В.Д. Большаков

Справочник геодезиста

Книга 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 91
ББК 26.8
В11

В.Д. Большаков
В11 Справочник геодезиста: Книга 1 / В.Д. Большаков – М.: Книга по Требованию, 2023. – 546 с.

ISBN 978-5-458-28694-7

В Справочнике в двух книгах изложены теория и практика геодезических работ, описаны инструменты, способы обработки результатов измерений, техника вычислений. Второе издание Справочника переработано и дополнено новыми разделами: космическая геодезия, радиогеодезические системы, гироскопические приборы, экономика и организация геодезических работ.Справочник состоит из шести разделов. В книге 1 в первом разделе рассмотрены элементы теории вероятностей и математической статистики применительно к теории ошибок геодезических измерений, теория ошибок и метод наименьших квадратов, вычислительная техника в геодезии. Во втором разделе изложены основные вопросы теории фигуры Земли и гравиметрии, космической геодезии, геодезической астрономии, сфероидической геодезии. В третьем разделе детально освещены основные геодезические работы: триангуляция и трилатерация, радиодальномерные и светодальномерные измерения. Справочник предназначен для инженеров и техников, выполняющих основные геодезические работы и топографические съемки, а также изыскания и разбивки инженерных сооружений. Он будет полезен для преподавателей, аспирантов и студентов геодезических специальностей высших учебных заведений.

ISBN 978-5-458-28694-7

Раздел I

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

I.1. ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

В. Д. Большаков

А. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

I.1.1. Общие понятия

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая количественные закономерности случайных явлений.

Случайное явление — это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта, наблюдения протекает каждый раз несколько по-иному. Однако в массовом проявлении случайные явления обнаруживают вполне определенную закономерность (примерно одинаковое число выпадений гербов и цифр при бросании монеты, более частое попадание в центральную часть мишени, чем на ее края, и т. д.).

Осуществление каждого отдельного наблюдения, опыта будем называть испытанием. Результат испытания назовем событием (например, при подбрасывании монеты могут происходить два события: появление герба, появление цифры). События условно можно разделить на элементарные, которые нельзя разложить на более простые, и сложные, состоящие из двух или более элементарных событий (например, появление положительной ошибки при одном измерении — элементарное событие, появление пяти положительных ошибок при 10 измерениях — сложное событие). При выполнении определенного комплекса условий различают события следующих видов.

1. Достоверные, т. е. такие, которые обязательно происходят (например, появление герба или цифры при одном бросании монеты).

2. Невозможные, которые никогда не происходят (например, появление белого шара при взятии из урны, где только черные шары).

3. Несовместные, которые не могут произойти вместе (например, появление герба и цифры при одном бросании монеты).

4. Совместные, которые могут происходить одновременно (например, попадание снаряда в цель и срабатывание взрывателя).

5. Полную группу событий, которую образуют такие события, одно из которых при испытании обязательно происходит. Полная

группа — достоверное событие (например, выпадение одной из граней при бросании игральной кости).

6. Противоположные события — два несовместных события, образующих полную группу.

7. Равновозможные события — события, имеющие одинаковую объективную возможность появления.

8. Независимые события — события, имеющие возможность появления, не зависящую от того, появились или не появились другие события. Например, выпадение герба в i-ом бросании монеты не зависит от того, какая ее сторона выпала в предыдущих $i-1$ бросаниях.

9. Зависимые события — такие, у которых возможность появления зависит от того, произошли или не произошли другие события (например, возможность вынуть один шар из урны, содержащей n шаров, если уже вынули k шаров и шары обратно не возвращали).

События обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ... или A_1, A_2, ... A_n.

Достоверное событие обозначают буквой U; невозможное — буквой V; противоположное по отношению к событию A — через $\bar{A}$.

Если вероятность события сколь угодно близка к единице или нулю, событие называется практически достоверным или соответственно практически невозможным. Степень приближения к единице или нулю оценивается, исходя из практических соображений.

Пример 1. При артиллерийской стрельбе из 1000 снарядов, выпущенных из орудий, 999 разрываются, один снаряд не разрывается. Вероятность неразрыва снаряда равна 0,001, разрыва — 0,999. Событие «неразрыв снаряда» при одном выстреле можно считать практически невозможным, событие «разрыв снаряда» — практически достоверным.

