

Я.И. Френкель

Электродинамика

**Том I. Общая теория
электричества**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Я11

Я11 **Я.И. Френкель**
Электродинамика: Том I. Общая теория электричества / Я.И. Френкель – М.:
Книга по Требованию, 2014. – 428 с.

ISBN 978-5-458-26628-4

ISBN 978-5-458-26628-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

триваемая плоская фигура S может быть „разложена“ на совокупность нескольких плоских фигур, которые образуют многогранную поверхность, ограниченную σ . Эта многогранная поверхность эквивалентна S в том смысле, что проекция S' на любую плоскость равна алгебраической сумме проекций „составляющих“ ее плоских фигур, т. е. в том же смысле, в каком совокупность прямолинейных отрезков S_i , изображающих эти фигуры, эквивалентна результирующему отрезку S , изображающему S . Направление обхода по элементарным контурам σ_i , ограничивающим составляющие плоские фигуры, выбирается в соответствии с направлением обхода по внешнему контуру σ , при этом каждый из прямолинейных отрезков, разграничивающих две соседние фигуры, при обходе тех двух контуров,

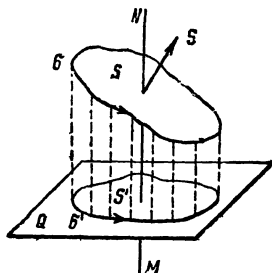


Рис. 2.

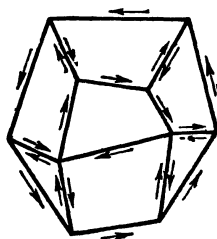


Рис. 3.

к которым он принадлежит, проходится в противоположных направлениях (рис. 3). Указанное разложение на плоские фигуры возможно и в том случае, если исходная фигура не является плоской, т. е. если контур σ имеет вид неплоского многоугольника. Изображая каждую из составляющих фигур перпендикулярным к ней отрезком соответствующей длины, мы можем рассматривать геометрическую сумму этих отрезков S_i как изображение исходной фигуры. Нетрудно убедиться, что это определение вполне однозначно, т. е., что отрезок S не зависит от способа подразделения контура σ на составляющие (плоские) контуры.¹ Хотя, таким образом, с контуром σ не связывается представление об определенной площади, тем не менее площадь S' , вырезаемая на любой плоскости Q проекцией σ' контура σ , остается попрежнему равной проекции отрезка S на прямую MN .

Этот отрезок или, вернее, изображаемый им вектор S , характеризующий размеры и форму замкнутого контура, называется геометрическим моментом этого контура. Это определе-

¹ Это непосредственно следует из рассмотрения проекций σ и σ_i ($i = 1, 2, \dots$) на какую-нибудь плоскость.

ние может быть распространено на произвольные криволинейные контуры, если рассматривать их как предельную форму замкнутых многоугольников с бесконечно малыми сторонами, а составляющие плоские фигуры заменить бесконечно малыми элементами произвольной (кривой) поверхности, стягиваемой самим контуром.

§ 4. Простейшей плоской фигурой является параллелограмм (или треугольник, который можно трактовать как половину параллелограмма). Момент параллелограмма, построенного на двух отрезках $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, называется внешним или векторным произведением этих отрезков. Если при этом направление обхода таково, что отрезок $\mathbf{A}$ приходится в положительном направлении, а $\mathbf{B}$ в отрицательном, то внешнее произведение обозначается символом $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Отсюда следует, что $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Далее нетрудно показать, что в случае внешнего произведения, так же как и в случае внутреннего, имеет место распределительный закон:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}. \quad (3)$$

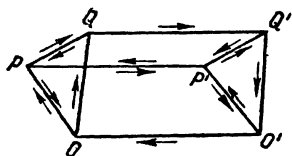


Рис. 4.

В самом деле, полагая $OP = O'P' = \mathbf{A}$, $PQ = P'Q' = \mathbf{B}$ и $OO' = PP' = \mathbf{C}$ (рис. 4), мы можем рассматривать векторы $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ и $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ как моменты параллелограммов $OPP'O'$ и $PQQ'P'$, которые совместно с треугольниками OQP и $O'Q'P'$ эквивалентны параллелограмму $OQQ'O'$. А так как моменты этих треугольников (ввиду противоположности направлений обхода) равны и противоположны, то отсюда следует, что геометрическая сумма моментов $OPP'O'$ и $PQQ'P'$ равна моменту $OQQ'O'$, т. е. внешнему произведению $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.

