А.М. Эфрос

Операционное исчисление и контурные интегралы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э94

Эфрос А.М.
Э94 Операционное исчисление и контурные интегралы / А.М. Эфрос – М.: Книга по Требованию, 2021. – 384 с.

ISBN 978-5-458-34781-5

Операционное исчисление до настоящего времени находит себе применение, главным образом, в прикладной теории электричества, хотя давно известно, что оно может быть применено почти во всех отделах математической физики. Выпуская эту книгу, авторы, с одной стороны, стремились к тому, чтобы показать какие обширные возможности дают методы контурных интегралов и операционного исчисления; с другой стороны, эта книга представляет собой попытку дать строгое математическое изложение операционного исчисления более полное, чем в большинстве имеющихся руководств.

ISBN 978-5-458-34781-5

Главнейшие обозначения

$$C(z)=\int\limits_0^z \cos\left(\frac{1}{2}\pi z^2\right)dz=-C(-z).$$

$$C(\pm\infty)=\pm\frac{1}{2}\text{ — интеграл Френеля.}$$

$D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра порядка ν

$$=2^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4},\pm\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right),$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}e^{-\frac{1}{4}z^2}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}z^2\right)-$$

$$-\frac{\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\nu\right)}\cdot ze^{-\frac{1}{4}z^2}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2}z^2\right).$$

$$D_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}[j^\nu D_{-\nu-1}(jz)+j^{-\nu}D_{-\nu-1}(j^{-1}z)].$$

При $\nu=n=$ целому числу $D_n(z)=e^{-\frac{1}{4}z^2}H_n(z)$.

$$D_{-\frac{1}{2}}(z)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}z^2\right).$$

$$D_{-1}(z)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}\ \operatorname{erfc}\left(2^{-\frac{1}{2}}z\right).$$

$$Ei(z)=\int\limits_z^\infty\frac{e^{-z}}{z}dz\text{ — экспоненциальный интеграл}$$

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-z^2}dz=-\operatorname{erf}(-z).\quad \operatorname{erf}(\pm\infty)=\pm1.$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf} z.$$

f — частота.

$${}_1F_1(\mu;\ \nu;\ z) = 1 + \frac{\mu}{1!\,\nu} z + \frac{\mu(\mu+1)}{2!\,\nu(\nu+1)} z^2 + \ldots \text{— функция Куммера.}$$

$$H_n(z) = z^n - \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} z^{n-4} - \ldots$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \text{— полином Эрмита порядка } n.$$

$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода порядка ν

$$= J_\nu(z) + jN_\nu(z)$$

$$= \frac{2}{\pi} j^{-(\nu+1)} K_\nu(j^{-1}z) = -j^{-2\nu} \mathrm{H}_\nu^{(2)}(j^{-2}z).$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(j^{2w} z) = \frac{\sin[(1-w)\nu\pi]}{\sin \nu\pi} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z) - j^{-2\nu} \frac{\sin w\nu\pi}{\sin \nu\pi} \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z).$$

$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)$ — функция Ганкеля второго рода

$$= J_\nu(z) - jN_\nu(z)$$

$$= \frac{2}{\pi} j^{\nu+1} K_\nu(jz) = -j^{2\nu} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(j^2 z).$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(j^{2w} z) = \frac{\sin[(1+w)\nu\pi]}{\sin \nu\pi} \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z) + j^{2\nu} \frac{\sin w\nu\pi}{\sin \nu\pi} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z).$$

$\mathfrak{I}(z)$ — мнимая часть от z. $z = \mathfrak{R}(z) + j\,\mathfrak{I}(z)$.