I.1.2. Схема случаев. Непосредственный подсчет вероятностей

С каждым событием связывают понятие вероятности — числовой характеристики объективной возможности появления события. Существуют события, вероятность которых можно определить из условий самого опыта, не производя его. Для этого необходимо, чтобы элементарные события, составляющие полную группу, были несовместными и обладали симметричным исходом и в силу этого были бы равновозможными. Говорят, что в этом случае опыт сводится к «схеме случаев». Случай называется благоприятствующим некоторому событию A, если появление этого случая влечет за собой появление данного события A. Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A можно оценить по формуле

$$p(A)=\frac{M}{N}, \tag{I.1.1}$$

где N — общее число случаев, M — число случаев, благоприятствующих событию A. При этом $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$, причем вероятность достоверного события $p(U) = 1$, невозможного — $p(V) = 0$.

Формулу (I.1.1) называют классическим определением вероятности, а вычисления по (I.1.1) — непосредственным подсчетом вероятностей. Применяя (I.1.1), найдем, что вероятность появления герба при одном бросании монеты

$$p_{\text{герба}}=\frac{1}{2}.$$

Этому же числу равна вероятность появления положительной (отрицательной) ошибки при одном измерении.

Вероятность выпадения грани с цифрой 6 при одном бросании игральной кости

$$p_6=\frac{1}{6}.$$

Пример 2. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белые.

Так как число благоприятствующих случаев $M = C_a^2$, где C_a^2 — число сочетаний из a белых шаров по 2, а число всевозможных случаев составляет

$$n=C_{a+b}^2,$$

где C_{a+b}^2 — число сочетаний из $a+b$ всех шаров по 2, то

$$p=\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}.$$

I.1.3. Относительная частота и вероятность

Очевидно, не всякий опыт может быть сведен к схеме случаев, и поэтому существуют события, вероятности которых невозможно вычислить по формуле (I.1.1). Для таких событий применяют другие способы определения вероятностей. Все эти способы связаны с опытом (экспериментом) и понятием относительной частоты (частости) события.

Относительной частотой события называют отношение числа появлений этого события m к числу всех произведенных опытов n, т. е.

$$Q=\frac{m}{n}. \tag{I.1.2}$$

При неограниченном числе опытов с вероятностью сколь угодно близкой к единице можно ожидать, что относительная частота (частость) события приближается к его вероятности (теорема Бернулли — закон больших чисел). Это утверждение пишут так:

$$\text{вер.} \lim_{n\to\infty} Q = p.$$

Вероятностный предел (вер. lim) отличается от математического предела и понимается как тенденция стремления к пределу.

I.1.4. Теоремы теории вероятностей

Теоремы теории вероятностей позволяют определить вероятности сложных событий — суммы и произведения элементарных событий, если известны вероятности последних. Суммой событий A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называется сложное событие B, заключающееся в появлении хотя бы одного из них. Для несовместных событий условно пишут

$$B = \text{или } A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{ или } A_n,$$

а также

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Теорема. Вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i). \tag{I.1.3}$$

Пример 3. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что вскроется грань с четной цифрой.

Решение. Искомое событие наступает, когда вскроются грани с цифрами: или 2, или 4, или 6. Вероятность вскрытия любой грани $p(A_i) = {}^1/_6$.

Искомая вероятность $p(B) = p$ (четн. цифра) $= {}^1/_6 + {}^1/_6 + {}^1/_6 = {}^1/_2$.

Пример 4. В лотерее 1000 билетов, из них падает выигрышей: на один билет — 500 руб.; на 10 билетов — по 100 руб.; на 50 билетов — по 20 руб.; на 100 билетов — по 5 руб. Остальные билеты невыигрышные.

Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб. и какой-либо суммы, имея один билет.

Решение. Обозначим события: A — выигрыш не менее 20 руб.; A_1 — выигрыш 20 руб.; A_2 — выигрыш 100 руб.; A_3 — выигрыш 500 руб.; A_4 — выигрыш 5 руб.

