К. Поссе

Курс дифференциального исчисления

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
К11

К. Поссе
К11 Курс дифференциального исчисления / К. Поссе – М.: Книга по Требованию, 2016. – 376 с.

ISBN 978-5-458-28367-0

Учебник Поссе предназначается Комитетов по высшему техническому образованию в качестве стабильного для втузов с расширенной программой по математике. Он выходит в переработке профессора МГУ И.И. Привалова. Книга снабжена большим количеством упражнений.

ISBN 978-5-458-28367-0

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА III.

Приложение диференциального исчисления к изучению свойств функций. Разложение в ряды. Выражения неопределенного вида максимума и минимума.

ГЛАВА IV.

Функции нескольких независимых переменных. Неявные функции. Преобразование переменных.

ГЛАВА V.

Геометрические приложения диференциального исчисления.

ГЛАВА VI.

Основные свойства целых рациональных функций. Разложение рациональных дробей на простейшие. Решение численных уравнений высших степеней. Алгебраическое решение кубического уравнения.

Вычисление сумм одинаковых степеней корней уравнения.

ГЛАВА I.

Основные понятия и определения.

§ 1. Постоянные и переменные величины. В различных прикладных науках — естествознании, механике, физике — приходится встречаться с величинами самой разнообразной природы. Так, например, в физике часто приходится говорить об удельном весе, о плотности массы, температуре и т. д. В механике мы рассматриваем силу, ускорение, скорость, время; в геометрии мы изучаем такие величины, как площадь, объем, длина отрезка и т. п. Для того чтобы подвергнуть эти величины математическому анализу, выбирают за единицу измерения произвольную величину той же самой природы: например, за единицу измерения длины принимают метр, за единицу веса — килограмм и т. д. Тогда отношение данной конкретной величины к единице измерения будет отвлеченное число, показывающее, сколько раз единица измерения укладывается в данной конкретной величине. Число, которое получается в результате измерения, называется значением данной конкретной величины. Таким образом в результате абстрагирования от индивидуальных свойств той или иной конкретной величины создается математическая величина, изучаемая в математическом анализе. С точки зрения математики не важно, будем ли мы иметь дело с температурой, площадью, массой и т. д. Для нас важно лишь то, что мы имеем некоторую величину, которую мы обозначаем буквой, например x, и что эта величина может принимать численные значения. Благодаря этому результаты, к которым приводит математика, могут применяться к разным отделам прикладных знаний, потому что, какую бы величину мы ни встретили в природе, стоит только ее обозначить через x, а значение ее, которое получается в результате ее измерения, приписать как значение этой буквы — математической величины, и мы уже имеем перевод данной конкретной величины в величину математическую.

Приступая к изучению математического анализа, первое, что мы делаем,— мы классифицируем величины на два больших класса — *величины постоянные* и *переменные*. Величина называется *постоянной*, если она имеет вполне определенное числовое значение либо независимо от условий данной задачи, либо лишь в условиях определенного вопроса. Постоянные величины первого рода носят название *абсолютно постоянных*, второго рода —

параметров или произвольных постоянных. В противоположность этому величину называют *переменной*, если она может получать различные числовые значения при условиях данной задачи.

Чтобы иллюстрировать эту классификацию, заметим, что если не в природе, то в научном мышлении мы можем встретить такие постоянные величины, которые не изменяются ни при каких условиях. Так, например, сумма углов треугольника всегда равна двум прямым. Какой бы треугольник мы ни взяли, при любой длине его сторон, сумма углов всегда в точности будет равна двум прямым [1]). Следовательно, сумма углов в треугольнике есть величина абсолютно постоянная, потому что ее значение не зависит от условий данной конкретной задачи. Точно так же отношение длины окружности к диаметру, обозначаемое через π, есть величина абсолютно постоянная, так как это отношение не зависит от радиуса окружности; $\sqrt{2}$ есть величина абсолютно постоянная, ибо в любой задаче $\sqrt{2}$ имеет всегда одно и то же значение.

