П. С. Александров

Очерк основных понятий топологии

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П. С. Александров
П11 Очерк основных понятий топологии / П. С. Александров – М.: Книга по Требованию, 2018. – 98 с.

ISBN 978-5-458-27269-8

Настоящее издание представляет собой значительно расширенный перевод книги проф. П.С. Александрова "Простейшие основные понятия топологии", вышедший в 1932 г. на немецком языке. Кроме некоторых изменений и дополнений к тексту немецкого издания заново написана проф. В.А. Ефремовичем глава о замкнутых поверхностях. Книги снабжена предисловием известного немецкого математика Д. Гильберта.На русском языке это первая книга, содержащая систематическое изложение основных топологических фактов. Главным образом она посвящена комбинаторной топологии и охватывает следующие вопросы: полиедры, многообразия, топологические пространства, алгебраические комплексы, симплициальные отображения и теоремы инвариантности, а также теорию замкнутых поверхностей.

ISBN 978-5-458-27269-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

АННОТАЦИЯ

Настоящее издание представляет собой значительно расширенный перевод книги проф. МГУ П. С. Александрова «Простейшие основные понятия топологии», вышедшей в 1932 г. на немецком языке. Кроме некоторых изменений и дополнений к тексту немецкого издания заново написана проф. В. А. Ефремовичем глава о замкнутых поверхностях. Книга снабжена предисловием известного немецкого математика Д. Гильберта.

На русском языке это первая книга, содержащая систематическое изложение основных топологических фактов. Главным образом она посвящена комбинаторной топологии и охватывает следующие вопросы: полиедры, многообразия, топологические пространства, алгебраические комплексы, симплициальные отображения и теоремы инвариантности, а также теорию замкнутых поверхностей.

Книга написана сжато, и хотя не предполагает у читателя никаких предварительных сведений по топологии, тем не менее требует от него довольно высокой математической культуры, а также знания элементов теории групп. Таким образом читателями ее будут студенты старших курсов математических отделений университетов, аспиранты и научные работники-математики.

ПРЕДИСЛОВИЕ Д. ГИЛЬБЕРТА К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Немногие ветви геометрии развивались в последнее время так быстро и плодотворно, как топология; редко случается, чтобы незаметный вначале отдел какой-нибудь науки приобрел такое основное значение для большого ряда совершенно различных областей знания, как топология. В самом деле, сегодня топологические методы и топологические вопросы находят применение почти во всех отделах анализа и его широко разветвленных приложений.

Такая широта применения, естественно, требует доведения понятий до той степени остроты, которая позволила бы познать общее ядро внешне различных вопросов. Неудивительно, что такой анализ основных геометрических понятий должен далеко уводить от их непосредственной наглядности, тем более, что как приложения к другим областям, так и приложения к геометрии окружающего нас пространства делают необходимым выход в произвольно большое число измерений.

В моей «Наглядной геометрии» я старался обращаться к непосредственному пространственному представлению; здесь же будет показано, как многие из употреблявшихся там понятий могут быть расширены и обострены, и этим сделаны основой новой замкнутой в себе теории очень обобщенного понятия пространства. И все же живая интуиция и во всех этих теориях всегда сохраняет свою направляющую силу; это является блестящим примером гармонии между интуицией и мышлением.

Таким образом настоящую книжку нужно приветствовать как отрадное дополнение в отношении топологической систематики к моей «Наглядной геометрии». Пусть она завоюет геометрической науке новых друзей.

Геттинген, Июнь 1932 г. *Давид Гильберт*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая книжка представляет собой почти вдвое расширенный перевод немецкой книжки П. С. Александрова «Einfachste Grundbegriffe der Topologie» (Berlin, Springer, 1932). К краткому изложению основных начал так называемой гомологической теории полиедров (с включением теорем инвариантности для размерности и чисел Betti), составлявшему в основном содержание названной немецкой книжки, прибавилось изложение теории замкнутых поверхностей, заново написанное В. А. Ефремовичем, доказательство теоремы Euler'a-Poincaré для многомерного случая, теорема о существовании неподвижных точек при непрерывных отображениях n-мерного элемента и др. Теоретико-множественная топология представлена понятием топологического пространства, понятием размерности и простейшими теоремами, касающимися этого понятия.

