

Н.И. Фусс

**Начальные основания чистой
математики**

Часть 3

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н.И. Фусс**
Начальные основания чистой математики: Часть 3 / Н.И. Фусс – М.: Книга по Требованию, 2021. – 380 с.

ISBN 978-5-458-27778-5

Учебник для гимназий по тригонометрии и началам высшей математики, содержит приложение алгебры к геометрии, плоскую тригонометрию, конические сечения и основания дифференциального и интегрального исчисления.

ISBN 978-5-458-27778-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint



ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Приложеніе Алгебры къ Геометріи.

Стр.

Гл. I. О разрѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, ведущихъ къ уравненіямъ первой степени.	7
— II. О разрѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, ведущихъ къ уравненіямъ второй степени.	27
— III. О разрѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, ведущихъ къ уравненіямъ третьей степени.	50
— IV. О разрѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, ведущихъ къ уравненіямъ четвертой степени	64

ОТДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ

Плоская Тригонометрія.

Гл. I. Опредѣленія и предварительныя изъясненія.	85
— II. О произхожденіи и свойствахъ тригонометрическихъ линій	88
— III. О употребленіи тригонометрическихъ линій при треугольникахъ	98
— IV. О разрѣшеніи треугольниковъ.	104
— V. О употребленіи изложенныхъ выше правилъ, при разрѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ до практической Геометріи относящихся	115
— VI. Дальнѣйшее изслѣдованіе тригонометрическихъ формулъ .	131
— VII. Приложение предъидущихъ формулъ къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ.	144
— VIII. О рѣшеніи уравненій третьей степени посредствомъ Тригонометріи	162

ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ.

Коническія сѣченія.

Гл. I. О различныхъ образахъ разсѣканія конуса плоскостью.	177
--	-----

Гл. II. О кривыхъ линіяхъ вообще	179
— III. О кругѣ . . .	183
— IV. О эллипсѣ.	187
— V. О параболѣ . . .	215
— VI. О гиперболѣ.	228

ОТДѢЛЕНІЕ ЧЕТВЕРТОЕ.

*Основанія дифференціального и интеграль-
наго изчисленія.*

Гл. I. Опредѣленія и предварительныя изъясненія.	249
— II. О сысканіи дифференціаловъ ал- гебраическихъ функцій.	256
— III. О сысканіи дифференціаловъ трансцендентныхъ функцій	264
— IV. Приложение сихъ началъ къ кри- вымъ линіямъ	273
— V. С дифференціалахъ высшихъ сте- пеней	280
— VI. О точкахъ перегиба и возвраша . . .	283
— VII. О величинахъ наибольшихъ и наи- меньшихъ	287

	Стр.
Гл. VIII. Объ интегралахъ вообще.	308
— IX. О сыскиваніи интеграловъ сложныхъ дифференціальныхъ формуль .	312
— X. О сыскиваніи интеграловъ сложныхъ дифференціальныхъ функций посредствомъ преобразования	318
— XI. Приложение интегральнаго изчисления къ сыскиванію длины кривыхъ линій	326
— XII. Приложение интегральнаго изчисления къ сыскиванію квадратуры кривыхъ линій .	339
— XIII. Приложение интегральнаго изчисления къ сыскиванію поверхностей и площадей тѣлъ вращенія	345
— XIV. Приложение интегральнаго изчисления къ вопросамъ такъ называемаго обратнаго способа тангенсовъ .	352



ПРИЛОЖЕНИЕ АЛГЕБРЫ къ ГЕОМЕТРИИ.

Въ первой части сихъ Основаній чистой Маѳематики мы видѣли, что когда при разрѣшеніи какого нибудь алгебраическаго вопроса достигнемъ къ приведенію онаго въ уравненіе, тогда главная трудность уже преодоѣна бываетъ, потому что рѣшеніе алгебраическаго уравненія послѣ сего не можетъ болѣе останавливать тѣхъ, которые хорошо уразумѣли правила изложенныя въ первой части сего курса. Точно тоже должно быть и въ вопросахъ геометрическихъ; коль скоро достигнемъ къ приведенію ихъ въ уравненіе, то прочее не составляетъ уже никакой трудности для тѣхъ, которые умѣютъ разрѣшать алгебраическія уравненія:

Правило, по которому поступать должно, чтобы достигнуть къ уравненію, есть тоже самое, которое и показано было въ §§ 276 — 282 Алгебры, но чтобы быть въ состояніи приводить

въ уравненія геометрическія вопросы, то не довольно имѣть въ свѣжей памяти всѣ геометрическія свойства, могущія руководствоваться къ сопоставленію уравненій, но должно еще умѣть сдѣлать выборъ въ количествѣхъ равномерно могущихъ замѣнять мѣсто данныхъ и неизвѣстныхъ; ибо единственно отъ сего болѣе или менѣе благоуспѣшнаго выбора зависить простота, а иногда даже и успѣхи въ разрѣшеніи.

Здѣсь не возможно предложить общихъ правилъ для сего выбора; вмѣсто ихъ должно имѣть особенную предусмотрительность, которая снискивается только великимъ навыкомъ въ разрѣшеніи геометрическихъ вопросовъ. Слѣдующіе примѣры могутъ мало по малу способствовать къ пріобрѣтенію сей предусмотрительности. Мы начнемъ съ вопросовъ ведущихъ къ уравненіямъ первой степени, отъ которыхъ перейдемъ къ вопросамъ второй степени; а сіи облегчатъ разрѣшеніе вопроса претней и наконецъ четвертой степени.