$I_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода от чисто мнимого аргумента

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} = j^{-\nu} J_\nu(jz) = j^{\nu} J_\nu(j^{-1} z).$$

$$I_\nu(j^{2w} z) = j^{2w\nu} I_\nu(z).$$

$J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$= j^{\nu} I_\nu(j^{-1} z) = j^{-\nu} I_\nu(jz) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z) + \mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\right].$$

$$J_\nu(j^{2w} z) = j^{2w\nu} J_\nu(z).$$

$K_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода от чисто мнимого аргумента

$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi j^{\nu+1} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(jz) = \frac{1}{2}\pi j^{-\nu-1} \mathrm{H}_\nu^{(2)}(j^{-1} z).$$

$$K_\nu(j^{2w} z) = j^{-2w\nu} K_\nu(z) - j\pi \frac{\sin w\nu\pi}{\sin\nu\pi} I_\nu(z).$$

$p = \frac{\partial}{\partial t}$ — оператор Хевисайда.

$\Re(z)$ = вещественной части от z. $z = \Re(z) + j\Im(z)$.

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{1}{2}\pi z^2\right) dz = -S(-z). \quad S(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2}.$$

$N_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода (функция Неймана)

$$= \frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} = \frac{1}{2} j\left[\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z) - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\right].$$

$$N_\nu(j^{2w} z) = j^{-2w\nu} N_\nu(z) + 2j \sin w\nu\pi \cdot \operatorname{ctg}\nu\pi \cdot J_\nu(z).$$

$$\Gamma(\nu, z) = \int_z^\infty z^{\nu-1} e^{-z} dz = (\nu-1)\Gamma(\nu-1, z) + z^{\nu-1} e^{-z}.$$

$$\Gamma(\nu, 0) = \Gamma(\nu). \quad \Gamma(0, z) = Ei(z).$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, z\right) = \pi^{\frac{1}{2}} \operatorname{erfc}(\sqrt{z}). \quad \Gamma(1, z) = e^{-z}.$$

$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}$ — логарифмическая производная гамма-функции.

$-\psi(0) = C = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

$\delta(t)$ — импульсная функция Дирака, равная нулю для всех $t \neq 0$ и бесконечности для $t = 0$, удовлетворяет соотношению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

$\risingdotseq$ — знак операционного или символического соответствия.

$W_{\mu,\nu}(z)$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция порядка μ и ν.

Операционное или символическое исчисление было создано в конце прошлого столетия английским электриком Оливером Хевисайдом (Oliver Heaviside).

О. Хевисайд родился 13 мая 1850 г. в Лондоне и умер 3 февраля 1925 г. в Торкей (Torquay), в Англии.

Свою научно-техническую деятельность он начал в 1874 г. в Северной телеграфной компании, где он работал, в начале у знаменитого инженера Чарльза Уитстона. Первые его научные работы относятся примерно к этому времени.

Изучив классические работы Максвелла и Вильяма Томсона, О. Хевисайд занялся сложными проблемами распространения электромагнитных возмущений вдоль проводов. Исследование задач подобного рода приводит, как известно, к решению диференциальных уравнений в частных производных или систем линейных диференциальных уравнений. Применительно к решению задач подобного рода Хевисайд и создал свое исчисление. Разработав это исчисление как систему определенных операций над символом $p = \frac{\partial}{\partial t}$, Хевисайд не дал своему методу строгого математического обоснования. Это обстоятельство привело к тому, что долгое время математики не знали и не интересовались операционным исчислением; техники также не решались прибегнуть к нему, так как не было уверенности в справедливости получаемого таким образом решения.

Необходимо заметить, что Хевисайд решал весьма сложные проблемы, для которых опубликованные им методы были явно недостаточны. Все эти обстоятельства привели к тому, что к операционному исчислению относились с недоверием и непониманием. Операционное исчисление было окружено, если можно так выразиться, „мистической" завесой. На вопросы, обращенные к Хевисайду, по поводу неясностей в применении операционного исчисления он отвечал: „я не откажусь от хорошего обеда только потому, что я не знаю всех тонкостей пищеварения". Однако, по мнению некоторых математиков Хевисайд обладал более мощными методами, нежели опубликованные им. По мнению Г. Мюнтца[1] О. Хевисайд поступил подобно средневековым ученым, предпочитавшим иногда зашифровывать свои идеи в виде аннаграмм, нежели опубликовывать их. Это, конечно, вопрос спорный.