Более глубокое знакомство с топологией читатель может получить из книг H. Seifert und W. Threlfall «Lehrbuch der Topologie» (Leipzig, Teubner, 1934)[1] и P. Alexandroff und Hopf «Topologie» (первый том выходит в ближайшее время в издательстве Springer'a).

Клязьма, 15 октября 1934 г.

П. Александров
В. Ефремович

---

[1]) Русский перевод готовится к печати.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Топология есть *геометрия непрерывности*, она изучает свойства геометрических фигур, которые сохраняются при всех взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображениях, — и, кроме того, свойства самих непрерывных отображений.

Под геометрической фигурой мы при этом будем понимать (по крайней мере на первых порах) всякое множество, лежащее в n-мерном евклидовом пространстве [1]).

2. Предположим, что каждой точке a множества A при помощи какого-либо закона поставлена в соответствие вполне определенная точка $b=f(a)$ множества B. В таком случае мы говорим, что дано *отображение* f *множества* A *во множество* B. Множество всех точек $f(a)$ при a, пробегающем все множество A, называется *образом* множества A при отображении f и обозначается через $f(A)$.

Если $B=f(A)$, т. е. если для *каждой* точки b во множестве B найдется по крайней мере одна точка a множества A такая, что $f(a)=b$, то отображение f является отображением множества A *на* множество B. Таким образом отображение A *на* B является частным случаем отображений A *в* B.

Отображение f множества A (расположенного в n-мерном евклидовом пространстве R^n) во множество B (расположенное в m-мерном евклидовом пространстве R^m) называется *непрерывным* в точке a_0, если выполнено следующее условие: для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что каж-

---

1) Основные определения теории точечных множеств в n-мерном пространстве читатель может найти в книжке *Бэр*, «Теория разрывных функций», глава V. Множества на прямой достаточно подробно разобраны в книжке *Александров* и *Колмогоров*, «Введение в теорию функций действительного переменного».

Полное изложение теории множеств в ее современном состоянии содержится в классической книге Hausdorff'a «Mengenlehre», которая скоро выйдет в русском переводе.

дая точка a, отстоящая от точки a_0 на расстояние [1]) меньшее, чем δ, отображается в точку b, отстоящую от точки $f(a_0)=b_0$ на расстояние меньшее, чем ε, другими словами, для всякого a, удовлетворяющего условию $\rho(a_0, a)<\delta$, имеем $\rho(f(a_0), f(a))<\varepsilon$.

Если отображение f непрерывно во всякой точке множества A, то оно называется просто непрерывным отображением множества A.

Пусть дано отображение f множества A во множество B. Совокупность *всех* точек множества A, отображающихся в данную точку b множества B, называется *прообразом точки* b при отображении f и обозначается через $f^{-1}(b)$. Если множество $f^{-1}(b)$ не является пустым ни для какой точки b, то f, очевидно, отображает A *на* B. Если $f^{-1}(b)$ для всякой точки множества B состоит из *одной* точки, то отображение f *взаимно* однозначно: тогда не только каждой точке a множества A соответствует одна единственная точка $b=f(a)$, но и обратно, каждой точке b множества B соответствует одна единственная точка $a=f^{-1}(b)$, так что наряду с отображением f множества A на множество B мы имеем отображение f^{-1} множества B на множество A. Если и f и f^{-1} непрерывны, то взаимно однозначное отображение f (множества A на множество B), а также и взаимно однозначное отображение f^{-1} (множества B на множество A) называются *топологическими* отображениями.

Два множества A и B, которые можно топологически отобразить одно на другое, называются *гомеоморфными* (или топологически эквивалентными).

Топологические свойства множества — это те его свойства, которые *сохраняются* при топологических отображениях; другими словами, топологические свойства множества A — это такие свойства этого множества, которые принадлежат не только множеству A, но и всякому гомеоморфному ему множеству B.

3. *Примеры*. 1) Пусть имеем *непрерывную функцию* $y=f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$ оси абсцисс. Пусть α — минимальное, β — максимальное значение функции $f(x)$. Тогда функция $f(x)$ осуществляет непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ оси абсцисс на отрезок $[\alpha, \beta]$ оси ординат. Это отображение может быть взаимно однозначным, например, если $f(x)=kx+m$; оно может и не быть взаимно однозначным, например, если $a=-1$, $b=+1$ и $f(x)=x^2$.

