

Мор Кристиан Отто

**Графический способ расчета
изгибаемых балок**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
К82

К82 **Кристиан Отто М.**
Графический способ расчета изгибаемых балок / Мор Кристиан Отто – М.:
Книга по Требованию, 2026. – 181 с.

ISBN 978-5-519-97337-3

ISBN 978-5-519-97337-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Графическій способ опредѣленія изгибающихъ моментовъ и перерѣзывающихъ вертикальныхъ силъ, дѣйствующихъ на балки (*).

Статья Мора.

1. Введеніе. Профессоръ Кульманнъ, въ своей графической статикѣ, поставилъ себѣ задачею, рѣшить доступные геометрическому изслѣдованію вопросы, изъ области инженернаго дѣла, посредствомъ новѣйшей геометріи. Интересные и приложимые къ практикѣ результаты, заключающіеся въ упомянутомъ сочиненіи, имѣли бы несравненно большее распространеніе, если бы научный приѣмъ новѣйшей геометріи, не отклонилъ многихъ инженеровъ отъ изученія этого предмета. Мы полагаемъ, что въ нѣкоторыхъ и непосредственно важнѣйшихъ для практики случаяхъ, достаточно вспомогательныхъ средствъ старой геометріи, и постараемся подтвердить это предположеніе дальнѣйшими изслѣдованіями другихъ примѣровъ. Въ нижеслѣдующемъ изслѣдованіи, мы предлагаемъ опытъ рѣшенія графическимъ путемъ теоріи упругой линіи, задачи, рѣшеніе которой до сихъ поръ еще, даже при помощи новѣйшей геометріи, было невозможно.

Кульманнъ замѣчаетъ объ этомъ слѣдующее (**): «Опредѣленіе дѣйствующихъ на неразрѣзную балку противодѣйствій опоръ на основаніи изгиба, законы котораго излагаются въ теоріи упругой линіи, совершенно ускользаетъ отъ графической статики, по крайней мѣрѣ въ предѣлахъ настоящаго ея развитія. Обыкновенно исходятъ отъ предположенія, что радіусъ кривизны изогнутой балки, въ каждомъ изъ ея поперечныхъ сѣченій, обратно пропорціоналенъ моменту дѣйствующихъ на это сѣченіе

(*) Zeitschrift des Architekten — und Ingenieur — Vereins zu Hannover, Band XIV (1868), Heft 1.

(**) K. Culmann. Die Graphische Statik, 1866, стр. 273.

внѣшнихъ силъ. Но этотъ изгибъ такъ безконечно малъ, и радіусъ кривизны такъ безконечно великъ, что какое либо построеніе ихъ дѣлается невозможнымъ, и будетъ невозможнымъ до тѣхъ поръ, пока геометрія не покажетъ намъ простой зависимости между соотвѣтствующими радіусами кривизны проэктированныхъ фигуръ, которыя лежатъ въ перспективѣ относительно безконечно удаленной точки, на вертикальной линіи, какъ центра проэкции, и относительно прямой оси неизогнутой балки, какъ слѣда; потому что въ такомъ случаѣ, мы бы могли измѣнять проэкиціонно кривизны изгиба балки до тѣхъ поръ, пока радіусъ кривизны не сдѣлался бы измѣримымъ. Но какъ въ настоящее время, этого мы сдѣлать не въ состояніи, то мы должны обратиться къ вычисленію».

Указанное здѣсь затрудненіе тотчасъ же исчезаетъ, если допустить для графическаго рѣшенія задачи такое же упрощеніе, какое допускается, обыкновенно по тѣмъ же причинамъ, и для аналитическаго ея изслѣдованія; именно, если предположить, что вмѣсто точной величины радіуса кривизны

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ въ вычисленіе вводится приближенное его выраженіе } \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Для объясненія служить слѣдующее разсужденіе:

На фиг. 1, листъ I, *ABC* изображаетъ совершенно гибкую нить, веревку, горизонтальная натянутость которой *H* и нагрузка которой состоитъ изъ произвольныхъ, непрерывно одна за другою слѣдующихъ, вертикальныхъ силъ; переменная величина этихъ вертикальныхъ силъ на погонную единицу горизонтальной оси абсциссъ пусть будетъ *k*. Начало координатъ находится въ нисней точкѣ нити, и отъ этой послѣдней отрѣзанъ конецъ *BD* (фиг. 2, л. I), между начальною точкою координатъ *B* и произвольною точкою *D*. Въ точкахъ разрѣза *B* и *D* приложены обѣ натянутости нити *H* и *S*, какъ внѣшнія силы, для удержанія въ равновѣсіи дѣйствующихъ на конецъ нити *BD* силъ. Означая горизонтальную составляющую натянутости нити *S* чрезъ *H*₁, и вертикальную составляющую ея чрезъ *V*, получаютъ, что для равновѣсія необходимы условія,

$$1) \quad H = H_1, \quad \text{и} \quad 2) \quad V = \int_0^x k \, dx;$$

кромѣ того, изъ фиг. 2 слѣдуетъ, что должно быть

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H_1} = \frac{\int_0^x k \, dx}{H}.$$

Дифференцированиемъ отсюда получать,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{kdx}{H}, \text{ или } 4) \quad H \frac{d^2y}{dx^2} = k.$$

Если допустить вышеуказанное упрощеніе выраженія для радіуса кривизны, то основное уравненіе для упругой линіи, какъ извѣстно, принимаетъ слѣдующій видъ,

$$5) \quad E \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{I},$$

гдѣ E коэффициентъ упругости матеріала, M изгибающій моментъ внѣшнихъ силъ, и I моментъ инерціи поперечнаго сѣченія балки. Изъ сравненіи обоихъ выраженій 4) и 5) слѣдуетъ, что упругая линія есть веревочная кривая, для которой горизонтальная натянутость выражается постоянною величиною E , а вертикальная нагрузка на погонную единицу горизонтальной проекціи переменною величиною $\frac{M}{I}$ (*).

Эта простая зависимость допускаетъ возможность не только геометрическаго рѣшенія всѣхъ относящихся сюда задачъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ она упрощаетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ вычисленія существеннымъ образомъ.

2. Свойства веревочнаго многоугольника. Чтобы, при слѣдующихъ приложеніяхъ, не останавливаться на вспомогательныхъ соображеніяхъ, мы дѣлаемъ здѣсь сводъ главнѣйшихъ свойствъ веревочнаго многоугольника подверженнаго дѣйствію вертикальныхъ силъ, и, для большей легкости обозначенія, продолжаемъ для нихъ нумерацію уравненій.

Веревка (фиг. 3, л. I), подверженная въ отдѣльныхъ точкахъ дѣйствію вертикальныхъ силъ $P_1, P_2, P_3 \dots$, образуетъ многоугольникъ съ слѣдующими свойствами:

6) Каждая сила, напр. P_3 , образуетъ съ натянутостями S_3 и S_4 двухъ смежныхъ сторонъ многоугольника параллелограммъ силъ, или, что тоже самое, эти три силы, перенесенныя одна къ другой по величинѣ и направленію, образуютъ треугольникъ.

7) Горизонтальныя составляющія всѣхъ натянутостей веревки $S_1, S_2, S_3 \dots$ взаимно равны (уравн. 1).

(*) Эта зависимость дѣлается болѣе наглядною, если обѣ части уравн. 5) умножить на квадраты единицы длины, напр. на 1 квадрат. метръ; въ такомъ случаѣ, $E \times 1$ квадрат. метръ будетъ дѣйствительною силою, и $\frac{M}{I} \times 1$ квадрат. метръ дѣйствительною нагрузкою на погонную единицу.