Г Л А В А I.

О разрѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, ведущихъ къ уравненіямъ первой степени.

В О П Р О С Ъ I.

§. 1.

На діаметрѣ АВ даннаго полукруга по-^{Черт.} ставитъ перпендикулярную линію DE^{1.} такъ, чтобы DE была къ AD въ данномъ отношеніи $n : 1$.

Р Ъ Ш Е Н І Е.

Пусть $AB = a$ и $AD = x$; будетъ $BD = a - x$ и $DE^2 = x(a - x)$ (Геом. § 194). Но $DE = n \cdot AD$, по положенію, слѣдовательно $DE^2 = n^2 x^2$. И такъ $n^2 x^2 = x(a - x)$; отсюда получится $AD = x = \frac{a}{1 + n^2}$.

В О П Р О С Ъ 2.

§. 2.

На діаметрѣ АВ даннаго полукруга АСВ ^{Черт.} поставитъ перпендикулярную линію DE^{1.}, которая пересѣкла бы данную хорду АС въ точкѣ F такъ, чтобы была часть оной AF къ АС въ данномъ отношеніи $1 : n$.

Р Ъ Ш Е Н І Е.

Пусть $AB = a$, $AC = b$ и $AD = x$; проводя хорду BC , будемъ $\triangle ACB \sim \triangle ADF$, откуда произойдетъ $AB : AC = AF : AD$ (Гео. I. § 186).

И такъ будемъ $AF = \frac{AB \cdot AD}{AC} = \frac{ax}{b}$. Но $AF = \frac{b}{n}$, по положенію, слѣдовательно $\frac{ax}{b} = \frac{b}{n}$ и $x = \frac{b^2}{na}$.

В О П Р О С Ъ 3.

§. 3.

Черт. *Въ данномъ полукругѣ ACB составить*
 1. *треугольникъ, коего сторона AC была бы къ сторонѣ BC въ данномъ отношеніи $1 : n$.*

Р Ъ Ш Е Н І Е.

Пусть C вершина искомаго треугольника. Изъ сей точки опустимъ на діаметръ перпендикулярную линію CG , и положимъ $AB = a$ и $AG = x$; поелику

$$\left. \begin{array}{l} AC = AG \cdot AB = ax \text{ и} \\ BC = BG \cdot AB = a(a-x) \end{array} \right\} \text{ (Геом. § 192.)}$$

и припомъ $BC = np \cdot AC$ (по положенію, по будемъ $a(a-x) = npax$, откуда получимъ $x = \frac{1}{1+np}$.

В о п р о с ь 4.

§. 4.

Въ данномъ полукругѣ ADB описать ^{Черт. 2.} дугой AFE, касающійся къ первому въ точкѣ А и пересѣкающійся съ радіусомъ CD въ точкѣ F такъ, что бы часть онаго DF была къ CD въ данномъ отношеніи 1 : n.

Р ѣ ш е н і е.

Пусть $AB = a$ и $AE = x$; будетъ $AC = CD = \frac{1}{2}a$ и $CE = x - \frac{1}{2}a$, и посему $CF = CA - CE = \frac{1}{2}a (x - \frac{1}{2}a)$ (Геом. § 92). Но $CF = CD - DF = \frac{1}{2}a (1 - \frac{1}{n})$ слѣдовательно $CF^2 = \frac{1}{4}a^2 (1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})$, и по сравненіи двухъ величинъ найденныхъ для CF, получится сіе уравненіе:

$$\frac{1}{2}a (x - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}aa (1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}),$$

изъ коего имѣемъ $x = \frac{1}{2}a (2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})$.

В о п р о с ь 5.

§. 5.

Въ данномъ полукругѣ ADB описать ^{Черт. 3.} другой AEC, касающійся къ первому въ точкѣ А такъ, что когда постановимъ перпендикулярную CD и протянемъ хорду AD, то часть оной DE была бы къ CD въ данномъ отношеніи 1 : n.

Р Ъ Ш Е Н І Е.

Пусть $AB = a$ и $AC = x$; будетъ $BC = a - x$ и слѣдовательно $CD' = AC \cdot BC = x(a - x)$. Но поелику $CE \nparallel BD$ и $AD \parallel DE = AB : BC$ (Геом. § 182), то будетъ $DE = \frac{AD \cdot BC}{AB}$ и $DE' = \frac{AD^2 \cdot BC^2}{AB^2}$; и такъ $AD' = AB \cdot AC = ax$ (Геом. § 192), то сдѣлается $DE' = \frac{ax(a-x)^2}{aa}$. Но поелику $CD' = nnDE'$ (по положенію), то вопросъ приводится въ сіе уравненіе:

$$x(a-x) = \frac{nnx(a-x)}{a}$$

которое даетъ $x = \frac{(nn-1)}{nn}$.

В о п р о с ъ 6.

Черт. 4. Въ данномъ полукругѣ ADB описать другой AEC , которой касался бы къ первому въ точкѣ A и къ данной онаго хордѣ BD .

Р Ъ Ш Е Н І Е.

Пусть $AB = a$, $BD = b$ и радіусъ искомаго полукруга $AO = x$. Поелику $\angle ADB$ прямой (Геом. § 156), равно какъ и $\angle OEB$ (Геом. § 147), то будетъ $\triangle BAD \sim \triangle BCE$, и посему $AD : OE = AB : OB$, слѣдовательно будетъ $OE \cdot AB = AD \cdot OB$. Но $AD = \sqrt{aa - bb}$ (Геом.