Н. Я. Виленкин

Популярная комбинаторика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н. Я. Виленкин
Н11 Популярная комбинаторика / Н. Я. Виленкин – М.: Книга по Требованию, 2012. – 208 с.

ISBN 978-5-458-27755-6

Комбинаторика важный раздел математики, впание которого необходимо представителям самых рааных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам и др. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих вадач теории вероятностей и ее приложений. В книге в популярной форме рассказывается об интересных комбинаторных вадачах и методах их решении.

ISBN 978-5-458-27755-6

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Глава I

ИЗ ИСТОРИИ КОМБИНАТОРИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

Дела давно минувших дней...

Говорят, что некто усомнился в правах Ньютона на открытие закона всемирного тяготения, утверждая, что падение яблок на землю наблюдалось испокон веков. В этой шутке есть доля истины — до того, как та или иная область знания формируется в особую науку, она сначала проходит длительный период накопления эмпирического материала, потом развивается в недрах другой, более общей науки и лишь затем выделяется в самостоятельную ветвь. А если ей повезет, то из ветви она становится большим, шумящим лесом со своими земляничными полянами и запутанными тропами.

Не составляет исключения и история науки про общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов, получившей название *комбинаторики*. С задачами, в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшие расположения охотников во время охоты, воинов во время битвы, инструментов во время работы. Определенным образом располагались украшения на одежде, узоры на керамике, перья в оперении стрелы. По мере усложнения производственных и общественных отношений все шире приходилось пользоваться общими понятиями о порядке, иерархии, группировании. В том же направлении действовало развитие ремесел и торговли.

Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие в первую очередь умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника. О таких играх английский поэт Уордсворт писал:

Не нужно нам владеть клинком,
Не ищем славы громкой.
Тот побеждает, кто знаком
С искусством мыслить тонким.

Среди предметов, положенных в пирамиду, где 35 веков тому назад был похоронен египетский фараон Тутанхамон, нашли разграфленную доску с тремя горизонталями и 10 вертикалями и фигурки для древней игры «сенет», правила которой мы, вероятно, никогда не узнаем. Позже появились нарды, шашки и шахматы, а также их различные варианты (китайские и японские шахматы, японские облавные шашки «го» и т. д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания передвигаемых фигур и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрывающие комбинации и умел избегать проигрывающих.

Разумеется, в этот период еще не было речи об особой науке про решение комбинаторных задач, с каждой такой задачей приходилось справляться особо.

Таинственная черепаха

Первое упоминание о вопросах, близких к комбинаторным, встречается в китайских рукописях, относящихся к XII—XIII вв. до н. э. (точно датировать эти рукописи невозможно, поскольку в 213 г. до н. э. император Цин Ши-хуан приказал сжечь все книги, так что до нас дошли лишь сделанные позднее копии). В этих книгах писалось, что все в мире является сочетанием двух начал — муж-

☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
k'ien небо	tui облака	li огонь	chőn гроза	sűn ветер	k'an вода	kőn горы	k'un земля
7	6	5	4	3	2	1	0
Юг	Юго-Восток	Восток	Северо-Восток	Юго-Запад	Запад	Северо-Запад	Север

Рис. 1.

ского и женского, которое авторы обозначали символами ——— и — —. В рукописи «Же-ким» («Книга перестановок») показаны различные соединения этих знаков по два и по три (рис. 1). Восемь рисунков из трех рядов символов изображали землю, горы, воду, ветер, грозу, огонь, облака и небо (некоторые рисунки имели и иные значения). Неудивительно поэтому, что сумма первых 8 натуральных чисел (т. е. число 36) воплощала в представлениях древних китайцев весь мир.

По мере углублений знаний понадобилось выразить и другие элементы мироздания с помощью тех же знаков ——— и — —. Были составлены 64 фигуры, содержавшие уже пять рядов черточек. Надо полагать, что автор рукописи «Же-ким» заметил удвоение числа рисунков при добавлении одного ряда символов. Это можно рассматривать как первый общий результат комбинаторики.

В рукописи «Же-ким» есть и более сложные рисунки. Как утверждает приводимое в ней предание, император Ию, живший примерно 4000 лет тому назад, увидел на берегу реки священную черепаху, на панцире которой был изображен рисунок из белых и черных кружков (рис. 2). Если заменить каждую фигуру соответствующим

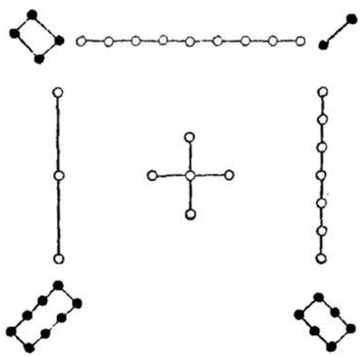

Рис. 2.

