Ш.Ж. Валле-Пуссен

Курс анализа бесконечно малых

Том 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Ш11

Ш.Ж. Валле-Пуссен

Ш11 Курс анализа бесконечно малых: Том 1 / Ш.Ж. Валле-Пуссен – М.: Книга по Требованию, 2017. – 498 с.

ISBN 978-5-458-26013-8

Книга посвящена дифференцированию явных функций одной независимой переменной, формуле Тейлора, функциям нескольких переменных, неопределенным интегралам и др.

ISBN 978-5-458-26013-8

От редактора и переводчиков.

Предлагаемый здесь перевод I тома **Курса анализа бесконечно малых** de la Vallée-Poussin'а выполнен с III французского издания; при этом Введение и главы VI, VII, X и XI переведены проф. Г. М. Фихтенгольцем, а главы I—V, VIII и IX—проф. Я. Д. Тамаркиным. Перевод в нескольких местах снабжен примечаниями переводчиков, раз'ясняющими и дополняющими текст.

При переводе допущены некоторые отступления от оригинала. Важнейшее из них состоит в том, что в I-й том перенесен из II-го ряд nn°, относящихся, главным образом, к так называемым несобственным интегралам (nn° 226, 233—243). В оригинале в I-м томе рассматриваются несобственные интегралы и некоторые из таких интегралов даже вычисляются, но без проверки самого существования их; признаки существования несобственных интегралов изложены автором во II-м томе. Это обстоятельство могло представить некоторые затруднения для читателя I-го тома русского перевода, не имеющего под руками II-го тома, за выход которого вскоре вслед за I-м при настоящих условиях нельзя ручаться.

Далее, существенное уклонение от оригинала представляет изложение вопроса о замене переменной в интегралах Lebesgue'а. Основная теорема, сюда относящаяся, была высказана автором в оригинале при слишком общих условиях, при которых она неверна. В мемуаре «Sur l'intégrale de Lebesgue», опубликованном автором в 1916 г. в Transactions of the American Mathematical Society, он дал совершенно новое изложение вопроса, но, хотя результаты, формулированные им, действительно, верны, самое рассуждение его содержит погрешность, неустранимую при сохранении порядка идей автора. Переводчик, сохранив результаты упомянутого мемуара, старался в доказательстве их возможно ближе держаться первоначального изложения, данного автором в I-м томе, устранив, конечно, содержавшуюся там ошибку.

Упомянем еще о n° 253, содержащем обобщение теоремы о замене переменной для интегралов Riemann'a (он взят из II-го франц. изд I-го тома), и о наново написанном n° 254, в котором изложено известное обобщение формулы интегрирования по частям (для интегралов Riemann'a), необходимое в теории тригонометрических рядов (если не оперировать интегралами Lebesgue'a и оставаться в области классического анализа).

Другие отступления от оригинала представляют в большинстве случаев либо незначительные изменения текста, восполняющие случайные пробелы в изложении автора, либо более подробное развитие некоторых основных предложений.

Мысль об издании перевода книги de la Vallée-Poussin'a возникла уже давно, но осуществить издание оказалась возможным лишь теперь через «Научное книгоиздательство», которому удалось преодолеть значительные затруднения, связанные в настоящее время с печатанием вообще, а математических сочинений в особенности, что должно признать несомненной его заслугой.

В. А. Стеклов.
Я. Д. Тамаркин.
Г. М. Фихтенгольц.

10. VIII. 1922 г.

Том первый.

17-я типография. Петроград, 7-я рота 26.

Р. В. Ц. № 861. Тираж 4500 экз.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Вещественные числа.

1. Рациональные числа. Числа целые и дробные, положительные и отрицательные, включая и нуль, образуют *совокупность рациональных чисел*. Мы будем предполагать, что читатель знаком с наиболее элементарными свойствами этих чисел и умеет выполнять четыре основные арифметические действия над ними. Напомним, однако, о следующих свойствах:

1°. Совокупность рациональных чисел *расположена*, т. е. из двух различных рациональных чисел a и b одно больше другого и, в то же время, второе меньше первого; если, напр., b больше a (a меньше b), то пишут

$$b > a, \text{ или } a < b.$$

Понятие о порядке, выражаемое этим соотношением, сводится к тому свойству знака неравенства, что, если $a < b$ и $b < c$, то также и $a < c$.

2°. Между двумя различными рациональными числами a и b всегда можно вставить бесконечное множество отличных от них чисел, которые $>$ одного и $<$ другого. Совокупность чисел, обладающую этим свойством, называют *плотной* (ensemble dense), а самое свойство называют *плотностью* (densité).

2. Иррациональные числа. Введение иррациональных чисел основывается на следующих соображениях:

Предположим, что по какому-нибудь правилу (мы укажем ниже примеры таких правил) все рациональные числа разделены на два класса, нижний класс A и верхний класс B, такого рода, что любое число a первого класса $<$ любого числа b второго класса. Такое разделение наз. *сечением* (coupure). Когда оно произведено, то прежде всего ясно, что если a есть число класса A, то к тому же классу принадлежит и любое число $< a$, если же b принадлежит классу B, то и любое число $> b$ принадлежит классу B. Установив это, мы утверждаем, что могут представиться три случая:

1°. Нижний класс A содержит число m, большее всех других чисел того же класса, так что каждое число $< m$ принадлежит классу A, а каждое число $> m$ относится к классу B. Число m, таким образом, отделяет класс A от класса B, и мы его назовем *пограничным числом* этих классов.

