в исследовании трудных проблем истории математики в XIX и в XX вв. — проблем, являющихся и самыми актуальными. «Очерки», несмотря на ряд недостатков, представляют весьма поучительный пример сотрудничества ученых-математиков, совместно исследующих историю своей науки. Можно надеяться, что этот пример не останется в дальнейшем без подражания.

Усилия Н. Бурбаки в создании единой системы, в которой все или почти все области математики рассматривались бы с единых общих позиций, не являются новыми в истории науки. Подобные устремления и соответствующие результаты возникают всякий раз, когда под влиянием практических запросов и успехов математика переживает период бурных изменений, качественно ее преобразующих. История науки хранит много подобных примеров; достаточно указать на «Начала» Евклида, систему Л. Эйлера, изложенную в серии его замечательных монографий, систему анализа О. Коши и т. д. Теперь к ним добавляются «Элементы математики» Н. Бурбаки как еще один пример, демонстрирующий эту закономерность развития математики.

Автор не углубляется в вопросы философского характера, хотя и не пытается полностью их избежать; более того, он понимает, что здесь «основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического» (стр. 258). В то же время критически воспринимающий отдельные выводы автора читатель легко обнаружит, что там, где Н. Бурбаки касается этих вопросов, его рассуждения становятся недостаточно четкими, в известной мере случайными и не всегда отражают объективные закономерности развития математической науки.

Своеобразный язык сочинения Н. Бурбаки изобилует новыми терминами. И. Г. Башмакова, переведившая эту книгу, и автор этих строк приложили немалые усилия, чтобы сохранить это своеобразие и в то же время избежать перегрузки текста

неразъясненными иностранными терминами, переписанными русскими буквами. Неполнота очерков вынуждала вводить примечания в тех случаях, когда эта неполнота и односторонность грозили навязать читателю искаженные представления о развитии математики. Список литературы в конце книги несколько пополнен; основную работу здесь выполнила Л. А. Сорокина.

В заключение необходимо указать, что эта книга — не для легкого чтения. Чтобы хорошо усвоить ее содержание, надо обладать некоторой математической культурой и знать основные факты истории математики. Но чтение «Очерков» поможет советским математикам (а математика в наши дни — массовая профессия) и математически образованной интеллигенции существенно расширить свой научный кругозор и избежать столь опасной для ученых односторонности и ремесленного подхода к науке.

К. А. Рыбников

ПРЕДИСЛОВИЕ

В эту работу включена, без каких-либо существенных изменений, большая часть исторических заметок, опубликованных в моих «Элементах математики». «Заметки» переделаны так, что их можно читать независимо от «Элементов», поэтому в принципе они доступны каждому, хорошо знакомому с основами классической математики.

Само собой разумеется, что отдельные статьи, составляющие этот сборник, никак не могут претендовать на то, чтобы обрисовать, хотя бы в самых общих чертах, последовательное и полное развитие математики вплоть до наших дней. Такие разделы классической математики, как дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, вариационное исчисление, едва затрагиваются; другие разделы, например теория чисел, теория аналитических функций, теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, почти не упоминаются. Разумеется, пробелы становятся более значительными и их количество увеличивается, когда мы подходим к нашей эпохе. Эти разделы не были умышленно опущены автором. Причина кроется в том, что соответствующие главы «Элементов» еще не были опубликованы.

Наконец, читатель не найдет здесь никаких сведений биографического или анекдотического характера о математиках, теории которых здесь излагаются; при изложении каждой теории автор старался прежде всего возможно точнее выявить ее направляющие идеи и то, как эти идеи развивались и влияли друг на друга.

Цифры, заключенные в квадратные скобки, отсылают читателя к литературе в конце книги.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ. ЛОГИКА. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Изучение того, что обычно именуется «основаниями математики», интенсивно проводимое с начала XIX в., не могло бы успешно развиваться без одновременных параллельных усилий, направленных на систематизацию логики или, во всяком случае, тех ее частей, которые касаются сцепления математических предложений. Нельзя также отделить историю теории множеств и формализации математики от истории «математической логики». Однако традиционная логика, как и логика современных философов, имеет в принципе гораздо более широкое поле применения, чем математика. В связи с этим читатель будет напрасно искать в этой книге изложения истории логики, хотя бы и в самых общих чертах. Мы ограничиваемся, насколько это возможно, рассмотрением истории логики лишь постольку, поскольку она влияла на эволюцию математики. По этой же причине здесь ничего не будет сказано о неклассических (многозначных и модальных) логиках. С еще большим основанием мы обходим молчанием историю спора, разделявшего философов и софистов до венской школы на два лагеря в зависимости от их взглядов на возможность и способы применения логики к объектам чувственного мира и к понятиям человеческого разума.

