Э. Уиттекер, Г. Робинсон

Математическая обработка результатов наблюдений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э. Уиттекер
Э1 Математическая обработка результатов наблюдений / Э. Уиттекер, Г. Робинсон – М.: Книга по Требованию, 2018. – 382 с.

ISBN 978-5-458-53254-9

Перевод кн. Уиттекера и Робинсона „Математическая обработка наблюдений" сделан с последнего издания английской книги Whit-taker and Robinson „The calculus of observations", сотрудниками Секции прикладной математики Государственного оптического института под редакцией члена-корреспондента Академии наук проф. Н. М. Гюнтера. Перевод сделан без существенных изменений английского оригинала с сохранением английских мер в примерах, имеющих иллюстрационное значение. Книга является пособием и справочником для работающих в институтах вычислительного характера.

ISBN 978-5-458-53254-9

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА.

Книга Уиттекера „Математическая обработка результатов наблюдений“ (The calculus of observations) во всех частях, кроме последней, посвященной приближенному интегрированию уравнений, может служить полезным пособием для работающих в вычислительных институтах, а также для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по работе, связанной с вычислениями.

Хотя многие отделы, затронутые автором (главы I, II, VII), довольно полно разобраны в нашей литературе, но благодаря подходу автора и тем дополнениям, которые он вносит (главы III и IV), содержание этих отделов дополняет даже такой совершенный курс, как „Исчисления конечных разностей“ А. А. Маркова. Сказанное относится также к главе VII, хотя разработка способов механических квадратур издавна привлекала внимание русских математиков. Главы, посвященные теории частот и способу наименьших квадратов, мало разрабатывались в доступной студентам литературе, и потому в этой области книга может оказаться весьма полезной.

Примеры на действия с таблицами, содержащими распределение частот, заимствованы автором из официальных данных об измерении грудной клетки призываемых в английскую армию, причем элементы этих таблиц распределены по размерам грудной клетки. В них сохранены английские меры в виду невозможности перечисления в метрические — строки характеризовались бы дробями, а не целыми числами.

Проф. *Н. Гюнтер.*

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга представляет собою курс лекций, читанных в различное время в течение 1913—1923 гг. профессором Уиттекером студентам в математической лаборатории Эдинбургского университета; ее можно рассматривать как практическое руководство лаборатории за исключением отдела начертательной геометрии, для которого желательно иметь отдельную книгу. Рукопись лекций была подготовлена к печати Робинсоном, который проделал всю работу по контролю вычислений и прибавил дополнительные примеры.

Изложение всего курса построено так, чтобы каждая глава была насколько возможно понятна тем, кто не овладел предыдущими главами, не читая книгу сначала.

Одна черта, которая может быть требует объяснения—это предпочтение, оказываемое арифметическим методам перед графическими. Когда в 1913 году Эдинбургская лаборатория была основана, испытывались по возможности все методы, когда-либо предлагавшиеся для решения рассматриваемых задач, и между прочими также графические. За десять лет, прошедших с тех пор, почти все графические методы постепенно были оставлены, так как стало очевидным, что они уступают первым, и в настоящее время работа лаборатории почти исключительно арифметическая. Грубый набросок на графленой бумаге употребляется часто, но (кроме начертательной геометрии) тщательное построение графика на чертежной доске при помощи инструментов обычно медленнее и дает менее точные результаты, чем арифметическое решение той же задачи.

Авторы считают своим долгом отметить свою признательность G. J. Lidstone, F. I. A., F. R. S. E. (Лидстону, члену Эдинбургской академии наук), чье исключительное знание литературы по страховому делу имело для них громадное значение. Ему главным образом книга обязана богатством теорем и методов, заимствованных из работ по страховому делу, с которыми обыкновенно математики мало знакомы. G. J. Lidstone и John Dougall (Джон Дуголл, член Эдинбургской академии наук) просматривали корректуры; по их указаниям многие ссылки были добавлены, многие доказательства упрощены и многие неясности устранены.