Согласно условию

$$A = A_1 + A_2 + A_3, \quad p(A) = p(A_1 + A_2 + A_3).$$

По теореме сложения имеем

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3),$$

но

$$p(A_1) = 50 : 1000 = 0{,}050; \quad p(A_2) = 10 : 1000 = 0{,}010;$$
$$p(A_3) = 1 : 1000 = 0{,}001.$$

Следовательно, получим

$$p(A) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}061.$$

Вероятность выиграть какую-либо сумму, имея один билет, равна

$$p(A') = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4);$$

так как

$$p(A_4) = 100 : 1000 = 0{,}100,$$

то

$$p(A') = 0{,}161.$$

Следствия из теоремы сложения

Следствие 1. Если события A_i образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(U) = 1. \qquad (I.1.4)$$

Следствие 2. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1, т. е.

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1 \quad \text{и} \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A). \qquad (I.1.5)$$

Произведением событий называется сложное событие C, заключающееся в совместном появлении всех событий A_i. Условно это пишут так:

$$C = \text{и } A_1, \text{ и } A_2, \text{ и}, \ldots, \text{ и } A_n,$$

или

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

Теорема. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей, т. е.

$$p(C) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i). \qquad (I.1.6)$$

Вероятности независимых событий называются безусловными. Зависимые события имеют так называемые условные вероятности, которые записываются в виде $p(A_1/A_2)$ — условная вероятность события A_1, вычисленная в предположении, что произошло событие A_2, $p(A_i/A_1, A_2, \ldots, A_{i-1})$, условная вероятность события A_i, вычисленная в предположении, что произошли события $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

Теорема. Вероятность произведения двух или нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других, т. е. $p(C) = p(A_1) \times p(A_2/A_1)$; $p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot p\left(A_n \Big/ \prod_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Пример 5. Найти вероятность того, что при 5 измерениях появятся только положительные ошибки.

Решение. Так как события независимые, то применяем (I.1.6), имеем

$$p(C)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_4)\cdot p(A_5),$$

где событие A_i — появление положительной ошибки в i-ом измерении. В силу того, что $p(A_i)=\frac{1}{2}$, имеем $p(C)=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$.

Пример 6. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна $p_1=0{,}20$. Какова вероятность поразить цель при одном выстреле, если 2% взрывателей снарядов дают отказы?

Решение. Считая события «попадание в цель» и «действие взрывателя» независимыми, по теореме умножения имеем

$$p=p_1\cdot p_2,$$

где p — вероятность поразить цель; p_2 — вероятность разрыва снаряда при выстреле.

Так как вероятность «неразрыва» равна 2%, т. е. 0,02, то вероятность $p_2=1-0{,}02=0{,}98$ (разрыв и неразрыв — события, составляющие полную группу событий).

Следовательно, $p=p_1\cdot p_2=0{,}20\ 0{,}98=0{,}196$.

Теорема. Если события A_i совместны, то вероятность суммы событий

$$p(B)=1-p(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n).$$

Если события A_i независимы, то

$$p(B)=1-\prod_{i=1}^{n}p(\bar{A}_i). \qquad (I.1.7)$$

Для двух таких событий

$$p(B)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1)\cdot p(A_2).$$

Когда все $p(A_i)$ равны между собой и независимы, то

$$p(B)=1-\{p(\bar{A})\}^n \qquad (I.1.8)$$

Пример 7. На испытательном стенде размещено 50 приборов. Вероятность отказа в работе одного прибора за время t равна $p(A)=0{,}1$. Найти вероятность того, что за время t откажет хотя бы один прибор, если приборы работают независимо друг от друга.

Решение. На основании (I.1.8) имеем

$$p(B)=1-p(\bar{A})^{50}=1-0{,}9^{50}.$$

Логарифмируя $p(\bar{A})^{0,50}=0{,}9^{50}$, получим

$$\lg p(\bar{A})^{0,50}=50\lg 0{,}9=50\cdot(\bar{1}{,}954)=-50\cdot 0{,}046=-2{,}30$$

и

$$\lg p(\bar{A})^{0,50}=-3{,}70,$$

откуда

$$p(\overline{A}) = 0{,}0051 \quad \text{и} \quad p(B) = 0{,}995.$$

Пример 8. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень с вероятностью попадания, соответственно равной $p_1 = 0{,}7$ и $p_2 = 0{,}9$.