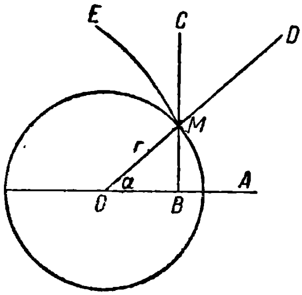
Однако очень часто приходится иметь дело с величинами постоянными лишь при условиях данной задачи. Так, например, рассматривая радиус и длину хорды некоторой определенной окружности, мы видим, что радиус окружности есть величина постоянная, а хорда, вписанная в окружность, — величина переменная, так как в зависимости от ее положения ее длина будет иметь то или иное значение. Очевидно, радиус окружности нельзя назвать абсолютно постоянной величиной, потому что только в условиях данной задачи он будет постоянным, а вообще может иметь любое положительное числовое значение, если мы будем изменять окружность и повторять рассуждение с измененной окружностью. Здесь радиус есть величина постоянная, но не абсолютно постоянная. Это есть произвольная постоянная величина или параметр.

Кроме того, полезно отметить, что разделение величин на параметры и переменные устанавливается для каждого данного вопроса отдельно, и величины постоянные — параметры в одной задаче могут быть переменными в другой. Так, например, рассматривая все окружности с данной общей хордой, мы замечаем, что при этих условиях длина этой хорды есть величина постоянная — параметр, радиус же окружностей есть величина переменная. Или другой пример. Положим, что рассматривается движение точки M на плоскости (черт. 1); обозначим через r расстояние этой точки до неподвижной точки O и через α — угол между лучом OM и неподвижной осью OA. Если точка M движется по окружности данного радиуса OM, то r — величина постоянная — параметр, а α — переменная; если эта точка движется по данной прямой OD, то α — постоянная, а r — переменная; если,

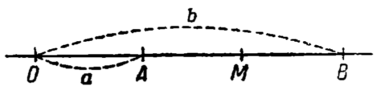
[1]) Понятно, что мы говорим о геометрии Евклида, потому что в других геометрических системах сумма углов треугольника может быть не равна двум прямым и зависит от формы треугольника.

наконец, точка M движется по прямой $BC \perp OA$, то r и α — переменные, а произведение $r \cos \alpha = OB$ — постоянная величина; вообще если точка M описывает какую-нибудь линию ME, то r и α — переменные величины, связанные между собою некоторой зависимостью, определяемою видом линии, по которой движется точка M. Постоянные величины преимущественно обозначают первыми буквами алфавита: $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, а переменные — последними: $x, y, z, \ldots, \xi, \eta, \zeta, \ldots$

§ 2. Независимые переменные. Функции от одной или нескольких переменных. Для геометрического изображения постоянной величины, имеющей числовое значение a, выбираем числовую ось с началом координат в точке O. Тогда, как известно, число a изображается точкой на этой оси, абсцисса которой есть a. Таким образом постоянную величину мы можем изобразить определенной точкой на прямой линии. Если же мы имеем величину не постоянную, а переменную, то в геометрическом представлении мы получим не отдельную точку, а совокупность или множество



Черт. 1.



Черт. 2.

точек. Конечно, эта совокупность точек может быть весьма разнообразной, смотря по тому, какие значения имеет наша переменная величина. Но обычно в классическом анализе это есть область чисел, заключенных между двумя определенными числами, например, в примере § 1 длина хорды может получать значения между нулем и удвоенным радиусом.

Обычно приходится рассматривать переменную величину. Обозначим ее буквой x, которая способна принимать всевозможные числовые значения, заключенные между числами a и b. Числа a и b обыкновенно входят в совокупность значений, принимаемых величиной x, но могут и не входить. Если нужно оттенить один случай от другого, то в первом случае пишут: $a \leqslant x \leqslant b$, а во втором: $a < x < b$. Изображая геометрически числа a и b точками A и B на числовой оси (черт. 2), мы видим, что x изобразится любой точкой M, лежащей на отрезке AB, включая его концы, в первом случае, и за исключением концов — во втором случае. Таким образом наша переменная величина x, принимающая всевозможные числовые значения, удовлетворяющие условию $a \leqslant x \leqslant b$, изображается совокупностью точек, принадлежащих отрезку AB, отсюда принято называть совокупность числовых значений этой переменной величины сегментом (a, b);