Равенство (3) обобщается на любое число слагаемых

$$\left(\sum_p \mathbf{A}_p \right) \times \left(\sum_q \mathbf{B}_q \right) = \sum_p \sum_q \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_q. \quad (3a)$$

§ 5. Если $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — три некопланарных (т. е. не лежащих в одной плоскости) отрезка, то комбинированное (двойное) произведение $\mathbf{A} (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ представляет собой объем параллелепипеда, построенного на этих отрезках, со знаком $+$ или $-$. Нетрудно проверить, что это произведение остается неизменным при циклической (круговой) перестановке букв

$$\mathbf{A} (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

Двойное внешнее произведение $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ может быть преобразовано по формуле

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (5)$$

которая явствует из того обстоятельства, что вектор $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ и перпендикулярен к $\mathbf{A}$. Таким образом внутреннее произведение его на $\mathbf{A}$ должно обращаться в нуль тождественно. Отсюда ясно, что он параллелен вектору $\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B})$. Разлагая $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ на составляющие, нетрудно убедиться, что предыдущие векторы не только параллельны, но и равны (см. ниже).

Пользуясь формулами (4) и (5), нетрудно далее доказать тождество

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{C}) (\mathbf{B}\mathbf{D}) - (\mathbf{B}\mathbf{C}) (\mathbf{A}\mathbf{D}). \quad (6)$$

В самом деле, согласно (4), имеем

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C} [\mathbf{D} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = \mathbf{C} [\mathbf{A} (\mathbf{B}\mathbf{D}) - \mathbf{B} (\mathbf{A}\mathbf{D})]$$

§ 6. Представим себе прямоугольную систему координатных осей OX_1, OX_2, OX_3 , проведенных в направлении трех взаимно перпендикулярных единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е. таким образом, чтобы

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (7)$$

и, кроме того, конечно,

$$\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q = \begin{cases} 1 & \text{при } p=q \\ 0 & \text{„ } p \neq q \end{cases} \quad (7a)$$

Обозначим составляющие радиуса-вектора $\mathbf{r}$ какой-либо точки P вдоль этих осей через $\mathbf{e}_1 x_1, \mathbf{e}_2 x_2, \mathbf{e}_3 x_3$, т. е. положим

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3. \quad (8)$$

Составляя проекцию $\mathbf{r}$ на i -ую ось, т. е. внутреннее произведение $\mathbf{r}\mathbf{e}_i$, получаем, в виду равенства (7a), $r_i = \mathbf{r}\mathbf{e}_i =$

$$\left(\sum_k \mathbf{e}_k x_k \right) \mathbf{e}_i = \sum_k x_k \left(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_i \right) = x_i. \text{ Таким образом в рассматри-}$$

ваемом случае составляющие вектора $\mathbf{r}$, или вернее, их численные значения, т. е. координаты точки P , совпадают с соответствующими проекциями. Мы будем называть их прямоугольными компонентами. Аналогичным образом компоненты всякого другого вектора $\mathbf{A}$ определяются формулами

$$A_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i. \quad (8a)$$

Компоненты геометрической суммы $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots$ равны, очевидно, алгебраической сумме соответствующих компонент слагаемых. Полагая в случае внутреннего или внешнего умножения двух векторов

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \mathbf{e}_i \text{ и } \mathbf{B} = \sum_k B_k \mathbf{e}_k,$$

получаем, согласно (2а) и (3а),

$$\mathbf{AB} = \sum_i \sum_k A_i B_k (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k),$$

т. е., на основании (7а),

$$\mathbf{AB} = \sum_i A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \quad (9)$$

и точно так же

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_i \sum_k A_i B_k (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) = \sum_{i < k} (A_i B_k - A_k B_i) (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k),$$

т. е., согласно условиям (7),

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{e}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{e}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1), \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 &= A_2 B_3 - A_3 B_2; (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_2 = \\ &= A_3 B_1 - A_1 B_3; (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \quad (10а)$$

