Б.В. Шабат

# Функции комплексного переменного и некоторые их приложения

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б11

**Б.В. Шабат**
Б11 Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б.В. Шабат – М.: Книга по Требованию, 2021. – 388 с.

**ISBN 978-5-458-29403-4**

В книге даётся изложение основ теории аналитических функций. Эта теория находит широкое применение при разработке различных задач техники.Книга рассчитана на студентов высших технических учебных заведений, а также на инженеров и научных работников, ведущих исследования в области приложения математики к физике и механики.

**ISBN 978-5-458-29403-4**

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая книга предназначается для студентов и аспирантов высших технических учебных заведений, а также для инженеров, желающих повысить свою научно-теоретическую квалификацию.

Назначение книги обусловило и характер изложения. Отказавшись от ряда доказательств, авторы вместе с тем сочли нецелесообразным превращать книгу в справочник. Поэтому в ней большое внимание уделено основным понятиям теории функций комплексного переменного. В тех случаях, когда опускалось доказательство той или иной теоремы, авторы стремились пояснить примерами значение ее предположений и утверждений.

Большое значение авторы придают также развитию навыков конкретного применения излагаемых в книге методов. Поэтому в текст включено много примеров, а в конце каждой главы приведены задачи. Задачи снабжены ответами и некоторые из них — указаниями. Авторы подчеркивают, что самостоятельное решение этих задач *) совершенно необходимо для действительного овладения методами теории функций.

Для читателей, не имеющих возможности изучить книгу полностью, авторы указывают следующие три варианта ее частичного изучения:

1-й вариант (дает введение в элементарную теорию функций) включает введение, I главу (без п. 9), II лаву (без

*) Кроме тех, которые отмечены звездочкой и носят факультативный характер.

п. 17), из III главы пп. 24—25 и 29—31, из V главы пп. 46—53, из VI главы пп. 58—61, 64—67, 69 и отдельные примеры из IV и VII глав — по желанию.

2-й вариант (для лиц, заинтересованных только в аналитической теории, например желающих в дальнейшем изучать операционное исчисление). Здесь можно опустить пп. 18—23 главы II, из главы III взять лишь определения элементарных функций (начало пп. 29—31), из главы IV взять пп. 34—37, в главе V опустить пп. 55—57, в главе VI — п. 70; глава VII должна быть изучена полностью, главу VIII можно опустить.

3-й вариант (для лиц, интересующихся только конформными отображениями и их применением). Здесь можно опустить пп. 54—57 главы V, пп. 66—68 главы VI и полностью главу VII.

Остановимся на некоторых особенностях нашего изложения *).

Введение к книге посвящено обзору действий над комплексными числами. Авторы отказываются от способа изложения теории комплексных чисел, принятого в средней школе, ибо этот способ порождает у учащегося взгляд на комплексные числа, как на некие мнимые, не существующие реально объекты. В книге комплексные числа определяются как векторы, или точки плоскости, над которыми производятся некоторые операции. Авторы сознают несовершенство этого способа определения комплексных чисел. Однако они находят его наиболее отвечающим назначению книги, ибо введение комплексных чисел как элементов абстрактного алгебраического поля с определенными свойствами потребовало бы от читателя чрезмерных и излишних усилий.

Глава I посвящена изложению основных понятий анализа функций комплексного переменного. Стремясь создать у чи-

*) В первую очередь мы адресуемся здесь к преподавателям, которые пожелают рекомендовать эту книгу своим ученикам.

тателей конкретные представления, авторы одновременно с понятием функции рассматривают соответствующее ей отображение. Другие понятия также сразу трактуются геометрически. При изложении подчеркивается равноправность конечных и бесконечно удаленной точек сферы комплексного переменного.

Понятию конформного отображения ввиду его особой важности посвящается отдельная (вторая) глава. Здесь после основных определений и теорем подробно изучаются дробно-линейные отображения.

Знакомство со свойствами этих отображений должно подготовить читателя к чтению последнего пункта главы, в котором излагаются общие принципы теории конформных отображений.

В главе III рассмотрены важнейшие элементарные функции. Авторы стремились здесь пояснить геометрически процесс выделения регулярных (однозначных) ветвей многозначных функций. Изложение ведется для конкретных функций — общее понятие многозначной аналитической функции и ее регулярных (однозначных) ветвей приводится лишь в главе VI. Другая важная цель главы (и упражнений, следующих за ней) — создать у читателя навыки в подборе элементарных функций, осуществляющих конформные отображения заданных областей.