в противоположность этому, совокупность числовых значений переменной величины x, удовлетворяющих условию $a < x < b$, будем называть интервалом (a, b). Если переменная величина x может принимать любое положительное и отрицательное значение, то говорят, что x изменяется от минус бесконечности до плюс бесконечности и пишут: $-\infty < x < +\infty$. Если в каком-нибудь вопросе рассматривается несколько переменных $x, y, z, \ldots, u, v$, то эти переменные называются независимыми, когда значениями одних, по произволу выбранных, не определяются значения остальных. Иными словами, когда при определенных значениях, приписанных нескольким переменным, остальные величины остаются переменными. Так, например, декартовы координаты (x, y, z) точки M в пространстве будут переменными независимыми, если точка M может занимать любое положение в пространстве, а не обязана оставаться на данной поверхности или данной линии. Также переменные x, y, z, удовлетворяющие неравенству $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, являются независимыми, потому что, приписав числам y и z любые значения, сумма квадратов которых меньше единицы, мы можем величине x придать любое значение, удовлетворяющее лишь неравенству:

$$-\sqrt{1-y^2-z^2} < x < +\sqrt{1-y^2-z^2}.$$

Если мы имеем одну или несколько независимых переменных величин, то они сами по себе еще не могут представлять предмета для научного исследования, поскольку эти переменные величины могут изменяться как угодно, независимо друг от друга.

При изучении того или иного закона природы в физике, механике и т. д. мы видим, что здесь имеется несколько переменных величин. Например, рассматривая объем газа v и давление p, под которым этот газ находится при неизменной температуре, мы будем иметь дело с двумя переменными v и p, а меняя также и температуру T, получим три переменных v, p и T.

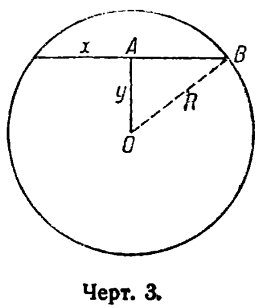
Для определенности допустим, что имеется две переменных величины, например v и p, как в только что упомянутом примере, причем условия задачи таковы, что одна из них может изменяться произвольно, а другая изменяется в зависимости от первой; так, изменяя произвольно давление p, мы знаем, что объем газа v изменяется в зависимости от p, получая каждый раз определенное числовое значение, после того как задано числовое значение величины p.

Предположим, что из двух переменных величин x и y, входящих в данную задачу, каждый раз, когда одна из них, например x, получила числовое значение, другая, т. е. y, тоже получила свое определенное числовое значение. Другими словами, меняя произвольно x, мы тем самым меняем y в силу той связи, которая существует между x и y и определяется условиями данной задачи. В этом случае говорят, что переменная величина y есть *функция*, а переменная величина x, от которой зависит y, называется ее *аргументом*. Иными словами, мы имеем здесь, с одной стороны, независимую переменную x, т. е. величину, которая может получать произвольные числовые значения в границах, обусловленных лишь условиями данной задачи, и, с другой стороны, имеем зависимую переменную величину, которая получает числовое значение всякий раз, когда известно значение независимой переменной.

Понятие о функции является основным понятием математического анализа. С каким бы фактом науки мы ни встретились, мы всегда можем при тщательном анализе подметить зависимость между переменными величинами, которые здесь имеются. Самая зависимость функции от аргумента может быть установлена различными способами, но в математическом анализе преимущественно функция задается с помощью формулы, указывающей те действия, какие надо произвести над каждым данным значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Такая формула называется *аналитическим выражением* функции, и соответственно с этим самый этот способ задания функциональной зависимости носит название *аналитического*. Так, например, аналитическое выражение площади круга y как функции его радиуса x есть $y = \pi x^2$, и вообще всякая формула, как, например,

$$y = \frac{x^2 - 5}{x - \lg x},$$

определяет некоторую функцию y от аргумента x. В самом деле, зная эту формулу, мы для каждого значения x (в данном примере $x > 0$) можем найти соответствующее значение y; для этого стоит только вместо x подставить в формулу заданное значение аргумента и произвести действия, которые указаны в этой формуле.