Свою научную деятельность Хевисайд кончил в 1912 г., после чего жил и умер в полнейшем одиночестве. Основные его работы собраны и изданы в трех томах „Electromagnetic Theory".

В 1918 г. О. Хевисайд, как выдающийся ученый и инженер, был избран почетным членом американского Института инженеров электриков. В 1921 г. он получил первую Фарадеевскую медаль английского Института инженеров электриков. Интерес к работам и методам Хевисайда возобновился примерно в 1916—1917 г. Не ставя своей целью дать исторический обзор рассматриваемого вопроса, мы заметим, что огромная заслуга в дальнейшем применении, развитии и обосновании операционного исчисления принадлежит американскому инженеру Д. Карсону (John R. Carson), голландскому электрику Б. ван-дер-Полю (B. van der Pol) и английскому математику Т. Бромвичу (T. J. Bromwich). Особенно широко операционное исчисление применяется в Америке, где оно находит приложение в разнообразных теоретико-технических исследованиях.

Применение контурных интегралов к анализу и математической физике ведет свое начало со времен великого французского математика Коши.

Особенно широко начали применяться контурные интегралы в области математической физики сравнительно недавно. Из современных ученых, развивавших эти приложения, нужно упомянуть Зоммерфельда (Sommerfeld), Дебая (Debaye), Карслоу (Carslaw).

[1] Труды 2-го Всесоюзного математического съезда в 1934 г. в Ленинграде. Том. II, доклад Г. Мюнтца.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В этой главе мы дадим краткий обзор некоторых результатов теории функций комплексного переменного, на которые нам придется ссылаться в дальнейшем и приведем доказательства некоторых предложений, которые не встречаются в обычных изложениях теории.

Имеется ряд прекрасных изложений основ теории функций комплексного переменного, из них мы особенно отметим: Э. Гурса „Курс анализа“, том II, ч. I; Уитеккер и Ватсон „Курс современного анализа“, ч. I; акад. А. Н. Крылов „О некоторых; диференциальных уравнениях математической физики“, глава V; А. Гурвиц „Теория аналитических и эллиптических функций“; И. Привалов „Теория функций комплексного переменного“; В. Смирнов „Курс высшей математики“, том III, гл. IV—VI;[1] к этим руководствам мы и отсылаем за более подробным ознакомлением с вопросами, затронутыми в разделе 1 этой главы.

1. Основные понятия и теоремы

I. Комплексной переменной называется комплексное число $z=x+jy$, $j=\sqrt{-1}$, в котором x и y являются действительными независимыми переменными. Каждое значение комплексной переменной изображается точкой плоскости, причем абсцисса точки равна x, ордината y; эту плоскость мы будем называть плоскостью переменной z (рис. 1).

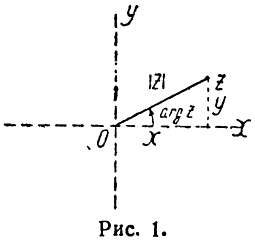

Рис. 1.

Мы будем применять следующие обозначения для вещественной и мнимой части комплексного числа $z=x+jy$:

$$x=\Re z, \quad y=\Im z.$$

Как известно из теории мнимых чисел, длина вектора oz называется модулем z и обозначается через

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$

[1] В дальнейшем эти руководства будут обозначаться именами их авторов.

угол xoz называется аргументом z и обозначается

$$\arg z.$$

II. Функцией комплексной переменной $z=x+jy$ называется комплексная переменная

$$F(z)=P(x, y)+jQ(x, y), \tag{1}$$

вещественная и мнимая части которой являются функциями от x и y.