С помощью этих формул нетрудно установить тождества (4) и (5). Так, например, в случае (5) имеем, на основании (10а),

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_1 &= A_2 (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_3 - A_3 (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_2 = \\ &= A_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) - A_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) = \\ &= B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) = \\ &= B_1 (\mathbf{AC}) - C_1 (\mathbf{AB}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]_2 = B_2 (\mathbf{AC}) - C_2 (\mathbf{AB})$$

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_3 = B_3 (\mathbf{AC}) - C_3 (\mathbf{AB}).$$

В. Дифференциальные операции векторного исчисления

§ 7. Векторы, подобно скалярам, могут играть роль независимых и зависимых переменных по численному значению и направлению, т. е. роль аргументов и функций. Необходимо различать следующие четыре случая:

- 1) скалярная функция от скалярного аргумента $\alpha(t)$;
- 2) векторная функция от скалярного аргумента $\mathbf{A}(t)$;
- 3) скалярная функция от векторного аргумента $\varphi(\mathbf{r})$;
- 4) векторная функция от векторного аргумента $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Для наглядности мы будем подразумевать под t время, а под $\mathbf{r}$ — радиус-вектор различных точек пространства по отношению к некоторой начальной точке O . Таким образом $\alpha(t)$ и $\mathbf{A}(t)$ суть функции времени, а $\varphi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — функции места, определяемого векторным аргументом $\mathbf{r}$.

Скалярную функцию места $\varphi(\mathbf{r})$ можно представить наглядно посредством построения семейства поверхностей

$$\varphi = c = \text{const}$$

для равноотстоящих значений c . При этом кривые, ортогональные к этим поверхностям, дают в каждой точке направление наиболее быстрого возрастания φ .

Векторные функции места $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ обычно представляют „векторными полями“, изображая их наглядно при помощи построения семейства линий („линий тока“, если $\mathbf{F}$ обозначает скорость, или „силовых линий“, если $\mathbf{F}$ — сила), которые в каждой точке проходят в направлении вектора $\mathbf{F}$, соответствующего данной точке, и притом таким образом, чтобы „густота“ их (число линий на единицу перпендикулярной к ним поверхности) была пропорциональна величине $\mathbf{F}$.¹

§ 8. Производной $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ соответствует в случае векторной функции $\mathbf{A}(t)$ „векторная производная“ $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$, определяемая как предел отношения

$$\frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

В случае скалярной функции от векторного аргумента $\mathbf{r}$ операция дифференцирования может быть определена следующим образом. Представим себе замкнутую поверхность, содержащую рассматриваемую точку P ($OP = \mathbf{r}$). Проведем в каждой точке S вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ (численно = 1) и составим геометрическую сумму произведений векторов $\mathbf{n} dS$, где dS — бесконечно малый элемент рассматриваемой поверхности, на значение функции φ в одной из точек dS . Эта геометрическая сумма бесконечно малых векторов $\mathbf{n} \varphi dS$ при $dS \rightarrow 0$ дает векторную величину, которая обозначается

$$\oint \mathbf{n} \varphi dS$$

и называется **поверхностным интегралом функции $\varphi(\mathbf{r})$** .² Мы будем предполагать эти функции непрерывными во всем рассматриваемом объеме.³

Если разделить предыдущее выражение на объем V , ограниченный поверхностью S , и затем уменьшать эту поверхность, стягивая ее к рассматриваемой точке P , то в пределе $S \rightarrow 0$ мы получим некоторый вектор, не зависящий от формы S или ее изменения при предельном переходе⁴ и характеризующий быстроту и направление (быстрейшего) изменения функции $\varphi(\mathbf{r})$

¹ Если поверхность S не перпендикулярна к $\mathbf{F}$, то число линий, пересекающих эту поверхность, рассчитанное на единицу площади, измеряется проекцией $\mathbf{F}$ на нормаль к S .

² Кружок на знаке интеграла обозначает, что поверхность замкнутая.

³ Т. е. отношение разности $\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)$ для двух различных точек к расстоянию между этими точками ($\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$) должно всегда оставаться конечным.

⁴ Доказательство см. примечание к § 11.