Глава IV посвящена комплексному потенциалу плоского векторного поля и приложениям к такому полю простейших методов теории функций комплексного переменного. До главы IV задачи прикладного характера почти не встречаются в изложении. Авторы находят целесообразным до их рассмотрения сообщить читателю некоторый запас теоретических сведений. Кроме того, объединение начальных сведений о комплексном потенциале в одно целое облегчит читателю применение методов теории функций к техническим вопросам. После этой главы рассмотрение прикладных задач обычно следует за изложением математических методов в качестве иллюстрации.

В главах V и VI излагается основной аппарат теории регулярных функций: в главе V строится интегральное исчисление, а в главе VI рассматриваются разложения в ряды. В главе VI вводится общее понятие аналитической функции, основанное на рассмотрении всех возможных аналитических продолжений исходной регулярной функции.

Главы VII и VIII посвящены приложениям теории: глава VII — аналитическим, а VIII — геометрическим. В главе VII используется в основном теория вычетов. Здесь разбирается большое число примеров, иллюстрирующих общие методы вычисления интегралов. Авторы считают нецелесообразным приводить леммы, на которых основывается вычисление отдельных типов интегралов (как это делается в некоторых курсах), и рекомендуют каждый раз применять общие методы. В главу VII включено также несколько примеров представления функций контурными интегралами, которые должны облегчить читателю переход к изучению операционного исчисления.

*Б. А. Фукс, Б. В. Шабат*

## К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Это издание несущественно отличается от предыдущих. Некоторым изменениям подверглось лишь Введение, и исправлены замеченные мелкие погрешности и опечатки.

Сентябрь 1963 г.

*Авторы*

# ВВЕДЕНИЕ

**1. Комплексные числа.** С понятием комплексного числа читатель знаком еще из курса элементарной алгебры. В элементарных курсах к комплексным числам обычно приходят, рассматривая уравнение $x^2+1=0$. Прежде всего обнаруживается, что не существует действительных чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Тогда вводится новое, «мнимое», число $i=\sqrt{-1}$, и рассматриваемое уравнение оказывается разрешимым, а его корни — равными $+i$ и $-i$.

Затем вводятся «комплексные» числа $x+iy$ как суммы действительных чисел $x$ и «мнимых» чисел $iy$. Правила действий с этими новыми числами выражают возможность производить с ними операции как с действительными числами, заменяя в окончательных результатах $i^2$ на $-1$. После введения новых чисел оказываются разрешимыми все квадратные уравнения

$$x^2+px+q=0$$

и, вообще, все уравнения

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=0$$

с произвольными коэффициентами.

Описанный способ введения комплексных чисел неудовлетворителен, ибо он порождает взгляд на комплексные числа, как на объекты, не существующие реально, в буквальном смысле слова «мнимые».

Мы пойдем поэтому по иному пути.

Рассмотрим систему свободных векторов, лежащих в некоторой плоскости. Напомним, что *свободными* называются векторы, для которых введено следующее понятие равенства: два вектора считаются *равными*, если их можно совместить друг с другом путем параллельного переноса. В следующих пунктах (пп. 2, 3 и 4) мы введем некоторые операции над векторами нашей системы. Эти операции делятся на две группы.

Первая группа содержит сложение, вычитание и умножение на действительные числа (скаляры) — операции, которые производятся так же, как в обычной векторной алгебре (см. п. 2). Операции второй группы, напротив, существенно отличают алгебру рассматриваемых здесь векторов от обычной. В обычной векторной алгебре вводятся два различных умножения — скалярное и векторное, но ни одно из них не удовлетворяет полностью законам умножения действительных чисел. Например, ни одна из этих операций не допускает обращения: не существует ни скалярного, ни векторного деления. В следующих пунктах читатель увидит, однако, что для плоской системы векторов удается ввести операции умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня (п. 3) с сохранением всех основных законов арифметики действительных чисел. Эти операции и другие, определяемые в п. 4, составляют вторую группу, о которой говорилось выше. Сказанное дает нам повод рассматривать плоскую систему векторов с описанными двумя группами операций как систему нового рода чисел, которые мы и будем называть комплексными числами.

Таким образом, под *совокупностью комплексных чисел мы будем понимать плоскую систему свободных векторов, над которыми производятся операции по правилам, указанным в пп. 2, 3 и 4.*

Изложенный способ введения комплексных чисел свободен от тех недостатков, о которых говорилось в начале пункта. В его пользу говорит также то обстоятельство, что векторные величины весьма часто рассматриваются в различных прикладных задачах. Читатель увидит (в п. 9, а также в главе IV и других местах книги), что операции над комплексными числами, вводимые здесь, находят в этих задачах свое применение.