числом, возникнет такая таблица:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

При сложении чисел в каждой строке, столбце и диагонали получается одна и та же сумма 15. При том мистическом толковании, которое придавали числам древние китайцы, открытие таблицы со столь чудесными свойствами произвело неизгладимое впечатление. Рис. 2 назвали «ло-шу», стали считать его магическим символом и употреблять при заклинаниях. Поэтому сейчас любую квадратную таблицу чисел с одинаковыми суммами по каждой строке, столбце и диагонали называют *магическим квадратом*.

Комбинаторика в Древней Греции

Говорить с полной уверенностью об уровне знаний древних греков в области комбинаторики затруднительно, поскольку до нас дошло далеко не все из их научного наследия. В 391 г. н. э. толпа монахов разрушила центр языческой науки — александрийский Музеум — и сожгла большую часть хранившейся в нем библиотеки, насчитывавшей многие тысячи томов. Остатки библиотеки разрушались в течение еще трех веков, а в 638 г. н. э. она окончательно погибла при взятии Александрии войсками арабского халифа Омара Большинство научных книг безвозвратно погибло, и мы можем лишь догадываться об их содержании по кратким пересказам и намекам в сохранившихся рукописях.

По этим намекам можно все же судить, что определенные представления о комбинаторике у греческих ученых были Философ Ксенократ, живший в IV в. до н. э., подсчитывал число слогов. В III в. до н. э. стоик Хрисипп полагал, что число утверждений, получаемых из 10 аксиом, превышает миллион По мнению же Гиппарха, из утверждающих аксиом можно составить 103 049 сочетаний, а добавив к ним отрицающие, 310 952. Мы не знаем, какой именно смысл придавали эти философы своим утверждениям и как они получали свои результаты — приводимые Гиппархом числа слишком точны, чтобы считать их результатом грубой оценки, и в то же время не поддаются разумному истолкованию. По-видимому, у греческих ученых были какие-то не дошедшие до нас правила комбинаторных расчетов, скорее всего ложные.

Конкретные комбинаторные задачи, касавшиеся перечисления небольших групп предметов, греки решали без ошибок. Аристотель описал без пропусков все виды правильных трехчленных силлогизмов, а его ученик Аристоксен из Тарента перечислил различные комбинации длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Живший в IV в. н. э. математик Папп рассматривал число пар и троек, которые можно получить из трех элементов, допуская их повторения.

Большое внимание греческие ученые уделяли вопросам, пограничным между комбинаторикой и теорией чисел. Еще в VI в. до н. э. в школе философа-идеалиста и математика Пифагора возникло убеждение, что миром

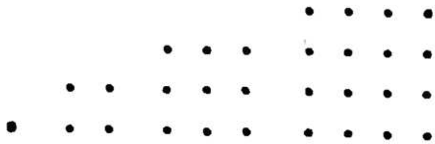

Рис. 3.

правят числа, а вещи только отражение чисел (возможно, что эти идеи возникли у Пифагора под влиянием вавилонской культуры и восходят к еще более древним взглядам шумеров). Поэтому, чтобы познать мир, пифагорейцы начали изучать свойства натуральных чисел. Их исследования о четных и нечетных числах, делимости чисел, простых и составных числах положили основу теории чисел (в науке бывает, что неверные исходные установки дают толчок к полезным исследованиям). Как и китайцы, пифагорейцы придавали особое значение числу 36 — оно было для них не только суммой первых 4 четных и первых 4 нечетных чисел, но и суммой первых трех кубов: $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$. Символом совершенства пифагорейцы считали *совершенные числа*, равные сумме своих делителей, например, $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, а символом дружбы — *дружественные числа*, каждое из которых равно сумме делителей другого числа (например, 220 и 284). Отыскание таких чисел требовало комбинаторного искусства.

В школе Пифагора была доказана известная теорема о сторонах прямоугольного треугольника. Это вызвало интерес к представлению чисел в виде суммы двух квадратов, к квадратным числам 1, 4, 9, 16 и т. д. Квадраты натуральных чисел изображались при этом геометрически (рис. 3). Но пифагорейцы рассматривали и иные конфигурации точек, такие, как изображенные на рис. 4 и 5. Каждый треугольник на рис. 4 получается из предыдущего увеличением длины его стороны на 1. Подсчитывая число точек в каждом треугольнике, получаем последовательность треугольных чисел 1, 3, 6, 10... Эти числа можно получить, последовательно складывая натуральные числа: 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4 и т. д. Точно так же шестиугольники на рис. 5 приводят к последовательности шестиугольных чисел 1, 6, 15... получаемой при последовательном суммировании арифметической прогрессии 1 + 5 +

Рис. 4.