Теперь уже нельзя сомневаться в существовании сильно развитой доэллинической математики. Не только понятия целого числа и меры величин (сами по себе уже очень абстрактные) употребляются в самых древних из дошедших до нас текстов Египта и Халдеи, но и вся вавилонская алгебра с ее изящными и уверенными приемами не может рассматриваться в виде простой совокупности задач, решенных эмпирически, на ощупь. И если в текстах мы еще не находим ничего похожего на «доказательство» в формальном смысле слова, все же имеются все основания полагать, что открытие таких приемов решения, общность которых видна из частных применений к числовым примерам, не могло иметь места без хотя бы минимального количества логических рассуждений [возможно, еще не вполне осознанных, но схожих с теми, на которые опирается современный алгебраист, когда предпринимает вычисление до «окончательного оформления» всех деталей ([166], стр. 203 и след.)].

Оригинальность греков заключается именно в их сознательных попытках расположить цепь математических доказательств в такую последовательность, чтобы переход от одного звена к следующему не оставлял бы места сомнению и завоевал всеобщее признание. То, что греческие математики пользовались в своих исследованиях скорее «эвристическими», нежели доказательными рассуждениями, как это делают и современные математики, может быть подтверждено (в случае необходимости) «Трактатом о методе» Архимеда [114с]; заметим, что у Архимеда можно найти упоминания о результатах «найденных, но не доказанных» предшествующими математиками¹⁾.

Однако в самых ранних из дошедших до нас и подробно изученных текстов (они относятся к середине V в.) идеальный «канон» математического стиля изложения уже прочно установлен. Впоследствии он получает окончательное завершение у великих классиков: Евклида, Архимеда, Апполония. Понятие доказательства у этих авторов уже ничем не отличается от нашего.

Мы не располагаем ни одним текстом, дающим возможность проследить за первыми шагами этого «дедуктивного метода»; когда его существование было впервые обнаружено, он уже предстал пред нами близким к совершенству. Можно лишь предполагать, что он естественным образом присутствовал в настойчивых попытках «объяснить» мир, которые характеризуют греческую мысль и которые уже видны у философов-ионийцев VII в. Традиция к тому же единодушно приписывает развитие и выявление сути этого метода пифагорейской школе в период времени приблизительно с конца VI в. и до середины V в.

Именно эта «дедуктивная» математика, ясно осознающая свои цели и методы, легла в основу развития философской и математической мысли последующих столетий. Мы увидим, как, с одной стороны, по образцу математики будет постепенно развиваться «формальная» логика, которая приведет к созданию формализованных языков, а, с другой стороны, главным образом с начала XIX в., будет все более и более усиливаться интерес к основным понятиям математики и стремление уяснить их природу, особенно после появления теории множеств.

¹⁾ Именно Демокритом, которому Архимед приписывает открытие формулы объема пирамиды ([114с], стр. 13). Сравните эти упоминания с известным фрагментом, приписываемым Демокриту (но сомнительной подлинности), где он заявляет: «Никто никогда не превзошел меня в построении фигур посредством доказательств, даже так называемые египетские гарпедонапты ([168], т. I, стр. 439, и т. II, I, стр. 727—728). Замечание Архимеда и тот факт, что в дошедших до нас египетских текстах никогда не было найдено доказательств (в классическом смысле слова), наводит на мысль, что «доказательства», на которые намекает Демокрит, уже не считались таковыми в классическую эпоху и не были бы ими и в наше время.

Формализация логики

Общее впечатление от греческой философии V в., основанное на дошедших до нас текстах (зачастую отрывочных), состоит в том, что в ней господствовало и развивалось все более и более осознанное стремление распространить приемы сочленения рассуждений, успешно применяемые риториками и математиками того времени, на все области человеческой мысли — другими словами, чтобы создать логику в самом общем смысле слова. Тон философских сочинений этой эпохи резко меняется. В VII и VI вв. философы еще только утверждают или прорицают (и лишь в некоторых случаях приводят туманные доводы, основанные на не менее туманных аналогиях). Начиная с Парменида и особенно Зенона, они уже аргументируют, пытаются выделить общие положения, чтобы положить их в основу своей диалектики; именно у Парменида мы впервые находим формулировку принципа исключенного третьего, а доказательства Зенона Элейского путем приведения к абсурду знамениты и сейчас. Но Зенон писал в середине V в.; и как бы ни была не совершенна наша документация¹⁾, мы с полным основанием можем предполагать, что в это время математики в своих работах свободно пользовались этими принципами.