---

[1]) Если $a=(x_1, \ldots, x_n)$ и $a'=(x'_1, \ldots, x'_n)$ суть две точки n-мерного евклидова пространства R^n, то за расстояние их принимается положительное число $\rho=\rho(a, a')=+\sqrt{(x_1-x'_1)^2+\ldots+(x_n-x'_n)^2}$. С аналитической геометрией n-мерного пространства читатель может познакомиться по книге *Шрайер* и *Шпернер*, «Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении», ч. I.

2) *Непрерывная функция* $z=f(x, y)$ двух переменных, определенная в некоторой плоской замкнутой области, отображает эту область на отрезок оси z. Например, функция $z=x^2+y^2$, $0 \leqslant x^2+$ $+y^2 \leqslant 1$ отображает круг радиуса единицы в плоскости xy на отрезок $[0,1]$ оси z.

3) Ортогональным проектированием (на ось x) можно окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ непрерывно отобразить на отрезок $[0,2]$ оси абсцисс.

4) Центральным проектированием из какой-нибудь внутренней точки треугольника можно контур этого треугольника топологически отобразить на окружность описанного круга. Таким образом окружность гомеоморфна контуру треугольника (и любого выпуклого многоугольника).

5) Пусть o — какая-нибудь точка внутри треугольника, вписанного в круг. На каждом луче, выходящем из o, отметим две точки: p — пересечение его с окружностью и q — пересечение его с контуром треугольника. Отобразим отрезок op пропорционально на oq (т. е. заставим точке a отрезка op соответствовать точку b отрезка oq, удовлетворяющую условию $ob:oq=oa:op$).

Если мы сделаем это для *любого* радиуса, то получим топологическое отображение f круга на треугольник. При этом вершины треугольника, а также точка o, будут *неподвижными* точками этого отображения; для них будем иметь $f(a)=a$.

Итак, треугольник гомеоморфен кругу, его граница (контур) гомеоморфна окружности.

Таким же точно образом можно доказать, что все выпуклые многоугольники гомеоморфны кругу и, следовательно, гомеоморфны между собою.

Совершенно аналогично доказывается, что все выпуклые тела трехмерного (вообще n-мерного) пространства гомеоморфны шару (соответствующего числа измерений) и, следовательно, гомеоморфны между собою.

4. Основным топологическим понятием теории множеств является понятие предельной точки множества. Точка a называется *предельной точкой* множества M [1]) (расположенного в n-мерном пространстве), если сколь угодно близко от точки a (т. е. на расстоянии меньшем, чем произвольно заданное $\varepsilon>0$) имеется бесконечно много точек множества M. Мы предоставляем читателю самому доказать основную теорему Weierstrass'a для n-мерного простран-

---

[1]) Точка a при этом может и не принадлежать множеству M.

ства: *всякое ограниченное*[1] *бесконечное множество, лежащее в n-мерном пространстве, имеет по крайней мере одну предельную точку.* Доказательство состоит в перенесении на n-мерный случай элементарных доказательств[2]) для $n=1$ и $n=2$.

Точка a множества M называется его *внутренней точкой*, если она не является предельной для дополнительного множества $R^n - M$ (т. е. для множества всех точек R^n, которые не принадлежат M). В этом случае, очевидно, можно найти такое малое ε, что все точки x, расстояние которых от a меньше ε $[\rho(a, x) < \varepsilon]$, принадлежат M.

Множество F называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество G называется *открытым*, или *областью*, если оно состоит только из внутренних точек. Нетрудно видеть, что множество, дополнительное к замкнутому множеству, есть множество открытое, и обратно — дополнение к открытому множеству замкнуто.

Среди фигур, рассматриваемых в топологии, основное значение имеют замкнутые ограниченные множества евклидовых пространств. Мы начнем наше изложение с простейших среди этих фигур — с элементарных поверхностей и линий.

---

[1]) Множество M называется ограниченным, если существует такое конечное положительное число a, что все координаты всех его точек по абсолютной величине $< a$; другими словами,—если M лежит внутри куба

$$-a \leqslant x_i \leqslant a, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

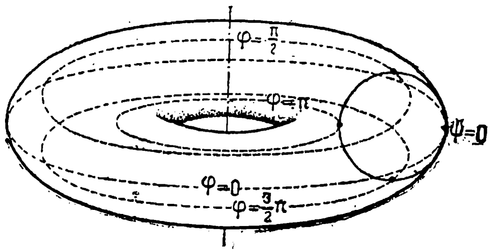
[2]) См. например, *Александров* и *Колмогоров*, «Введение в теорию функций действительного переменного», стр. 71 или *Привалов*, «Введение в теорию функций комплексного переменного», 1-е изд., стр. 26—27.