Уиттекер и *Робинсон.*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Многими лицами любезно было сообщено о замеченных опечатках, которые и исправлены в настоящем издании. С благодарностью отмечаю помощь, оказанную мне доктором A. C. Aitken'ом (Эйткен), преподавателем математики и статистики в Эдинбургском университете, чьи недавние исследования по теории сглаживания наблюдений вызвали необходимость переработки последней части главы XI.

Уиттекер.

Октябрь 1925 г.

ГЛАВА I.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПРИ РАВНЫХ ПРОМЕЖУТКАХ.

§ 1. Введение. Математика уделяет большое внимание идее *зависимости*: например, каждому числу x соответствует значение x^2:

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ \ 4,\ \ 5\ldots$$
$$x^2 = 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\ldots$$

Одна из двух переменных величин, между которыми существует зависимость, называется *аргументом*, а другая *функцией* от этого аргумента.

Если y есть функция от аргумента x, определяемая уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ есть некоторое алгебраическое выражение, заключающее только арифметические действия, как возведение в степень, деление и так далее — то, выполняя эти действия, мы можем найти точное значение y, соответствующее некоторому определенному значению x. Но если предположим, что $y=\log_{10}x$, то невозможно вычислить значение y, применяя обычные арифметические действия над x (во всяком случае, невозможно вычислить точно y выполнением конечного числа таких действий), и мы принуждены прибегнуть к помощи *таблицы*, которая дает значения y, соответствующие определенным значениям x, например:

x	$\log x$	x	$\log x$
7.0	0.845 098	7.4	0.869 232
7.1	0.851 258	7.5	0.875 061
7.2	0.857 332	7.6	0.880 814
7.3	0.863 323	7.7	0.886 491

Возникает вопрос, каким образом мы можем найти значения функции $\log x$ для значений аргумента x, которые находятся между табличными значениями, например для значения $x=7.152$. Ответ на этот вопрос дается теорией *интерполирования*, которая в наиболее элементарном виде может быть определена как наука „чтения между строками математической таблицы“.

В дальнейшем развитии теории интерполирования будет выяснено, как находить значения производной функции, определенной таблицей, и также, как находить ее интеграл, взятый между какими-либо пределами интегрирования.

Методом, подобным интерполированию, пользовался еще Brigss [1]), но

[1]) Метод Brigss'а тем не менее близок к современным формулам центрированных разностей. См. его Arithmetica Logarithmica, глава XIII, и его Trigonometria Britannica, гл. XII. См. Journal of the Institute of Actuaries **14**, стр. 1, 73, 84, 88; **15**, стр. 312.

интерполирование, изложенное в дальнейшем и опирающееся на представление функций через полиномы, было впервые введено James'ом Gregory [1]) в 1670 г.

§ 2. Таблица разностей. Предположим, что функция $f(u)$ дана в таблице для значений a, $a+w$, $a+2w$, $a+3w, \ldots$ аргумента u. Требуется найти значение функции, когда аргумент имеет значение $a+xw$, где x — дробное число.

Прежде чем приступать к решению этой задачи методом интерполирования, необходимо ввести в рассмотрение так называемые *разности* табличных значений. Величина

$$f(a+w)-f(a)$$

обозначается через $\Delta f(a)$ и называется *первой разностью* функции $f(a)$. Первая разность функции $f(a+w)$ есть $f(a+2w)-f(a+w)$ и обозначается через $\Delta f(a+w)$. Величина

$$\Delta f(a+w)-\Delta f(a)$$

обозначается через $\Delta^2 f(a)$ и называется *второй разностью* функции $f(a)$, а

$$\Delta^2 f(a+w)-\Delta^2 f(a)$$

обозначается через $\Delta^3 f(a)$ и называется *третьей разностью* функции и т. д.