+ 9 + ... В дальнейшем такие суммы удалось выразить с помощью биномиальных коэффициентов C_n^k, играющих важную роль в комбинаторике.

Переход от плоскости к пространству дал возможность строить еще более сложные числа. Например, из треугольников можно составить пирамиды. Подсчитывая число точек в таких пирамидах, пришли к пирамидальным числам 1, 4, 10, 20, ..., которые были суммами ряда 1+3+6+

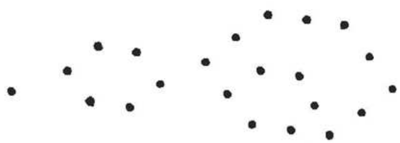

Рис. 5.

+ 10 + ..., составленного из треугольных чисел. Однако дальнейшие обобщения требовали уже введения многомерных пространств, что лежало за рамками возможностей древнегреческой математики.

Учение о фигурных числах привлекало к себе математиков на протяжении многих столетий. Ими много занимался живший в XVII в. французский ученый Пьер Ферма, который доказал, например, что любое натуральное число есть или треугольное или сумма 2 или 3 треугольных чисел, квадратное или сумма 2, 3 или 4 квадратов, пятиугольное или сумма 2, 3, 4 или 5 пятиугольных и т. д. Как и многие другие полученные им результаты, он лишь сформулировал это утверждение в письме к Блэзу Паскалю (юрист по основной профессии, Ферма занимался математикой лишь в часы досуга). Частные случаи этой теоремы доказали Эйлер и Лагранж, а общее доказательство было дано в 1815 г. французским математиком О. Коши.

Наряду с комбинаторикой чисел греческие ученые занимались и отдельными вопросами геометрической комбинаторики — правильными и полуправильными многогранниками, составлением фигур из 14 частей особым образом разрезанного квадрата и т. д. Последнему вопросу была посвящена работа Архимеда «Стомахион».

Мистики, астрологи, каббалисты

Со II в. до н. э. начинается сначала медленный, а потом все более быстрый упадок науки в эллинистических странах, отражавший общий кризис рабовладельческого общества. Многие работы того времени были посвящены мистическим толкованиям чисел в духе пифагорейцев (например, «Арифметическая теология» неопифагорейца Никомаха, жившего в I—II вв. н.э.). Большое развитие получили различные числовые суеверия и толкования, связанные с заменой букв соответствующими числами (греки обозначали числа с помощью букв — первые 9 букв алфавита обозначали числа от 1 до 9, следующие за ними — от 10 до 90, а последние 9 букв — от 100 до 900). Были «ученые», называвшиеся каббалистами, которые подвергали такому «анализу» слова Библии и других священных книг и делали на основе своих изысканий пророчества о будущем мира

Во время богословских споров, начавшихся после победы христианства, старались получить из имен еретиков число 666 — ведь по Апокалипсису это было «звериное число», символ антихриста. Такие попытки предпринимались и позднее — лютеране пытались вывести число 666 из имени римского папы, а католики — из имени Мартина Лютера. В романе «Война и мир» Л. Н. Толстой описывает, как Пьер Безухов пытался вывести это число из имени Наполеона Бонапарта. Такого рода исследования при всей своей бесплодности давали толчок к дальнейшему развитию комбинаторики.

Наряду с каббалистами и мистиками комбинаторикой в эти темные века упадка науки занимались астрологи.

Их интересовал вопрос о движении планет и их «влиянии» на судьбы людей. Особое значение придавали они сочетаниям планет — встречам различных планет в одном знаке Зодиака. Астролог бен Эзра в 1140 г. рассчитал количество сочетаний семи планет по две, по три и т. д. Он знал, что число сочетаний планет по две равно числу их сочетаний по пять, а число сочетаний по три равно числу сочетаний по четыре. Если обозначить эти утверждения в современных символах, то получатся равенства $C_7^2 = C_7^5$ и $C_7^3 = C_7^4$ (через C_n^k обозначают число сочетаний из n различных предметов по k).

В окончательном виде формулу для числа сочетаний получил живший в начале XIV в. математик Леви бен Гершон, доказавший, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}. \qquad (1)$$

Однако его работа, написанная на малодоступном большинству ученых древнееврейском языке, осталась почти незамеченной — вновь формулу (1) вывел в начале XVII в. французский математик П. Эригон.