Как уже было сказано выше, в наше намерение не входит описывать те бесконечные трудности, которые на каждом шагу обнаруживаются в период формирования логики, а также возникающие по этому поводу споры — от Элеатов и до Платона и Аристотеля, включая и софистов; отметим лишь ту роль, которую сыграла в этом развитии высокая культура ораторского искусства с его прямым следствием — анализом языка, который единодушно принято приписывать главным образом софистам V в. С другой стороны, если влияние математики и не всегда выступает явно, оно тем не менее сказывается, и в частности в сочинениях Платона и Аристотеля. Можно сказать, что Платон был просто одержим математикой; не внося ничего нового в эту область, он с определенного периода своей жизни начинает изучать современных ему математиков (из которых многие были его друзьями или учениками) и уже не перестает непосредственно интересоваться математикой вплоть до того, что предлагает новые направления исследований; в его трудах математика также постоянно используется в качестве иллюстрации или модели

¹⁾ Лучшим классическим примером рассуждения приведением к абсурду в математике является доказательство иррациональности $\sqrt{2}$, на которое несколько раз в косвенной форме ссылается Аристотель; однако современным ученым не удалось точно установить даты этого открытия, одни относят его к началу V в., а другие — к самому концу (см. стр. 147 и ссылки, приведенные там по этому поводу).

(и даже иногда дает пищу его склонности, как и склонности пи-фагорейцев, к мистицизму). Что касается его ученика Аристотеля, он не мог не усвоить того минимума математических знаний, который требовался от учеников Академии. Впоследствии из его сочинений были извлечены выдержки, составившие целую книгу, где или непосредственно говорится о математике, или имеются упоминания о ней [114 d]. Но он, по-видимому, не слишком обременял себя изучением математических достижений своего времени, так как цитирует только те положения математики, которые уже давно стали общеизвестными. Подобное отставание характерно и для большинства последующих философов, многие из которых за неимением специальной подготовки были искренне убеждены, что говорят о математике со знанием дела, тогда как в действительности ссылались на данные, давно устаревшие.

Этот период в отношении логики заканчивается монументальным трудом Аристотеля [4], великая заслуга которого состоит в том, что ему впервые удалось систематизировать и кодифицировать приемы рассуждения, которые у его предшественников¹⁾ оставались неясными и несформулированными. Нам здесь следует особенно выделить главный тезис этого труда, а именно, что каждое корректное рассуждение можно свести к систематическому применению небольшого числа неизменных правил, независимых от частной природы объектов, о которых идет речь (независимость ясно обнаруживается обозначением понятий или высказываний с помощью букв, что, возможно, было заимствовано Аристотелем у математиков). Но Аристотель сосредоточивает свое внимание почти исключительно на особом виде отношений и логических рассуждений, составляющих то, что он называет силлогизмом: по сути это отношения, выражаемые в наше время на языке теории множеств²⁾ в виде $A \subset B$ или $A \cap B \neq \emptyset$ и

¹⁾ Правила, сформулированные Аристотелем, кажутся нам простыми и «очевидными»; для того чтобы понять те трудности, которые возникали в связи с точным пониманием этих правил, и те усилия, которые должен был проявить Аристотель, чтобы их изложить, необходимо рассматривать их в соответствующих исторических рамках. Платон в своих диалогах, в которых он обращается к просвещенным слушателям, выводит действующих лиц, которые путаются в таких элементарных вопросах, как соотношение между отрицанием $A \subset B$ и отношением $A \cap B = \emptyset$ (в современной терминологии), выясняя в дальнейшем правильный ответ [192].

²⁾ Соответствующие формулы Аристотеля «Всякое A есть B » и «Некоторое A есть B »; в этих обозначениях A («субъект») и B («предикат») заменяют понятия, и высказывание «Всякое A есть B » означает, что можно приписать понятие B каждому существу, которому можно приписать понятие A (A — понятие «человек», а B — понятие «смертный» в классическом примере). Интерпретация, которую мы даем, состоит в том, чтобы рассматривать множества существ, к которым применимы соответственно понятия A и B ; эта точка зрения, называемая «объемной», уже известна Аристотелю. Но он рассматривает особенно отношение «Всякое A есть B » прежде всего с другой точки зрения, названной «содержательной», где B рассматривается как одно

способ сцепления этих отношений или их отрицаний по схеме

$$(A \subset B \text{ и } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Аристотель все же был достаточно знаком с математикой своей эпохи и не мог не заметить, что подобные схемы были недостаточными для описания всех логических операций математиков, ни тем более для других применений логики ([4] *Ap. Pr.* I, 35; [114d], стр. 25—26)¹⁾. Во всяком случае, углубленное изучение различных форм «силлогизма», которым он занялся (и которое почти целиком посвящено разъяснению трудностей, постоянно возникающих вследствие двусмысленности или неясности терминов, которые входят в рассуждение), дает ему также возможность сформулировать правила образования отрицания предложения ([4] *Ap. Pr.* I, 46). Аристотелю также принадлежит заслуга четкого разграничения роли «общих» высказываний от роли «частных», этого первого черного наброска кванторов²⁾. Но нам слишком хорошо известно, как влияние его сочинений (которые часто интерпретировались узко и невразумительно), весьма ощутимое еще и в XIX в., должно было поощрять философов к пренебрежительному отношению к математике и препятствовать развитию формальной логики³⁾.