8) Составляя взаимно треугольники (сравни 6), образуемые грузами и натянутостями двух прилежащих къ нимъ сторонъ многоугольника, получить фиг. 4, которая можетъ быть употреблена, какъ вспомогательная для построения веревочнаго многоугольника. Поэтому, натянутости веревки получаются по величинѣ и направленію, если грузы $P_1, P_2, P_3 \dots$ отложить въ послѣдовательности ихъ абсциссы на вертикальной¹ линіи AA (фиг. 4) и соединить точки дѣленія съ точкою C , горизонтальное разстояніе которой отъ вертикальной линіи AA равняется горизонтальной натянутости H веревки. Положеніе точки C на вертикальной линіи BB можетъ быть взято произвольно; но если будетъ дано направленіе одной изъ натянутостей веревки, то тѣмъ опредѣлится также и положеніе точки C . Веревочный многоугольникъ образуется слѣдовательно, если провести стороны его (фиг. 3) параллельно однономернымъ направленіямъ натянутостей веревки на вспомогательной фигурѣ 4.

9) Каждая двѣ стороны многоугольника, напр. S_1 и S_6 (фиг. 3), пересѣкаютъ равнодѣйствующую R лежащихъ между ними грузовъ P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 въ одной и той же точкѣ D , потому что три силы S_1, R и S_6 взаимно уравниваются.

10) Если построить (фиг. 5 и 6, л. I) веревочный многоугольникъ изъ двухъ противодѣйствій опоръ Q_1 и Q_2 и грузовъ P_1, P_2, P_3 и P_4 , для балки свободно подпертой въ двухъ точкахъ, то обѣ крайнія стороны многоугольника S_1 и S_7 будутъ находиться на одной прямой линіи. Ибо, какъ силы Q_1, Q_2, P_1, P_2, P_3 и P_4 находятся въ равновѣсіи, и кромѣ этихъ силъ только еще натянутости S_1 и S_7 дѣйствуютъ извнѣ на веревку, то и эти двѣ силы должны также взаимно уравниваться, т. е. онѣ должны дѣйствовать по одной и той же прямой линіи, должны быть взаимно равны и взаимно противоположны.

11) Произведепіе H_y изъ горизонтальной натянутости H и вертикальной ординаты y веревочнаго многоугольника (фиг. 6 и 7, л. I), относительно прямой линіи S_1S_7 , соединяющей обѣ крайнія стороны многоугольника, равняется изгибающему моменту, дѣйствующему въ вертикальномъ сѣченіи CD изображенной на фиг. 5 балки, потому что, при обозначеніяхъ фиг. 5 и 7, этотъ изгибающій моментъ будетъ,

$$12) M = Q_1x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - P_3(x - a_3).$$

На находящейся въ равновѣсіи конецъ веревки (фиг. 7) дѣйствуютъ извнѣ вертикальныя силы Q_1, P_1, P_2, P_3 и обѣ натянутости S_1 и S_6 . Сумма моментовъ этихъ силъ, взятыхъ относительно какой либо точки, слѣдовательно также и относительно точки C , приравнивается нулю; и если натянутость веревки S_6 въ точкѣ D , разложить по горизонтальному и по вертикальному направленію, то эта моментная сумма будетъ,

$$13) 0 = H_y - Q_1x + P_1(x - a_1) + P_2(x - a_2) + P_3(x - a_3); \text{ слѣдов.,}$$

$$14) M = H_y.$$

Изъ этого выраженія слѣдуетъ, какъ это можно видѣть еще изъ формы уравн. 4), что если построить два веревочныхъ многоугольника для однихъ и тѣхъ же вертикальныхъ силъ, но при двухъ различныхъ горизонтальныхъ натянутостяхъ H_1 и H_2 , то соответственные вертикальныя ординаты этихъ двухъ многоугольниковъ, взятая для какой либо одной стороны многоугольника, относятся между собою обратно пропорціонально объемамъ натянутостямъ. Это свойство дѣлаетъ возможнымъ приложение графическаго способа къ теоріи упругой линіи. Горизонтальная натянутость E образуемой упругою линіею веревочной кривой, почти во всѣхъ случаяхъ практики такъ необыкновенно велика, сравнительно съ нагруз-