Табличные значения и их разности удобно располагать по возрастающим значениям аргумента следующим образом, в так *называемую таблицу разностей*:

Аргумент	Функция	Δ	Δ^2	Δ^3
a	$f(a)$			
		$\Delta f(a)$		
$a+w$	$f(a+w)$		$\Delta^2 f(a)$	
		$\Delta f(a+w)$		$\Delta^3 f(a)$
$a+2w$	$f(a+2w)$		$\Delta^2 f(a+w)$	
		$\Delta f(a+2w)$		$\Delta^3 f(a+w)$
$a+3w$	$f(a+3w)$		$\Delta^2 f(a+2w)$	
		$\Delta f(a+3w)$		$\Delta^3 f(a+2w)$
$a+4w$	$f(a+4w)$		$\Delta^2 f(a+3w)$	

продолжая вправо таблицу аналогично для разностей порядка выше третьего. Первое значение функции $f(a)$ называется *исходным значением*, и разности функции $f(a)$, обозначенные через $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a) \ldots$, называются *исходными разностями*. Очевидно, *каждая разность в таблице есть число (с соответствующим знаком), полученное вычитанием числа, находящегося непосредственно выше и слева, из числа, расположенного ниже и слева.*

Сумма значений в некотором столбце разностей равна разности между первым и последним значениями предыдущего столбца. Это служит численным контролем правильности таблицы. Таким образом, в указанной выше таблице мы имеем

$$\Delta^2 f(a+3w)=\Delta^2 f(a)+\Delta^3 f(a)+\Delta^3 f(a+w)+\Delta^3 f(a+2w).$$

---

[1]) Rigaud's, Correspondence of Scientific Men of the 17-th Century, 2, стр. 209.

Как пример таблицы разностей, приведем таблицу натуральных значений синусов углов от 25° 40′ 0″ до 25° 43′ 0″ с интервалами через 20″.

Аргумент	Функция	Δ	Δ^2	Δ^3
25° 40′ 0″	0. 43313 47858 66963			
		8 73933 05476		
20″	0. 43322 21791 72439		—40 73056	
		8 73892 32420		—822
40″	0. 43330 95684 04859		—40 73878	
		8 73851 58542		—822
25° 41′ 0″	0. 43339 69535 63401		—40 74700	
		8 73810 83842		—820
20″	0. 43348 43346 47243		—40 75520	
		8 73770 08322		—823
40″	0. 43357 17116 55565		—40 76343	
		8 73729 31979		—821
25° 42′ 0″	0. 43365 90845 87544		—40 77164	
		8 73688 54815		—821
20″	0. 43374 64534 42359		—40 77985	
		8 73647 76830		—822
40″	0. 43383 38182 19189		—40 78807	
		8 73606 98023		
25° 43′ 0″	0. 43392 11789 17212			

Очевидно, что в рассматриваемом случае, если пренебрегать знаками, начиная с шестнадцатого после запятой, третьи разности надо считать практически постоянными; некоторое отклонение от постоянного значения в последнем знаке вызывается в них тем, что пренебрегают шестнадцатым десятичным знаком в основном значении функции. Таким образом, четвертые разности равны 0.

Ниже будет показано, что *все табличные разности, начиная с некоторого порядка, следует считать практически равными нулю; или, точнее говоря, они меньше единицы последнего десятичного знака, имеющегося в таблице, о которой идет речь.* Это обстоятельство, как увидим в дальнейшем, лежит в основе метода интерполирования.

§ 3. Символические операторы. Формулы для вычисления разностей могут быть очень просто представлены с помощью так называемых *символических операторов*. Нами уже введен оператор Δ; рассмотрим другой оператор, который обозначим через E.

Пусть w есть интервал между последовательными значениями аргумента функции $f(a)$ и пусть E обозначает операцию увеличения аргумента на w; тогда $Ef(a)=f(a+w)$; в общем случае будем писать $E^x f(a)=f(a+xw)$, считая x целым числом. Согласно же определению, мы имеем $\Delta f(a+xw)=f(a+xw+w)-f(a+xw)$, отсюда $\Delta f(a+xw)=(E-1)f(a+xw)$. Поэтому очевидно, что операторы E и Δ связаны равенством $\Delta=E-1$ или

$$E=1+\Delta.$$

Когда символические операторы подчиняются обыкновенным правилам алгебры, они могут быть отделены от символов, представляющих функции, к которым они относятся, и могут рассматриваться независимо, как символы количества. Легко могут быть получены следующие соотношения, справедливые для оператора Δ:

$$\Delta\{f(a)+f(b)+f(c)+\ldots\}=\Delta f(a)+\Delta f(b)+\Delta f(c)+\ldots,$$

$$\Delta k f(a)=k\Delta f(a), \text{ где } k \text{ постоянный множитель}$$

$$\Delta^m\Delta^n f(a)=\Delta^{m+n}f(a), \text{ где } m, n \text{ положительные целые числа.}$$