Глава I

ПОВЕРХНОСТИ

5. Простейшие геометрические образования двух измерений — поверхности — являются благодарным материалом для топологического изучения как по значительному разнообразию топологических свойств, так и по своей наглядности. Наибольший интерес представляют замкнутые поверхности. Замкнутые поверхности трехмерного евклидового пространства R^3 и поверхности, им гомеоморфные, мы будем называть *элементарными* поверхностями.

К сожалению, в элементарную геометрию проникла из них лишь сфера да, пожалуй, еще тор (поверхность кольца, см. черт. 1) [1]).



Черт. 1

Топологическая классификация элементарных поверхностей приписывает каждой из них определенное целое число p — *род* поверхности. Поверхности, гомеоморфные сфере, называются поверхностями рода 0, гомеоморфные тору — поверхностями рода 1; на черт. 2 изображены поверхности рода 2 и 3. Вообще поверхность рода p может быть представлена как сфера с p «ручками» (Klein'ова нормальная форма).

6. Не интересуясь метрической структурой поверхности, мы будем исследовать лишь взаимное расположение отдельных ее частей: две фигуры (в частности две поверхности), которые можно разбить на соответственно гомеоморфные части, *соединяющиеся между собой в той и другой фигуре одинаковым образом*, очевидно, гомеоморфны.

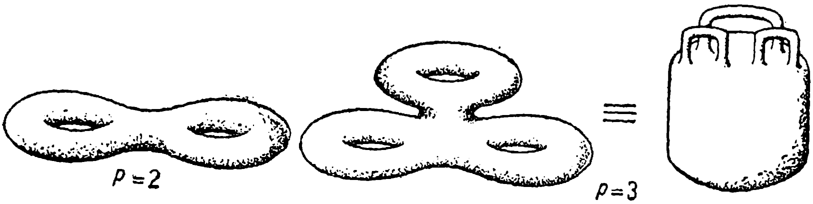
---

[1]) Тор есть поверхность, полученная от вращения окружности вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей окружности (черт. 1).

Так, сферу

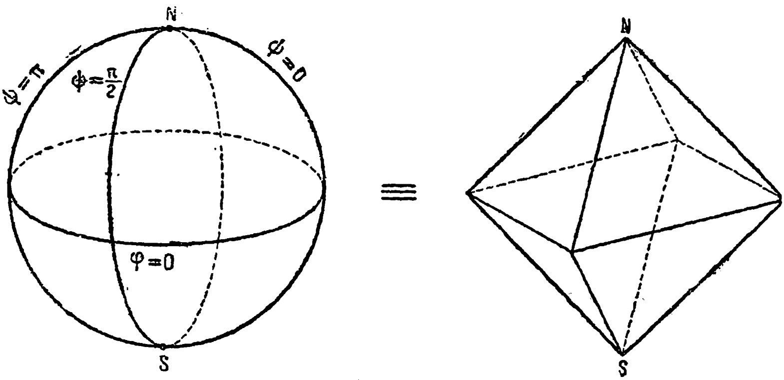
$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\varphi\cos\psi,\\
y &= R\cos\varphi\sin\psi,\\
z &= R\sin\varphi
\end{aligned}
$$

можно разбить экватором ($\varphi=0$) и четырьмя меридианными полуокружностями (например $\psi=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$) на 8 сферических треугольников; при этом сфера будет составлена из этих треугольни-



Черт. 2

ков совершенно так, как поверхность октаедра составлена из прямолинейных равносторонних треугольников (черт. 3).



Черт. 3

В качестве другого примера рассмотрим разбиение тора:

$$
\begin{aligned}
x &= (R + r\cos\varphi)\cos\psi,\\
y &= (R + r\cos\varphi)\sin\psi,\\
z &= r\sin\varphi
\end{aligned}
$$

восьмью окружностями $\varphi=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$; $\psi=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ на 16 кривых четырехугольников (черт. 4), причем их взаимное ра