Тем не менее она продолжает развиваться в античном мире в мегарской и стоической школах, соперничавших с перипатетиками. К сожалению, мы располагаем сведениями о их доктринах из вторых рук, часто в изложении их противников или посредственных комментаторов. Главным достижением этих логиков было, по-видимому, основание „исчисления высказываний“ в его современном значении: вместо того чтобы ограничиваться, подобно Аристотелю, высказываниями частного вида $A \subset B$, они формулировали правила, относящиеся к полностью *неопределенным* высказываниям, и помимо этого, так глубоко проанализировали логические отношения между этими правилами, что могли с помощью приемов, сильно напоминающих современные методы [19], выводить все эти правила из пяти из них, которые

из понятий, которые как-то составляют более сложное понятие A , или, как говорит Аристотель, «ему принадлежат». С первого взгляда обе точки зрения кажутся равно естественными, но точка зрения, называемая «содержательной», была постоянным источником осложнений в развитии логики; она, кажется, более далека от интуиции, нежели первая, и довольно легко приводит к ошибкам, а именно в схемах с отрицаниями (ср. [52a], стр. 21—32).

1) О критическом обсуждении силлогизма и его недостаточности см., например, ([52a], стр. 432—441) или ([123], стр. 44—50).

2) Отсутствие настоящих кванторов (в современном смысле слова) до конца XIX в. было одной из причин застоя формальной логики.

3) Рассказывают случай с известным ученым, который на недавней конференции в Принстоне сказал в присутствии Гёделя, что в логике не было сделано ничего нового со времен Аристотеля!

принимались в качестве «недоказуемых». К сожалению, влияние их было весьма эфемерным и результаты их трудов были преданы забвению вплоть до того времени, когда они были вновь найдены логиками XIX в. До XVII в. непревзойденным авторитетом в логике остается Аристотель; в частности, известно, что философы-схоласты находились всецело под его влиянием. Хотя и нельзя пренебрегать их вкладом в формальную логику [20 bis], все же надо констатировать, что он не привел к сколько-нибудь заметному прогрессу в логике по сравнению с античностью.

Труды Аристотеля и его преемников, по-видимому, не оказали заметного влияния на математику. Греческие математики в своих исследованиях шли по пути, проложенному пифагорейцами и их последователями в IV в. (Теодором, Тезтетом, Евдоксом), и мало интересовались формальной логикой при изложении своих результатов. Это не должно вызывать удивления; достаточно сравнить гибкость и точность изложения математических рассуждений, которое имело место начиная с этого периода, с весьма рудиментарным состоянием аристотелевой логики. А когда логика перешагнет через эту стадию, то ее поведут вперед по пути прогресса опять-таки новые достижения математики.

Действительно, с развитием алгебры нельзя было не заметить аналогии, существующей между правилами формальной логики и правилами алгебры: и те и другие обладают тем общим свойством, что они применимы к неопределенным объектам (высказываниям или числам). И когда в XVII в. алгебраические обозначения приняли свою окончательную форму в трудах Виета и Декарта, почти сейчас же начинаются возникать различные попытки символических записей для выражения логических операций, как, например, записи Эригона (1644 г.) доказательств элементарной геометрии или Пелля (1659 г.) арифметических доказательств; до Лейбница все эти попытки, оставались весьма поверхностными и не вели к прогрессу анализа математических рассуждений.

Лейбниц, который был не только философом, но и величайшим математиком, умел извлекать из своего математического опыта ростки тех идей, которым суждено было вывести формальную логику из схоластического тупика¹⁾. Человек всеобъемлющего ума, если это вообще возможно, неиссякаемый источник

¹⁾ Хотя Декарт и (в меньшей степени) Паскаль посвятили часть своих философских трудов основаниям математики, их вклад в развитие формальной логики весьма незначителен. Причина этого, без сомнения, кроется в их основной тенденции, направленной на то, чтобы освободить философскую мысль от опеки схоластики. Они отбрасывали все то, что могло быть связано с ней, и в первую очередь формальную логику. В своих «Размышлениях о духе геометрии» Паскаль, как он сам признает, ограничивается тем, что выражает в хорошо отточенных формулах известные принципы доказательств