„в точке P “. Этот вектор ввиду его полной аналогии с обыкновенной производной (по скалярному аргументу) можно было бы назвать производной φ по $\mathbf{r}$. Обычно его называют градиентом φ и обозначают символом $\text{grad } \varphi$ или $\nabla \varphi$.

Таким образом

$$\text{grad } \varphi = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \varphi dS. \quad (11)$$

Это определение операции дифференцирования по векторному аргументу легко распространяется на векторные функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. А именно, заменяя произведения $\mathbf{n} \varphi$ внутренним произведением $\mathbf{n} \mathbf{F}$ или внешним $\mathbf{n} \times \mathbf{F}$, мы получаем внутреннюю или внешнюю производные $\mathbf{F}$ по $\mathbf{r}$, называемые соответственно „расхождением“ (divergentia) и „вращением“ или „вихрем“ (rotation или curl)

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \mathbf{F} dS, \quad (11a)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS. \quad (11b)$$

Расхождение можно назвать внутренним, а вращение внешним градиентом $\mathbf{F}$. Если ввести векторный оператор

$$\nabla = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} dS \quad (12)$$

и рассматривать его как символический вектор, то три операции (11), (11a) и (11b) можно символически выразить при помощи соответствующих операций умножения

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi, \\ \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \mathbf{F}, \quad \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

§ 9. Этот способ выражения, с одной стороны, очень удобен и очень ясен в отношении аналитических свойств различных дифференциальных операций; с другой стороны, при помощи обычных обозначений непосредственно выражается их наглядный геометрический смысл. В случае векторных величин $\text{grad } \varphi$ и $\text{rot } \mathbf{F}$ этот смысл можно выяснить надлежащим выбором формы поверхности S . Возьмем в качестве S поверхность бесконечно малого прямого цилиндра с основаниями S' и S'' и высотой h , и составим проекцию интеграла $\oint \mathbf{n} \varphi dS$ на направление образующей, проведенной от S' к S'' , т. е. в сторону внешней нормали $\mathbf{n}''$ основания S'' . Эта проекция равна внутреннему произведению $\mathbf{n}'' \oint \mathbf{n} \varphi dS$ или (ввиду постоянства $\mathbf{n}''$) $\oint (\mathbf{n}'' \mathbf{n}) \varphi dS$. Так как нормаль $\mathbf{n}$ к боковой поверхности ци-

цилиндра Σ перпендикулярна к $\mathbf{n}''$, то предыдущий интеграл сводится к сумме частей, соответствующим обоим основаниям, т. е. к разности

$$\int \varphi'' dS'' - \int \varphi' dS = (\varphi'' - \varphi') S'',$$

ибо $\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{n}' = -1$ ($\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к S'). Разделяя его на объем цилиндра $V = S' h$, в пределе $S' \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ получаем, согласно определению вектора $\text{grad } \varphi$, проекцию последнего на $\mathbf{n}''$, т. е.

$$\mathbf{n}'' \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad}_{\mathbf{n}''} \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'' - \varphi'}{h} = \frac{d\varphi}{dh}. \quad (13)$$

Таким образом, проекция вектора $\text{grad } \varphi$ на любое направление равна скорости его возрастания в этом направлении. Отсюда ясно, что вектор $\text{grad } \varphi$ направлен в сторону наиболее быстрого возрастания φ , следовательно, перпендикулярен к поверхности $\varphi = \text{const}$ и численно равен скорости этого возрастания. Это соотношение вполне разъясняет геометрический смысл градиента.

Пользуясь той же поверхностью S , как и в предыдущем случае, в применении к (11b), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'' \cdot \text{rot } \mathbf{F} &= \frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{n}'' (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) dS = \frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{F} (\mathbf{n}'' \times \mathbf{n}) dS = \\ &= \frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{F} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) d\Sigma, \end{aligned}$$

ибо на основаниях цилиндра внешнее произведение $\mathbf{n}'' \times \mathbf{n}$ исчезает, а на боковой поверхности Σ обращается в единичный „касательный вектор“ τ , направленный по касательной к контуру σ , ограничивающему основания в сторону, „соответствующую“ $\mathbf{n}''$ (в смысле „правила винта“). Представляя элемент боковой поверхности $d\Sigma$ в виде произведения $h d\sigma$, получаем

$$\frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{F} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) d\Sigma = \frac{1}{S''} \oint \mathbf{F} \tau d\sigma,$$