Функция комплексной переменной называется аналитической или моногенной, если ее вещественная и мнимая части тождественно удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}=-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \tag{2}$$

которые называются условиями Коши-Римана. В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно аналитические функции комплексной переменной.

III. Для аналитических функций возможно однозначно установить понятие о производной. Производная $F'(z)$ функции $F(z)$ по переменной z может быть представлена следующими способами:

$$F'(z)=\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{\partial P}{\partial x}+j\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}-j\frac{\partial P}{\partial y}.$$

На производные аналитических функций распространяются все правила диференцирования, выведенные в диференциальном исчислении для функций от действительной переменной.

IV. Интеграл от аналитической функции $F(z)$, взятый между двумя значениями $z=z_1$ и $z=z_2$, связывается с определенным путем интегрирования (рис. 2), соединяющим точки z_1 и z_2 на плоскости z. Записывается это так

$$\int_{(L)} F(z)\,dz.$$

Запись

$$\int_{z_1}^{z_2} F(z)\,dz$$

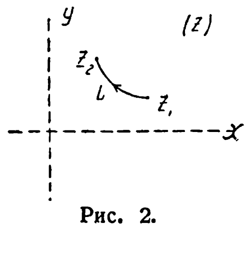

Рис. 2.

допустима только, если величина интеграла не зависит от пути интегрирования (см. VII пункт) или если путь интегрирования известен.

К интегралам от аналитической функции применимы все методы вычисления интегралов, основанные на результатах диференциального исчисления (интегрирование по частям, замена переменной и т. д.).

V. Областью называется связная часть плоскости, ограниченная одним или несколькими контурами; ограничивающие контуры могут иметь и бесконечные ветви. Интеграл от какой-либо функции, взятый по всей границе области, мы будем называть контурным интегралом.

VI. Аналитическая функция $f(z)$ называется голоморфной в некоторой области, если в каждой точке этой области она удовлетворяет следующим условиям:

1. Каждой точке области соответствует определенное значение функции (функция однозначная).

2. Функция непрерывна в каждой точке, т. е. $[f(z+\Delta z)-f(z)]_{|\Delta z|\to 0} \to 0$.

3. В каждой точке функция имеет определенную производную $f'(z)$, т. е. имеет место условие

$$\left[\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right]_{|\Delta z|\to 0} \to 0.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать аналитические функции, которые будут, вообще, голоморфными во всей своей области существования, за исключением отдельных точек, которые будут называться особыми точками.

VII. Теорема Коши. Если функция $f(z)$ голоморфна внутри замкнутой линии, то интеграл $\int f(z)\,dz$, взятый вдоль этой линии, равен нулю.

Следствие. Значения $\int f(z)\,dz$, взятого между точками z_1 и z_2 по двум разным путям L_1 и L_2 (рис. 3) равны между собой, если можно перейти от L_1 к L_2 путем непрерывной деформации, не переходя ни через одну особую точку.

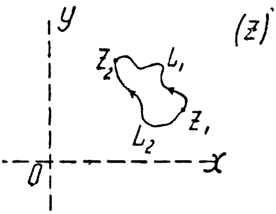

Рис. 3.

VIII. Формула Коши. Если функция $f(z)$ голоморфна внутри замкнутого контура c, то для всякой точки x, взятой внутри контура, имеет место формула

$$f(x)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{(c)}\frac{f(z)}{z-x}\,dz, \qquad (3)$$

т. е. эта формула дает выражение значения функции в точке, взятой внутри контура через значения функции на контуре.

В формуле (3) и везде в дальнейшем при обходе замкнутого контура мы предполагаем обход совершающимся в положительном направлении, т. е. так, что обходимая область остается слева.

IX. Бесконечный ряд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{4}$$

называется степенным рядом относительно z. Если этот ряд сходится при каком-либо значении z_0, то он сходится абсолютно для всех z, удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$, т. е. внутри круга радиуса $|z_0|$, описанного из начала координат, и сходится равномерно во всякой области, целиком расположенной внутри круга $|z_0|$. Наибольший круг, внутри которого сходится ряд (4), называется кругом сходимости, его радиус — радиусом сходимости.