ками $\frac{M}{I}$, что ординаты кривой получались бы безконечно малыми, если бы пожелали откладывать нагрузки и натянутости по одному и тому же масштабу (сравн. фиг. 4). Но вслѣдствіе указаннаго свойства веревочнаго многоугольника и веревочной кривой, можно откладывать горизонтальныя натянутости и нагрузки въ двухъ различныхъ масштабахъ, и затѣмъ, для полученія дѣйствительныхъ величинъ ординатъ, стоитъ только, построенныя на касательной или на хордѣ вертикальныя ординаты кривой, уменьшить въ отношеніи этихъ двухъ масштабовъ. Если дѣло идетъ о томъ, чтобы взять съ чертежа величины прогибовъ, то обыкновенно всего выгодноѣе, избрать точно такое же отношеніе между масштабами горизонтальной натянутости E и нагрузокъ $\frac{M}{I}$, въ которомъ находятся абсциссы чертежа къ дѣйствительной ихъ длинѣ; т. е. если абсциссы отложены въ масштабъ 1:300, то нагрузки $\frac{M}{I}$ должны быть откладываемы по масштабу въ 300 разъ большому, нежели какъ горизонтальная натянутость E . Какъ вслѣдствіе этого, ординаты веревочнаго многоугольника, сравнительно съ абсциссами, будутъ увеличены въ 300 разъ, то на чертежѣ прогибы будутъ получаться въ натуральную величину.

15) Если построить, при одной и той же горизонтальной натянутости H , одинъ веревочный многоугольникъ (фиг. 8, л. I) для грузовъ P_1, P_2, P_3 и соответствующихъ противовѣстныхъ опоръ Q_1 и Q_2 , другой веревочный многоугольникъ (фиг. 9, л. I), при тѣхъ же прочихъ условіяхъ, но съ присовокупленіемъ четвертаго груза P_4 , и третій многоугольникъ (фиг. 10, л. I) только для одного груза P_4 , и если означить вертикальныя ординаты этихъ трехъ многоугольниковъ, относительно линіи опоръ, чрезъ y_1, y_2 и y_3 , то для каждой абсциссы будетъ,

$$y_2 = y_1 + y_3,$$

такъ какъ измѣряемый ординатою y_2 изгибающій моментъ, образуемый дѣйствіемъ четырехъ грузовъ P_1, P_2, P_3 и P_4 , равняется суммѣ обоихъ изгибающихъ моментовъ, образуемыхъ силами P_1, P_2, P_3 , и силою P_4 ,

и изображаемых чрез y_1 и y_3 . Отсюда слѣдуетъ, что увеличеніе изгиба нагруженной балки, въ произвольной ея точкѣ, отъ вновь наложеннаго груза, равняется тому прогибу, который принимается въ разсматриваемой точкѣ невѣсомая балка, при отдѣльномъ дѣйствіи этого груза.

16) Фиг. 11, л. I, изображаетъ веревку съ нагрузкою такого рода, что нагрузка на погонную единицу горизонтальной оси абсциссъ, въ каждой точкѣ, измѣняется ординатою кривой $A_1 A_2 A_3 A_4$. Площадь $A_1 A_2 A_3 A_4$, которая можетъ быть названа грузовой площадью, разбивается ординатами $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, на произвольныя части, и къ центрамъ тяжести этихъ участковъ пусть приложены вертикальныя силы P_1 , P_2 , P_3 , величины которыхъ пропорціональны квадратному содержанію соответственныхъ площадей. Если построить изъ горизонтальной натянутости H и этихъ сосредоточенныхъ силъ веревочный многоугольникъ $a_1 a_2 a_3 a_4$ (фиг. 12, л. I), то этотъ многоугольникъ будетъ касателемъ къ веревочной кривой, соответствующей изображенной на фиг. 11 нагрузкѣ, на вертикаляхъ точекъ дѣленія A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , такъ какъ для этихъ точекъ взаимно совпадаютъ для веревочнаго многоугольника и веревочной кривой, какъ моментныя уравненія, такъ также и вертикальныя составляющія натянутостей. Поэтому, соответственнымъ дѣленіемъ грузовой площади, можно построить произвольное число точекъ веревочной кривой. Означая чрезъ Q_1 и Q_2 давленія грузовой площади на обѣ опоры A_1 и A_4 , и раздѣляя эту площадь ординатою CD такъ, чтобы

$$A_1 CD = Q_1 \text{ и } A_4 CD = Q_2,$$

то наибольшая ордината cd веревочной кривой будетъ находиться на вертикали ординаты CD , потому что веревочная кривая въ точкѣ d имѣетъ направленіе, параллельное линіи $a_1 a_4$, соединяющей обѣ опоры.