Напишем соответствующие тождества для E

$$E\{f(a)+f(b)+f(c)+\ldots\}=Ef(a)+Ef(b)+Ef(c)+\ldots;$$

$$Ekf(a)=kEf(a),$$

$$E^mE^nf(a)=E^{m+n}f(a).$$

Таким образом, в некоторых отношениях операторы E и Δ ведут себя как алгебраические символы и могут быть соединяемы подобно им.

Следующие примеры поясняют применение этих операторов.

Пример 1. *Выразить n-ые разности табличной функции через последовательные значения функции.*

$$\Delta^n f(a)=(E-1)^n f(a)=$$

$$=\left\{E^n-nE^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}-\ldots+(-1)^n\right\}f(a),$$

или

$$\Delta^n f(a)=f(a+nw)-nf(a+nw-w)+\frac{n(n-1)}{2!}f(a+nw-2w)-\ldots+$$

$$+(-1)^n f(a)$$

Пример 2. *Выразить функцию $f(a+xw)$ через функцию $f(a)$ и последовательные разности $f(a)$, когда x положительное целое число.*

$$f(a+xw)=E^xf(a)=(1+\Delta)^xf(a),$$

откуда

$$f(a+xw)=f(a)+x\Delta f(a)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a)+\ldots+\Delta^x f(a).$$

§ 4. Разности от полиномов. Легко находим следующую таблицу разностей для функции $y=x^3$

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		0
		61		6	
5	125		30		
		91			
6	216				

Очевидно, что третьи разности этой функции строго постоянны и четвертые разности равны нулю. Это свойство есть частный случай более общего, которое мы сейчас установим.

Отметим, что таблица может быть продолжена неограниченно, если мы знаем, что третьи разности постоянны. Согласно определению, когда мы прибавляем к значению в некотором столбце разностей соответствующее значение предыдущего столбца, то полученная сумма дает следующее значение в этом предшествующем столбце. Отсюда следует, что столбец вторых разностей может быть получен из исходного значения 6 последовательным прибавлением постоянной третьей разности 6; столбец первых разностей получается из исходного значения 1 последовательным прибавлением вторых разностей 6, 12, 18,... Значения для x^3 получаются последовательным прибавлением первых разностей 1, 7, 19, 37, 61,... к исходному значению 0.

Рассмотрим случай, когда табличная функция $f(x)$ есть полином степени n

$$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Lx + M$$

Тогда

$$\Delta f(a) = f(a+w) - f(a) = \\ = A\left\{(a+w)^n - a^n\right\} + B\left\{(a+w)^{n-1} - a^{n-1}\right\} + \ldots + Lw.$$

Но

$$(a+w)^n = a^n + nwa^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}w^2a^{n-2} + \ldots + w^n,$$

поэтому

$$\Delta f(a) = A\left\{nwa^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}w^2a^{n-2} + \ldots + w^n\right\} + \\ + B\left\{(n-1)wa^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}w^2a^{n-3} + \ldots + w^{n-1}\right\} + \ldots \\ \ldots + Lw.$$

Это есть полином от a степени $(n-1)$, и поэтому первая разность значений полинома дается так же полиномом степени на единицу меньше.

Применяя последовательно этот результат, находим

2-ые	разности	представляют	полином	степени	$n-2$
3-ьи	»	»	»	»	$n-3$
n-ые	»	»	»	»	0

т. е. разности порядка n постоянны. Отсюда следует, что разности порядка $n+1$ полинома степени n равны нулю.