Внутри круга сходимости ряд (4) представляет голоморфную функцию и его можно диференцировать почленно.

Если ряд (4) сходится при всяком конечном z, то его радиус сходимости равен бесконечности и он представляет функцию голоморфную во всей плоскости; такая функция называется целой.

Напомним ряды для целых функций:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

и формулу, вытекающую из этих определений:

$$z = |z| \cos(\arg z) + j\,|z| \sin(\arg z) = |z|\, e^{j \arg z}.$$

X. Ряд Тейлора. Если функция $f(z)$ голоморфна внутри круга c с центром в точке a, то для всякой точки z внутри c имеет место разложение:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{k!} f^{(k)}(a);$$

радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от a до ближайшей к ней особой точки $f(z)$.

XI. Если вокруг точки x можно описать окружность, внутри которой функция $f(z)$ голоморфна, то говорят, что $f(z)$ правильна или регулярна в x, или что x обыкновенная точка $f(z)$ (предл. VI). Круг, о котором здесь шла речь, называется окрестностью a.

Если $f(a) = 0$, то a есть нуль $f(z)$ и в окрестности a $f(z)$ допускает представление $f(z) = (z-a)^m \cdot f_1(z)$, где m — целое положительное число, называемое порядком или кратностью нуля, а $f_1(z)$ регулярна в a и $f_1(a) \neq 0$.

XII. Если a особая точка для $f(z)$, но регулярная точка $\frac{1}{f(z)}$, то a есть полюс $f(z)$. В окрестности полюса, $f(z)$ допускает представление:

$$f(z)=\frac{B_m}{(z-a)^m}+\frac{B_{m-1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_1}{(z-a)}+f_1(z), \qquad (5)$$

где m целое положительное число, называемое порядком полюса, а $f_1(z)$ регулярна в a; $\frac{1}{f(z)}$ имеет в a нуль порядка m. Дробь в правой части равенства (5) называется главной частью функции в a.

XIII. Функция, однозначная в области A и имеющая в A в качестве особых точек только полюсы, называется мероморфной функцией в области A.

Мероморфная функция, во всякой области, лежащей на конечном расстоянии, имеет конечное число нулей и полюсов.

XIV. Всякая особая точка однозначной функции $f(z)$, которая не является полюсом, называется существенно особой точкой, например a для

$$e^{\frac{1}{z-a}}.$$

В окрестности существенно особой точки, изолированной от других особых точек, $f(z)$ допускает представление

$$f(z)=f_1(z)+\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(z-a)^m}+\ldots,$$

где $f_1(z)$ регулярна в a.

XV. Может случиться, что при обходе вокруг точки a, начиная от точки s, функция $f(z)$ возвращается в s с другим значением, например, $\sqrt{z}$ при обходе вокруг 0 меняет знак, в таком случае функция $f(z)$ не однозначна в рассматриваемой области. Точки, при обходе вокруг которых значения функции переходят одни в другие, называются критическими точками функции, например, 0 для $\sqrt{z}$.

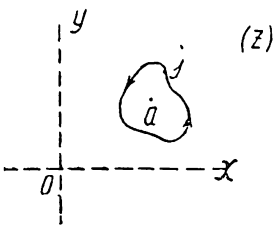

Рис. 4.

Для того чтобы отдельные значения многозначной функции можно было рассматривать как однозначные, на плоскости z проводят разрезы, т. е. линии, соединяющие критические точки между собой или с ∞. При этом считается недопустимым, чтобы пути, по которым изменяется z, пересекали разрезы, тогда различные значения функции образуют ее ветви. Например, двузначную функцию $\sqrt{z^2-a^2}$ мы превращаем в две однозначные функции, проведя разрез между точками (критическими) a и $-a$ или проведя разрезы от a