и, следовательно,

$$\text{rot}_{\mathbf{n}''} \mathbf{F} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{S''} \oint \mathbf{F} \tau d\sigma. \quad (14)$$

Эту формулу можно рассматривать как новое определение вектора $\text{rot } \mathbf{F}$ через его проекции на различные направления. Что касается „внутренней“ производной, то специализация поверхности S не дает существенного упрощения общего ее определения.

Интеграл, стоящий в правой части, называется вообще кри-

волинейным интегралом вектора $\mathbf{F}$, в частности для замкнутой кривой (круг на знаке интеграла!) он называется циркуляцией этого вектора. Эта циркуляция только тогда отлична от нуля, когда линии, представляющие векторное поле $\mathbf{F}$, являются замкнутыми или винтообразными кривыми, так как в этом случае касательные проекции $\mathbf{F}$ сохраняют один и тот же знак во всех точках замкнутой кривой. Это получается, например, в том случае, если $\mathbf{F}$ обозначает скорость различных частиц вращающегося твердого тела или вращающейся жидкой массы. Те точки, в которых $\text{rot } \mathbf{F}$ отличен от нуля, называются вихревыми точками векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Эти вихревые точки образуют в общем непрерывные линии, так называемые вихревые линии (или вихревые нити), которые в случае жидкостей могут быть рассматриваемы как искривленные оси вращения.

При помощи формулы (14) можно легко показать, что при этом вектор $\text{rot } \mathbf{F}$ имеет одинаковое направление с осью вращения и по своей длине равен удвоенной скорости вращения. Этим объясняется название „вращение“.

Выражение (11a) для расхождения не может быть упрощено при помощи специализации поверхности S в виду скалярного характера этой дифференциальной величины. Но ее геометрический смысл становится непосредственно ясным, если для наглядности представить векторное поле $\mathbf{F}$ соответственными „ $\mathbf{F}$ -линиями“. Тогда произведение $F_n dS$ можно трактовать как число тех линий, которые проходят через элемент поверхности, и притом наружу, если F_n положительно, и внутрь, если F_n отрицательно. Интеграл $\oint F_n dS$, который, соответственно этой картине, называется „поток“ $\mathbf{F}$ сквозь S ,¹ равен таким образом избытку числа линий, выходящих из S , над числом линий, входящих в S (само собой понятно, что этот избыток может оказаться как положительным, так и отрицательным). Если расхождение $\mathbf{F}$ внутри S исчезает, то по (11a) полный поток вектора $\mathbf{F}$ сквозь S также должен равняться нулю. Это означает, что линии, представляющие векторное поле $\mathbf{F}$, проходят сквозь область, ограниченную S , не начинаясь в ней и не оканчиваясь. Но если в некоторой точке или области $\text{div } \mathbf{F}$ отличен от нуля, то и поток $\mathbf{F}$ сквозь поверхность, охватывающую эту точку, также должен быть отличным от нуля. Если, в частности, $\text{div } \mathbf{F} > 0$, то мы имеем внутри S „источник“ $\mathbf{F}$ -линий, т. е. такое место, где они зарождаются и расходятся в различных направлениях. Этим обусловлено название „расхождение“. Отрицательным значениям $\text{div } \mathbf{F}$ соответствует „сток“ („отрицательный источник“) $\mathbf{F}$ -линий, к которому они сходятся со всех

¹ Также и в том случае, если S не замкнута; при этом, как обычно, нормали $\mathbf{n}$ следует проводить в том направлении, которое соответствует направлению обхода на ограничивающем контуре σ в смысле правила правого винта.

сторон (на этом основании величина — $\operatorname{div} \mathbf{F}$ часто называется „схождением“).