Черт. 3.

Функция может задаваться различными формулами для разных сегментов, в которых заключаются значения ее аргумента. Можно, например, сказать, что y есть функция от x, если для всех $x \leqslant 1$, $y = x + 2$, а для всех $x \geqslant 1$, $y = 4 - x$; при $x = 1$ обе эти формулы дают $y = 3$.

Другой, часто встречающийся способ установления функциональной зависимости есть *геометрический*. Для примера рассмотрим хорду x в данной окружности и расстояние y этой хорды от центра (черт. 3). Меняя x, мы видим, что изменяется y, т. е. y можно рассматривать как функцию от x. Иными словами, расстояние хорды от центра есть функция длины хорды, причем эта зависимость здесь задана с помощью чертежа. Эту геометрическую зависимости можно выразить аналитически, пользуясь законами геометрии. С этой целью, рассматривая треугольник OAB, мы получаем:

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Переведя первоначальный геометрический способ задания функциональной зависимости в аналитическую форму, мы можем уже не говорить о тех геометрических условиях, при помощи которых наша функция была вначале определена. Если в этом примере мы могли на основании элементарных соображений выразить функцию, заданную сначала геометрически, с помощью формулы, то такой перевод возможно сделать далеко не всегда так просто Так, например, оставаясь в пределах элементарной математики, мы не можем указать зависимость $\sin x$ от x при помощи известных алгебраических действий. Поэтому мы определяем $\sin x$ геометрически как отношение линии синуса к радиусу и, исходя из этого определения, выводим важнейшие свойства этой функции. Для вычисления же ее значений мы пользуемся готовыми таблицами. То же можно сказать относительно любой тригонометрической функции, как $\cos x$, $\operatorname{tg} x, \ldots$ Иными словами тригонометрическую функцию, как, например, $\sin x$, можно выразить через x помощью алгебраических действий, но эта задача недоступна элементарной математике. В дальнейшем мы увидим, что эти действия надо повторить бесконечное число раз, и узнаем, каковы эти действия.

Функция от одного аргумента может быть задана и *графически*, в виде кривой линии, ординаты которой дают значения функции при разных значениях аргумента, рассматриваемого в качестве абсциссы точки. К графическому изображению функции часто прибегают и в тех случаях, когда известно и ее аналитическое выражение, для наглядного пояснения (но не для доказательства) различных свойств функции. Об этом подробнее будет сказано в § 10.

Зависимость функции от аргумента можно задавать *физически*, например, длину стержня можно рассматривать как функцию температуры. Чтобы привести еще пример, рассмотрим движение тела, например камня, брошенного вверх. С течением времени изменяется расстояние камня от земли, и мы можем сказать, что это расстояние будет функцией от времени. Какое бы движение мы ни рассматривали (вообще говоря, движение будет неравномерным), его скорость будет разная в различные моменты времени, и мы можем говорить о скорости как функции времени. В механике обычно за независимую переменную принимают время, а различные иные величины, как скорость и расстояние, будут функциями от времени.

Для того чтобы иметь возможность прилагать математический анализ, нужно выразить помощью формулы зависимость конкретной величины от аргумента, и в этом заключается открытие нового научного закона. Так, например, если мы рассматриваем явление падения тяжелого тела с некоторой высоты без начальной скорости, то как известно из физики, пройденное расстояние выражается формулой:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где g есть ускорение силы тяжести, равное 9,81 *м/сек*². Имея эту формулу, мы знаем закон, по которому изменяется расстояние падающего тяжелого тела в зависимости от времени.

Для удобства мы пока говорили о двух величинах — аргументе и функции. Теоретически безразлично, какую из двух переменных величин считать за аргумент и какую за функцию. Однако если мы выбрали одну переменную величину за аргумент, то во всем данном исследовании мы должны ее считать аргументом, другая же величина будет функцией. Например, если мы ищем логарифмы по числам, то здесь независимой переменной является число, а его логарифм — функцией. Если же, наоборот, зная логарифм, мы определяем соответствующее число, то аргументом будет служить логарифм, а функцией будет то число, которое соответствует данному логарифму. Решая эти две задачи, которые часто приходится выполнять практически, мы переставляем, следовательно, роли функции и аргумента.