§ 5. Разности функции $f(x) = x^p$. Таким же путем, как образована таблица кубов (§ 4), может быть получена простым сложением таблица значений какой-либо степени натуральных чисел, если исходное значение функции и ее разностей известны. Разности, отвечающие исходному значению 0^p, которыми обыкновенно пользуются при образовании таблицы значений x^p, известны в Англии под именем разностей нуля (differences of zéro). Ими часто пользуются при вычислении разностей.

Чтобы составить искомую таблицу разностей, пользуемся результатом § 3 (пример 1).

$$\Delta^n f(a) = f(a+nw) - nf(a+nw-w) + \frac{1}{2} n(n-1) f(a+nw-2w) - \ldots$$

и пишем

$$\Delta^n x^p = (x+n)^p - n\{x+(n-1)\}^p + \frac{1}{2} n(n-1)\{x+(n-2)\}^p - \ldots$$

Подставляя в это уравнение частные значения x, p и n, получаем уравнения

$$\Delta^n 0^p = n^p - n(n-1)^p + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)^p - \ldots \pm n \cdot 1^p \mp 0^p,$$

$$\Delta^{n-1} 1^{p-1} = n^{p-1} - (n-1)^p + \frac{1}{2} (n-1)(n-2)^p - \ldots \pm 1^{p-1},$$

откуда

$$\Delta^n 0^p = n \Delta^{n-1} 1^{p-1} \tag{1}$$

Из соотношения

$$\Delta^{n-1} f(a+w) = \Delta^n f(a) + \Delta^{n-1} f(a)$$

находим, что

$$\Delta^{n-1} 1^{p-1} = \Delta^n 0^{p-1} + \Delta^{n-1} 0^{p-1};$$

ур-нию (1) можно следовательно дать вид

$$\Delta^n 0^p = n(\Delta^n 0^{p-1} + \Delta^{n-1} 0^{p-1}). \tag{2}$$

Составляем теперь таблицу значений $\Delta^n 0^p$ последовательным применением последнего уравнения, имея в виду, что

$$\Delta^0 0^1 = 0, \quad \Delta^1 0^1 = 1,$$

а также

$$\Delta^n 0^p = 0 \quad \text{для} \quad n > p.$$

p	$\Delta 0^p$	$\Delta^2 0^p$	$\Delta^3 0^p$	$\Delta^4 0^p$	$\Delta^5 0^p$	$\Delta^6 0^p$
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
5	1	30	150	240	120	
6	1	62	540	1560	1800	720
7	1	126	1306	8400	16800	15120
8	1	254	5796	40824	126000	191520
9	1	510	18150	186480	834120	1905120
10	1	1022	55980	818520	5103000	16435440

Из ур-ния (2) мы видим, что значение отдельной разности $\Delta^n 0^p$ мы получаем, беря n раз сумму двух чисел предыдущей строки, расположенных в том же столбце и в столбце непосредственно предшествующем. Например,

$$\Delta^3 0^7 = 3(62 + 540) = 1806.$$

§ 6. Разности функции $x(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)$. Среди полиномов степени p имеется полином, представляющий особый интерес в теории интерполирования, а именно

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-p+1).$$

Этот полином обозначается через $[x]^p$ и может быть назван *факториалом*. Предполагая, что интервал аргумента в таблице разностей $[x]^p$ равен 1, имеем

$$\begin{aligned}
[a]^p &= a(a-1)(a-2)\dots(a-p+1),\\
[a+1]^p &= (a+1)a(a-1)(a-2)\dots(a-p+2),\\
\Delta[a]^p &= [a+1]^p-[a]^p\\
&= a(a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-p+2)\,\{(a+1)-(a-p+1)\}\\
&= p\,[a]^{p-1};
\end{aligned}$$

таким образом

$$\Delta[x]^p = p\,[x]^{p-1}\ \text{[1]}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\Delta[x]^p}{p!}=\frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!}\quad \text{или}\quad \frac{[x+1]^p}{p!}=\frac{[x]^p}{p!}+\frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!};$$

результат этот следующим образом может быть использован для составления таблицы значений $\dfrac{[x]^p}{p!}$:

x	$\frac{[x]^2}{2!}$	$\frac{[x]^3}{3!}$	$\frac{[x]^4}{4!}$	$\frac{[x]^5}{5!}$
0				
1	0			
2	1	0		
3	3	1	0	
4	6	4	1	0
5	10	10	5	1
6	15	20	15	6
7	21	35	35	21
8	28	56	70	56
9	36	84	126	126