Плоскость, в которой лежат рассматриваемые векторы, мы будем называть *плоскостью комплексных чисел*. Выберем в этой плоскости некоторую точку $O$ и, пользуясь тем, что наши векторы свободны, поместим начальные точки всех векторов в эту точку. Тогда любой вектор (комплексное число) $z$ однозначно определится положением точки $P$ — его конца. Наоборот, любая точка $P$ плоскости однозначно определится некоторым вектором (комплексным числом) $z = \overline{OP}$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости*).

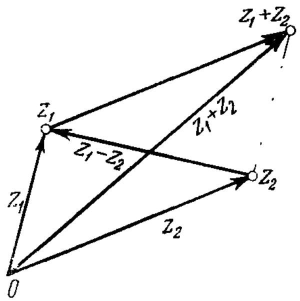


Рис. 1.

Это дает нам основание наряду с представлением о комплексном числе как о векторе иметь представление о нем как *о точке плоскости*. В дальнейшем мы будем употреблять выражение «точка $z$» не менее часто, чем выражение «вектор $z$».

**2. Простейшие операции.** Определение. Под *суммой* и *разностью* двух комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ мы будем понимать диагонали параллелограмма, построенного на $z_1$ и $z_2$ как на векторах (рис. 1).

Иначе, сумма $z_1 + z_2$ равна замыкающей двузвенной ломаной, составленной из векторов $z_1$ и $z_2$, а разность равна вектору, идущему из точки $z_2$ в точку $z_1$ (рис. 1). Понятие суммы очевидным образом распространяется на любое число слагаемых.

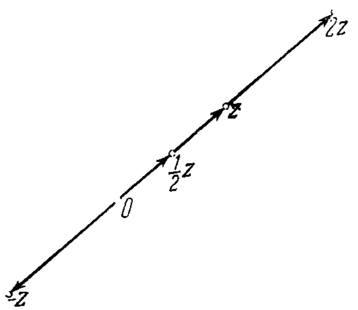


Рис. 2.

Определение. Под *произведением* комплексного числа $z$ на действительное число $k$ мы будем понимать вектор (комплексное число) $kz$, длина которого равна длине $z$, умноженной на $|k|$, а направление совпадает с направлением $z$, если $k > 0$, и противоположно последнему, если $k < 0$ (см. рис. 2, где изображены числа $z$, $2z$, $\frac{1}{2} z$ и $-z$).

*) При этом сама точка $O$ соответствует нулевому вектору (комплексному числу 0).

В любом учебнике векторной алгебры доказывается, что введенные здесь операции обладают обычными арифметическими свойствами.

Введем на плоскости комплексных чисел систему прямоугольных декартовых координат $xOy$ так, чтобы ее начало совпало с точкой $O$ (см. п. 1), и обозначим через 1 и $i$ орты координатных осей $Ox$ и $Oy$. Тогда, пользуясь нашими определениями и идя обычным для векторной алгебры путем, мы сможем представить произвольный вектор (комплексное число) $z$ с проекциями $x$ и $y$ в виде *)

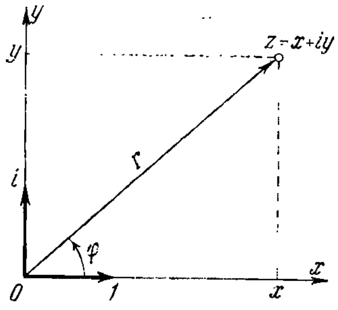


Рис. 3.

$$z = x\cdot 1 + y\cdot i = x + iy \qquad (1)$$

(рис. 3). Выражение (1) мы будем далее называть *декартовой формой* комплексного числа $z$. Орты 1 и $i$ называются *действительной и мнимой единицами* и в соответствии с этим оси $Ox$ и $Oy$ — *действительной* и *мнимой осями*. Проекции $x$ и $y$ называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $z$ и обозначаются символами

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z. \qquad (2)$$

Если конец вектора $z$ (с началом в 0) лежит на действительной оси, то мы будем считать, что комплексное число $z = x + 0i$ совпадает с действительным числом $x$, определяющим положение конца вектора $z$. Таким образом, совокупность комплексных чисел включает и все действительные числа. Если конец $z$ лежит на мнимой оси, то комплексное число $z = 0 + yi = yi$ мы будем называть *мнимым*.

Под *равенством* комплексных чисел понимается равенство соответствующих векторов (см. п. 1). Легко записать условие равенства в координатах: два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ тогда и только тогда равны

*) Как показывает (1), обозначение орта оси $Ox$ опускается.