17) Чтобы построить упругую линію для балки съ переменнымъ поперечнымъ сѣченіемъ, можно изобразить графически величину $\frac{M}{I}$, эту грузовую площадь разбить ординатами, части площади замѣнить сосредоточенными силами, и изъ этихъ послѣднихъ и постоянной натянутости E построить веревочный многоугольникъ. Въ большей части случаевъ однако, проще достигаютъ цѣли, если на вспомогательной фигурѣ, опредѣляющей взаимное наклоненіе сторонъ многоугольника, откладывать переменную величину EI , какъ горизонтальную натянутость, и разсматривать графическое изображеніе M , какъ грузовую площадь веревочной кривой. Что такой способъ приводитъ къ одному и тому же результату, то это слѣдуетъ непосредственно изъ уравн. 5), которому можетъ быть придана также слѣдующая форма,

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M,$$

и въ которой, сравнительно съ выраженіемъ 4), величина EI дѣлается горизонтальною натянутостью. Это еще нагляднѣе объяснится въ разсмотрѣніи ниже 3-мъ примѣрѣ (№ 3).

18) Веревоочный многоугольникъ можетъ служить, для опредѣленія графическимъ путемъ величины алгебраическаго выраженія, имѣющаго форму моментной суммы,

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \dots$$

Именно, если построить веревочный многоугольникъ изъ вертикальныхъ силъ $A_1, A_2, A_3 \dots$, приложенныхъ къ веревкѣ на абсциссахъ $a_1, a_2, a_3 \dots$, то отрѣзокъ y оси ординатъ, отсѣкаемый послѣднею стороною многоугольника, будетъ мѣрою упомянутой суммы; потому что моментное уравненіе веревочнаго многоугольника фиг. 13, л. I, относительно начальной точки O координатъ, будетъ,

$$Hy = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3.$$

Чтобы удобнѣе было строить произведеніе Hy , слѣдуетъ въ такихъ случаяхъ принимать для величины H очевидно цѣлое число.

19) Проводя чрезъ три смежныя стороны многоугольника (фиг. 14, л. I) прямую линію AB такъ, чтобы $AC = BD$, получать отношеніе,

$$\begin{aligned} 20) \quad & \frac{-P_1}{+P_2} = \frac{AE}{EB}, \text{ потому что по (18),} \\ & -P_1 a = AF \times H, \quad +P_2 a = BG \times H; \text{ слѣдов.,} \\ & \frac{-P_1}{+P_2} = \frac{AF}{BG} = \frac{AE}{EB} \end{aligned}$$

3. Численное и графическое опредѣленіе прогиба нагруженныхъ балокъ. При изслѣдованіи изгиба, обыкновенно требуется найти только абсциссу и ординату наибольшаго прогиба между двумя опорными точками, такъ какъ дальнѣйшая форма кривой изгиба, для цѣли задачи, не имѣетъ значенія. Предположенная задача будетъ рѣшена, если (сравн. 16) опредѣлить ординату, раздѣляющую грузовую площадь упругой линіи на двѣ, равныя противодѣйствіямъ опоръ, части. Эта ордината пересѣчетъ упругую линію въ точкѣ съ наибольшимъ прогибомъ, касательная къ которой слѣдовательно направлена параллельно линіи, соединяющей обѣ опорныя точки. Если затѣмъ выразить равновѣсіе для части упругой линіи, слѣва или справа этой точки, моментнымъ уравненіемъ, взятымъ относительно опорной точки, то въ этомъ уравненіи искомый прогибъ будетъ единственною неизвѣстною. Однако же, вслѣдствіе неправильной формы грузовой площади, вышеизложенное опредѣленіе абсциссы наибольшаго прогиба слишкомъ затруднительно, и потому удобнѣе воспользоваться, указаннымъ въ 17) графическимъ способомъ.