§ 7. Выражение полинома через факториалы. В § 4 нами было найдено выражение для $\Delta f(x)$, первой разности полинома степени n, в более сложном виде, чем сам полином. Удобнее вычислять разности, применяя факториалы и пользуясь соотношением § 6:

$$\Delta[x]^p = p[x]^{p-1}. \tag{1}$$

Пусть $\varphi_k(x)$ обозначает полином от x степени k. Мы можем написать: $\varphi_k(x)=r+(x-n+k)\varphi_{k-1}(x)$, обозначая через r остаток и через $\varphi_{k-1}(x)$ частное от деления $\varphi_k(x)$ на $(x-n+k)$, так что

[1] Это аналогично формуле диференциального исчисления $\frac{d}{dx}(x^p)=px^{p-1}$.

степень $\varphi_{k-1}(x)$ равна $(k-1)$. Последовательным применением этого преобразования мы получаем выражение полинома n-ой степени через факториалы

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= \alpha + [x]\,\varphi_{n-1}(x) \\
&= \alpha + \beta\,[x] + [x]^2\,\varphi_{n-2}(x) \\
&= \alpha + \beta\,[x] + \gamma\,[x]^2 + [x]^3\,\varphi_{n-3}(x) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \alpha + \beta\,[x] + \gamma\,[x]^2 + \ldots + [x]^n \varphi_0(x),
\end{aligned}$$

в котором α, β, $\gamma, \ldots$ постоянные и $\varphi_0(x)$ также постоянное, которое обозначаем через ν.

Таким образом мы приходим к результату

$$\varphi_n(x) = \alpha + \beta\,[x] + \gamma\,[x]^2 + \delta\,[x]^3 + \ldots + \nu\,[x]^n. \tag{2}$$

Пример. *Выразить функцию* $y = x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 30x + 9$ *и ее последовательные разности в факториалах.*

Выписывая при делении на x, $x-1$, $x-2, \ldots$ только коэфициенты [1])

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
1 & 1-12+42-30 & & & 9 \\
 & 0+\ \ 1-11+31 & & & \\
\hline
2 & 1-11+31 & & 1 & \\
 & 0+\ \ 2-18 & & & \\
\hline
3 & 1-\ \ 9 & 13 & & \\
 & 0+\ \ 3 & & & \\
\hline
 & 1 \mid -\ 6 & & &
\end{array}$$

мы получаем значение для y в виде

$$y = [x]^4 - 6\,[x]^3 + 13\,[x]^2 + [x] + 9.$$

Последовательные разности даны равенствами:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \ \ 4\,[x]^3 - 18\,[x]^2 + 26\,[x] + 1 \\
\Delta^2 y &= 12\,[x]^2 - 36\,[x] + 26 \\
\Delta^3 y &= 24\,[x] - 36 \\
\Delta^4 y &= 24
\end{aligned}$$

Пусть a одно из имеющихся в таблице значений аргумента полинома степени n и пусть w — интервал между последовательными значениями аргумента. Рассмотрим значение $f(a+xw)$ полинома, соответствующее значению $(a+xw)$ аргумента. Подставив $f(a+xw)$ вместо $\varphi_n(x)$ в уравнение (2) и применив преобразование, указанное уравнением (1) к обеим частям уравнения (2), находим

$$\Delta f(a+xw) = \beta + 2\gamma\,[x] + 3\delta\,[x]^2 + \ldots + n\nu\,[x]^{n-1}. \tag{3}$$

Составляя новую разность, мы получаем

$$\Delta^2 f(a+xw) = 2\gamma + 2\cdot 3\delta\,[x]^1 + 3\cdot 4\varepsilon[x]^2 + \ldots + n(n-1)\,\nu\,[x]^{n-2} \tag{4}$$

[1]) Chrystal, Algebra, 1, p. 108. В. И. Смирнов, т. 2, стр. 49.