Найти вероятность хотя бы одного попадания.

Решение. Так как попадание в мишень обоими стрелками — события независимые, но совместные, то, применяя (I.1.7), имеем

$$p(B) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}97.$$

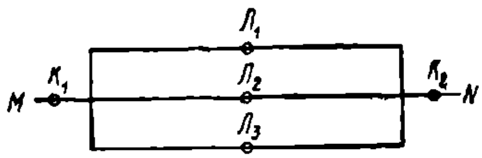

Рис. I.1.1

Пример 9. Электрическая цепь составлена по схеме рис. I.1.1.

Выход из строя за время t различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности:

Элемент	K_1	K_2	$Л_1$	$Л_2$	$Л_3$
Вероятность	0,10	0,20	0,15	0,20	0,10

Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

Решение. Цепь выйдет из строя (событие B), когда откажут в работе следующие элементы: или K_1 (событие A_1), или все $Л_j$ (событие A_3), или K_2 (событие A_2), или все K_i и $Л_j$ вместе.

Так как эти события совместны, то имеем на основании (I.1.7)

$$p(B) = 1 - p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot p(\overline{A}_3).$$

Вероятности:

$$p(\overline{A}_1) = 0{,}90; \quad p(\overline{A}_2) = 0{,}80.$$

Событие $\overline{A}_3$ заключается в том, что хотя бы один из элементов $Л_j$ не откажет, поэтому $p(\overline{A}_3)$ находим также по теореме сложения для совместных событий

$$p(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}15 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}10 = 0{,}997,$$

отсюда

$$p(B) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}997 = 0{,}282.$$

I.1.5. Многократные (повторные) испытания. Вероятнейшее число появлений события

Если необходимо определить вероятность того, что при n независимых испытаниях интересующее нас событие A появится k раз, то применяют формулу Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (I.1.9)$$

где $P_n(k)$ — вероятность появления события k раз при n испытаниях, C_n^k — число сочетаний из n по k, p — вероятность появления события в отдельном опыте, $q = 1 - p$ — вероятность непоявления события в отдельном опыте. Напомним, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad (I.1.10)$$

причем

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \qquad (I.1.11)$$

При больших значениях k и n для упрощения вычисления факториалов применяется формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}. \qquad (I.1.12)$$

При многократных испытаниях вероятность $P_n(k)$ по форме представляет собой члены разложения бинома $(q+p)^n$, т. е.

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + \ldots + C_n^k q^{n-k} p^k + \ldots + C_n^n q^0 p^n. \qquad (I.1.13)$$

Контролем вычислений по формуле (I.1.13) является

$$(q+p)^n = 1.$$

Пример 10. По одной и той же мишени в одинаковых условиях производятся четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле $p = 0{,}33$ ($q = 0{,}67$). Определить вероятность поражения мишени $k = 0, 1, 2, 3, 4$ раза.

Решение. Так как общее число испытаний (выстрелов) $n = 4$, то имеем:

$$P_{4(0)} = C_4^0 q^4 p^0 = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} \cdot 0{,}67^4 \cdot 0{,}33^0; \quad P_{4(0)} = 0{,}20;$$

$$P_{4(1)} = C_4^1 q^3 p^1 = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \cdot 0{,}67^3 \cdot 0{,}33^1; \quad P_{4(1)} = 0{,}40;$$

$$P_{4(2)} = C_4^2 q^2 p^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} \cdot 0{,}67^2 \cdot 0{,}33^2; \quad P_{4(2)} = 0{,}29;$$

$$P_{4(3)} = C_4^3 q^1 p^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} \cdot 0{,}67^1 \cdot 0{,}33^3; \quad P_{4(3)} = 0{,}10;$$

$$P_{4(4)} = C_4^4 q^0 p^4 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} \cdot 0{,}67^0 \cdot 0{,}33^4; \quad P_{4(4)} = 0{,}01.$$