1-й примѣръ. Прогибъ балки постояннаго поперечнаго сѣченія, нагруженной равномерно грузомъ p на погонную единицу, и подпертой свободно на ея концахъ. Описанная значеніемъ $\frac{M}{I}$ грузовая площадь изображается параболою ABC (фиг. 15, л. I), ордината вершины которой, соответствующая срединѣ балки, будетъ,

$$BD = \frac{pl^2}{8I}$$

Влѣдствіе симметрической формы грузовой площади относительно ея середины, этой послѣдней точкѣ будетъ соответствовать наибольшій прогибъ. На одну изъ половинъ FJ (фиг. 16, л. I) упругой линіи дѣйствуютъ поэтому слѣдующія три силы:

- 1) въ точкѣ J , горизонтально направленная натянутость E , равная коэффициенту упругости,
- 2) въ опорной точкѣ F , продольная натянутость S , и
- 3) нагрузка равная площади

$$ABD = \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{pl^2}{8I} = \frac{pl^3}{24I}$$

Горизонтальное разстояніе центра тяжести K этой площади отъ опоры F равняется $\frac{5}{16}l$; и потому моментное уравненіе, относительно точки E , будетъ,

$$0 = Ef - \frac{pl^3}{24I} \times \frac{5}{16}l, \text{ или } f = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI}$$

2-й примѣръ. Прогибъ балки постояннаго поперечнаго сѣченія, подпертой свободно на ея концахъ, и нагруженной въ разстояніи a отъ ея середины сосредоточеннымъ грузомъ Q . Грузовая площадь въ этомъ случаѣ образуетъ треугольникъ ABC (фиг. 17, л. I), высота котораго въ нагруженной точкѣ D будетъ,

$$BD = \frac{Q(l^2 - 4a^2)}{4lI}$$

Давленіе грузовой площади на опорную точку A опредѣляется изъ моментнаго уравненія, относительно точки C ,

$$Vl = \frac{Q(l^2 - 4a^2)}{4lI} \times \frac{l}{2} \times \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3}\right), \text{ и}$$

$$V = \frac{Q(l^2 - 4a^2)(3l - 2a)}{48lI}$$

Грузовая площадь между опорою A и ординатою FG , взятою въ разстояніи $AG = b$, будетъ,

$$AFG = \frac{b}{2} \times \frac{Q(l^2 - 4a^2)}{4lI} \times \frac{b}{\frac{1}{2}l + a} = \frac{Q(l - 2a)b^2}{4lI}.$$

Эта площадь приравнивается предыдущей величинѣ V , когда

$$b = \sqrt{\frac{(l + 2a)(3l - 2a)}{12}}$$

Поэтому, моментное уравненіе для части MJ (фиг. 18, л. I) упругой линіи, относительно точки M , будетъ,

$$0 = Ef - \frac{Q(l - 2a)b^2}{4lI} \times \frac{2}{3}b;$$

или, если подставить послѣднюю величину b ,

$$f = \frac{Q(l - 2a)}{144lEI} \sqrt{\frac{(l + 2a)^3(3l - 2a)^3}{3}}.$$

Для балки, нагруженной на срединѣ ея длины,

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}l \quad \text{и} \quad f = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

3-й примѣръ. Построеніе кривой изгиба для одного изъ отверстій неразрѣзной мостовой балки съ переменнымъ поперечнымъ сѣченіемъ. На фиг. 19, л. I, изображены, предположенные извѣстными, изгибающіе моменты, въ масштабѣ,

для абсциссъ, 1 миллиметр. = 0,4 метр.

для ординатъ, 1 миллиметр. = 25 тонометр.