В предыдущем мы привели примеры на различные способы задания функциональной зависимости; число этих способов можно по желанию увеличить. Для определения функции является безразличным характер ее зависимости от аргумента, и после всего сказанного мы можем формулировать следующее точное определение понятия функции: *если каждому значению x в некотором сегменте (a, b) соответствует одно и только одно значение y, то говорят, что y есть однозначная функция*, или просто *функция от x в данном сегменте*.

В некоторых вопросах приходится рассматривать такие зависимости между двумя переменными x и y, в силу которых каждому данному значению соответствует не одно, а несколько и даже бесконечное множество значений, подчиненных, однако, некоторому закону, не дозволяющему при данном значении x приписать величине y произвольное значение в каком-нибудь сегменте. В таких случаях говорят, что y есть многозначная функция от x. Положим, например, что переменные x и y должны удовлетворять уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Каждому значению x в сегменте $(-1, +1)$ соответствует два значения y: $y = +\sqrt{1 - x^2}$, и $y = -\sqrt{1 - x^2}$, поэтому можно сказать, что y — *двузначная* функция от x. Далее, положим, что y связана с x уравнением $\operatorname{tg} y = x$, или, как принято писать, $y = \operatorname{arctg} x$ (дуга, тангенс которой равен x). Здесь каждому данному значению x соответствует бесконечное множество значений y, но все эти значения заключаются в формуле $y = \alpha + k\pi$, где α — одна определенная дуга, имеющая данный тангенс, а k — целое число. Заметим, что различные значения y, соответствующие данному x, будут числа *изолированные*, разделенные одно от другого интервалами, равными π. В этом состоит отличие рассматриваемого случая от нижеследующего, например, в котором x и y связаны не уравнением, а неравенством $x^2+y^2<1$. Здесь каждому значению x в интервале $(-1, +1)$ соответствует бесконечное множество значений y, заполняющих интервал $(-\sqrt{1-x^2}, +\sqrt{1-x^2})$, а не изолированных, и y — уже не многозначная функция от x, а просто независимая переменная так же, как x.

Всякую многозначную функцию можно обратить в однозначную, добавив к данным условиям, не вполне определяющим функцию, новые. Так, в случае уравнения $x^2+y^2=1$ многозначность функции y устранится, если добавим условие, что y обозначает положительный корень уравнения; тогда значение $y = -\sqrt{1-x^2}$ отпадает, и y делается однозначной функцией от x. В случае уравнения $\operatorname{tg} y = x$ или $y = \operatorname{arctg} x$ многозначность y устранится, если условимся под $\operatorname{arctg} x$ понимать дугу, лежащую в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$; тогда каждому значению x будет соответствовать одно и только одно значение y. В диференциальном исчислении всегда предполагается, что рассматриваемые функции однозначны; иначе многие теоремы диференциального исчисления потеряли бы смысл. Поэтому для всего дальнейшего мы раз навсегда установим, что только тогда мы будем называть y функцией от x, когда каждому значению x в данном сегменте (или интервале) соответствует одно и только одно значение y.

До сих пор мы рассматривали функцию одного аргумента. Однако в задачу могут входить не две, а несколько переменных величин; допустим, условия задачи таковы, что все эти переменные величины, кроме одной, могут получать произвольные числовые значения, а числовое значение последней определяется после того, как мы выбрали значения остальных величин. Тогда эта последняя величина называется функцией от всех остальных, называемых ее аргументами. Так, например, рассмотрим объем газа, давление, под которым находится этот газ, и температуру. Имея здесь три переменных величины, мы можем двум из них, например давлению и температуре, приписать произвольно числовые значения, тогда объем определится по закону Мариотта-Гей-Люссака, определяющему зависимость объема от давления и температуры. В этой задаче, следовательно, давление и температура могут получать любые числовые значения, не противоречащие области, допускаемой данной задачей, и они являются независимыми переменными; объем же определяется после того, как заданы значения независимых переменных: он является функцией от этих двух независимых переменных. Также площадь треугольника есть функция основания и высоты; объем прямоугольного