§ 10. Мы должны еще упомянуть дифференциальную операцию, касающуюся векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и имеющую тесную аналогию с градиентом скалярной функции. Но эта операция может быть определена только при задании второго вектора или векторной функции $\mathbf{A}$, которая сама не дифференцируется, но определяет то направление в каждой точке, в каком производится дифференцирование рассматриваемой функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. При этом мы будем исходить из формулы (13) предыдущего параграфа; заменяя в ней φ на $\mathbf{F}$, получим операцию, которую будем обозначать символом $(\mathbf{n}'' \operatorname{grad})$

$$(\mathbf{n}'' \operatorname{grad}) \mathbf{F} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}'' - \mathbf{F}'}{h} = \frac{d\mathbf{F}}{dh}. \quad (15)$$

Обращая рассуждения, при помощи которых мы пришли от формулы (11) к (13), мы получим следующее определение новой операции, соответствующее формулам (11), (11a) и (11b),

$$(\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS,$$

причем $\mathbf{A}$, так же как и $\mathbf{n}''$, сначала обозначает постоянный единичный вектор. Но мы можем тотчас же освободиться от этого ограничения, если $\mathbf{A}$ под знаком интеграла будем определять как значение этого вектора в соответствующей точке (к которой должна стянуться поверхность S), т. е. вообще положим:

$$(\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}} \quad (15a)$$

Вектор $(\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{F}$ таким образом равен частной производной от $\mathbf{F}$ в направлении $\mathbf{A}$, умноженной на длину $\mathbf{A}$.¹ Если мы рассмотрим, например, две бесконечно близкие точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ и положим $\mathbf{A} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}$, то вектор $(d\mathbf{r} \operatorname{grad}) \mathbf{F}$ обозначает не что иное, как векторную разность $d\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, так же как $d\mathbf{r} \operatorname{grad} \varphi = d\varphi = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)$.

¹ В связи с (15a) можно определить две других операции того же самого типа, именно:

$$(\mathbf{A} \times \operatorname{grad}) \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}}$$

$$(\mathbf{A} \times \operatorname{grad}) \times \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}}$$

Однако эти операции для практических применений векторного исчисления несущественны и к тому же они могут быть сведены к прежним, а именно, имеют место следующие тождества:

$$(\mathbf{A} \times \operatorname{grad}) \mathbf{F} = (\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{F}) \text{ и } (\mathbf{A} \times \operatorname{grad}) \times \mathbf{F} = \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{F} - \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Следует отметить, что скалярное произведение $\mathbf{A} \text{ grad } \varphi$ может быть сведено к составной операции, определяемой формулой (15а), если в ней заменить векторную функцию $\mathbf{F}$ скаляром φ . А именно

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \text{ grad}) \varphi &= \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \varphi dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}} = \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint \mathbf{A} (\mathbf{n} \varphi) dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}} = \\ &= \left(\mathbf{A} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \varphi dS \right) = \mathbf{A} \text{ grad } \varphi. \end{aligned}$$

Если же в (15а) считать постоянным не $\mathbf{A}$, а $\mathbf{F}$, то получится

$$\lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{F}=\text{const}} = \mathbf{F} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \mathbf{A} dS = \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{A}.$$

Теперь легко доказать, что в общем случае, когда обе величины $\mathbf{A}$ и $\mathbf{F}$ рассматриваются как переменные, интеграл $\frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS$ в пределе равен сумме обоих вышеприведенных выражений.

Действительно, полагая $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A}$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Delta \mathbf{F}$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{F}_0$ — значения $\mathbf{A}$ и $\mathbf{F}$ в рассматриваемой точке, получим

$$(\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} = (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 + (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F} + (\Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 + (\Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 dS &= 0; \\ \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F} dS &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F} dS = (\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F}; \\ \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\Delta \mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 dS &= \lim_{S \rightarrow 0} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 dS = \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

и так как $\Delta \mathbf{F}$ и $\Delta \mathbf{A}$ — бесконечно малые величины (ввиду предполагаемой непрерывности функций $\mathbf{F}$ и $\mathbf{A}$)

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\Delta \mathbf{A} \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F} dS = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS = (\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F} + \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{A}. \quad (15b)$$

§ 11 Разделим объем V , ограниченный (не бесконечно малою) поверхностью S , на две части V_1 и V_2 и обозначим замкнутые поверхности, которые ограничивают эти объемы, через S_1 и S_2 .