Линія JJ изображаетъ моменты инерціи. Описанная ординатою M грузовая площадь разбита ординатами на девять частей такъ, что моментъ инерціи и знакъ M на протяженіи каждой изъ частей не измѣняются. Участки площади 4, 5, 6, имѣютъ положительные, а прочіе 1, 2, 3, 7, 8, 9 отрицательные знаки. Показанные центры тяжести этихъ участковъ были опредѣлены, преобразовывая на глазъ эти площади въ треугольники и трапеціи съ одинаковымъ приближенно положеніемъ центра тяжести. Вычисленныя квадратныя содержанія этихъ площадей дали величины приложенныхъ къ центрамъ тяжести ихъ сосредоточенныхъ силъ (сравн. 16 и 17). Эти послѣднія отложены на вспомогательной фиг. 20, л. I, на вертикали EF , въ послѣдовательности ихъ нумеровъ, положительные — по направленію сверху внизъ, а отрицательныя — по направленію противоположному. Направленіе продольной натянутости S_1 взято произвольно. Натянутость S_2 пересѣкаетъ S_1 въ точкѣ N_1 , абсцисса которой, относительно точки F , принимаемой за начальную, равняется EL_1 ;

точно также, абсцисса точки пересѣченія N_2 натянутостей S_2 и S_3 равняется EI_2 , и т. д. Такимъ образомъ опредѣлены направленія натянутостей веревки, параллельно которымъ проведены однопумерныя стороны веревочнаго многоугольника (фиг. 22, л. I). Этотъ многоугольникъ касателенъ къ упругой линіи на ординатахъ между дѣленіями 1, 2, 3... грузовой площади (сравн. 16). Какъ направленіе натянутости S_1 взято произвольно, то обѣ точки C и D , въ которыхъ веревочный многоугольникъ пересѣкаетъ ординаты опоръ, не лежатъ на одной и той же горизонталіи. Это обстоятельство однако (сравн. 11) не имѣетъ никакого вліянія на величины ординатъ многоугольника, относительно линіи CD . Но если желательно построить упругую линію для горизонтальнаго положенія опоръ, то должно сдвинуть чертежъ такимъ образомъ, чтобы ординаты многоугольника, относительно линіи опоры, имѣли такую же самую величину, какъ и на фиг. 22.

На фиг. 20, изображены величины грузовыхъ площадей въ масштабѣ 1 миллиметр. = 200 квадр. метротон. и величины EI въ масштабѣ 1 миллиметр. = 80000 квадр. метротон., слѣдовательно въ отношеніи 1:400 меньше, нежели нагрузки. Какъ масштабъ абсциссъ = 1:400, то ординаты многоугольника на фиг. 22 изображаются въ натуральную величину.

На фиг. 21, изъ точки L , горизонтальное разстояніе которой отъ GK равняется E , проведены линіи параллельныя направленіямъ натянутостей на фиг. 20. Сравнивая отрѣзки $E_1, F_2, F_3 \dots$ этихъ линій на вертикали GK съ длиною $P_1, P_2, P_3 \dots$ на фиг. 20, изъ подобія соответственныхъ треугольниковъ, получать,

$$F_1 = \frac{P_1 E}{EI_1} = \frac{P_1}{I_1}, \quad F_2 = \frac{P_2}{I_2}, \quad F_3 = \frac{P_3}{I_3}, \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, если вычертить сперва выражаемую значеніемъ $\frac{M}{I}$ грузовую площадь, и на основаніи ея, при постоянной горизонтальной натянутости E , построить веревочный многоугольникъ, то получаютъ совершенно точно, изображенный на фиг. 22 результатъ. Построеніе, при помощи фиг. 20, однако очевидно проще.

4. Выводъ общаго уравненія для расчета неразрѣзныхъ балокъ постояннаго поперечнаго сѣченія. Пусть,

Опорныя точки и отверстія, въ порядкѣ послѣдовательности ихъ отъ лѣвой руки къ правой, нумеруются цифрами 1, 2, 3...; и соответственно будутъ,