Комбинаторика и схоластики

Своеобразной комбинаторикой занимались и логики. Продолжая исследования Аристотеля, они классифицировали понятия и логические рассуждения. В III в. н. э. сириец Порфирий для классификации понятий составил особую схему, получившую название «древа Порфирия». На вершине этого древа помещалось самое широкое по объему понятие, узлы древа соответствовали различным расчленениям понятия, а линии между узлами отражали подчиненность понятий друг другу. Подобные деревья сейчас широко применяются в приложениях комбинаторики к самым разным вопросам.

Один из основателей медицины, Гален, во II в. н. э. занимался классификацией силлогизмов, состоящих из четырех частей. Римский философ и математик Боэций (V—VI вв. н. э.) нашел число пар, которые можно составить из пяти категорий модальности, беря их как в утвердительной, так и в отрицательной форме и ставя либо на место условия, либо на место следствия. Он классифицировал также условные силлогизмы.

Большое внимание классификации видов суждений уделяла схоластическая наука (вообще в схоластике причудливо переплетались богословские «изыскания» с исследованием проблем, примыкающих к комбинаторике, математической логике, теории множеств и другим современным областям математики — большими знатоками схоластических исследований были основатели теории множеств Бернард Больцано и Георг Кантор). Споря о взаимоотношениях членов пресвятой троицы, о соподчиненности ангелов, архангелов, херувимов и серафимов, схоласты были вынуждены рассматривать различные отношения порядка и иерархии — достаточно вспомнить сложнейшую архитектонику загробного мира, описанную Данте в «Божественной комедии» с ее кругами ада и различными областями чистилища и рая.

Схоласт Раймонд Люллий создал в XIII в. машину, состоявшую из нескольких кругов, на которых были нанесены основные предикаты, субъекты, атрибуты и иные понятия схоластической логики Вращая эти круги, он получал различные сочетания понятий и надеялся получить с их помощью истину.

Комбинаторика в странах Востока

В VIII в. н.э. начался расцвет арабской науки. Арабы перевели многие творения греческих ученых, изучили их, а затем продвинулись вперед в областях, мало привлекавших внимание греков,— в науке о решении уравнений (само слово «алгебра»— арабского происхождения), теории и практике вычислений и т. д. Решая вопрос об извлечении корней любой степени, арабские алгебраисты пришли к формуле для степени суммы двух чисел, известной под исторически неверным названием «бином Ньютона». По-видимому, эту формулу знал живший в XI—XII вв. н. э. поэт и математик Омар Хайям. Во всяком случае уже в XIII в. такую формулу приводит в своих трудах Насир ад-Дин ат-Туси, а в XV в. она была исследована Гиясэддином ал-Каши.

Судя по некоторым европейским источникам, восходящим к арабским оригиналам, для отыскания коэффициентов этой формулы брали число 10001 и возводили его во

2-ю, 3-ю, ..., 9-ю степени. Получалась таблица

1000900360084012601260084003600090001
100080028005600700056002800080001
10007002100350035002100070001
1000600150020001500060001
100050010001000050001
10004000600040001
1000300030001
100020001
10001

в которой жирным шрифтом выделены коэффициенты бинома Ньютона. Если опустить в этой таблице излишние нули, то получится треугольная таблица из биномиальных коэффициентов. Арабские ученые знали и основное свойство этой таблицы, выражающееся формулой

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Одновременно с арабами вычислением биномиальных коэффициентов занимались китайские математики. Они составили к XIII в. н. э. таблицу таких чисел вплоть до $n = 8$, приведенную в книге алгебраиста Чжу Ши-дзе «Яшмовое зеркало». Имеются указания, что астроном И Синь в VIII в. н. э. вычислил количество различных расположений фигур в игре, напоминавшей шахматы.

Интересовались сочетаниями и в Индии. Еще во II в. до н. э. индийцы знали числа C_n^k и тот факт, что сумма $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ равна 2^n. А в XII в. индийский математик Бхаскара написал книгу «Лилавати», в которой среди других вопросов математики изучает и проблемы комбинаторики. Он пишет о применениях перестановок к подсчету вариаций размера в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т. д. Он дает также правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов, причем рассматривает также и случай, когда в этих перестановках есть повторяющиеся элементы.

Liber Abaci

В начале XII в. Западная Европа начала пробуждаться после многовековой духовной спячки. Развитие торговли с Востоком привело к проникновению в Европу арабской