2°. Верхний класс B содержит число m, меньшее всех других чисел того же класса. В этом случае также m является *пограничным числом* для двух классов: каждое число $< m$ принадлежит классу A, а каждое число $> m$ — классу B.

Эти первые два случая взаимно исключают друг друга, ибо, если бы существовали два различных пограничных числа m и m', то все числа, содержащиеся между m и m', должны были бы одновременно принадлежать обоим классам, что противоречило бы определению этих классов. Итак, если есть наибольшее число в классе A, то нет наименьшего в классе B, и наоборот.

Каждый из этих двух случаев легко осуществить. Достаточно, взяв по произволу число m, отнести числа $< m$ к классу A, а числа $> m$ к классу B. Само число m можно поместить в любой из этих классов. Таким образом получается, по желанию, первый или второй из рассмотренных нами двух случаев. В обоих случаях мы будем говорить, что число m определяет сечение (A,B), и что это сечение рационально.

3°. Наконец, может случиться, что нет ни наибольшего числа в классе A, ни наименьшего в классе B. Весьма простые примеры приводят к такого рода сечению. Пусть, напр., m есть рациональное положительное число, не представляющее полного квадрата; все рациональные числа можно распределить на два класса A и B, относя к классу A все отрицательные и такие положительные числа, квадрат которых $< m$, а к классу B положительные числа, квадрат которых $> m$. В классе A нет наибольшего числа, ибо, какое бы ни взять число a, квадрат которого $< m$, всегда можно найти большее число с таким же свойством, извлекая приближенный квадратный корень из m по недостатку с настолько большим числом десятичных знаков, чтобы квадрат этого корня был ближе к m, чем a^2. Аналогичным образом убеждаемся, что не существует наименьшего числа в классе B.

Когда имеет место это обстоятельство, мы будем говорить, что сечение *иррационально*; в этом случае нет пограничного числа, отделяющего числа двух классов, ибо таким числом могло бы быть лишь наибольшее из чисел класса A или наименьшее из чисел класса B. Мы создаем тогда новый символ, напр., $\sqrt{2}$, $\pi, \ldots$, определяемый тем условием, что он $>$ каждого числа класса A и $<$ каждого числа класса B, и этот новый элемент, вставляемый между рациональными числами, мы будем называть *иррациональным числом.*

Совокупность иррациональных чисел соответствует всем возможным иррациональным сечениям. Каждое иррациональное число определяется сечением (A,B), которое ему соответствует, и впредь мы можем обозначать его одной буквой, как и рациональное число.

Если иррациональное число α содержится между двумя рациональными числами a и b, разность которых не превосходит положительной дроби ε, то эти числа называются *приближенными значениями* α по недостатку и по избытку с точностью до ε. Если определено иррациональное число α, то всегда можно найти сколь угодно близкие к нему рациональные приближенные значения, что вытекает из следующей теоремы:

Пусть иррациональное число α *определено сечением* (A, B); *каково бы ни было положительное рациональное число* ε, *можно найти в классах* A *и* B, *соответственно, числа* a *и* b, *разность которых была бы равна* ε.

Действительно, если a_1 есть число класса A, прогрессия

$$a_1,\ a_1+\varepsilon,\ a_1+2\varepsilon,\ a_1+3\varepsilon,\ldots,$$

безгранично возрастающая, содержит числа класса B; пусть первым из них будет $a_1+n\varepsilon=b$. Тогда предшествующее число $a=a_1+(n-1)\,\varepsilon$ будет принадлежать классу A. Эти два числа a и b удовлетворяют условиям теоремы.

3. Вещественные числа. Числа рациональные и иррациональные образуют *совокупность вещественных чисел.*

Для того, чтобы ее *расположить*, необходимо установить между ее элементами соотношения величины. Это достаточно сделать лишь для иррациональных чисел.

Пусть α - иррациональное число, определяемое сечением (A,B); иррациональное число α' будет равно α, если оно определяется тем же сечением, т. е. если оно больше всех чисел класса A и меньше всех чисел класса B; но α' будет *отлично* от α, если существует рациональное число, содержащееся между ними. При этом $\alpha'>\alpha$, если $\alpha'>$ какого-либо числа из класса B, и $\alpha'<\alpha$, если $\alpha'<$ какого-либо числа из класса A *).

*) Легко видеть, что и для вещественных чисел из неравенств $\alpha<\beta$ $\beta<\gamma$ всегда следует, что и $\alpha<\gamma$.

Прим. перев.

Следующая теорема доказывает, что совокупность вещественных чисел также обладает *плотностью*:

I. *Между двумя различными числами всегда можно вставить рациональное число, а следовательно и бесконечное множество их.*

Если оба числа иррациональны, то теорема совпадает с самим определением неравенства. Если одно из чисел иррационально и определяется сечением (A,B), между тем, как другое рационально, последнее принадлежит либо классу A, либо классу B, но не может быть ни наибольшим в A, ни наименьшим в B, так что заключение остается в силе. Наконец, для случая, когда оба числа рациональны, мы предположили теорему известной (n° 1, 2°).

Совокупность вещественных чисел обладает одним свойством, которого не имеет совокупность рациональных чисел; это свойство выражается следующей теоремой:

II. *Если по какому-нибудь правилу произведено сечение, (A,B) совокупности вещественных чисел, т. е. если эти числа разделены на два класса таким образом, что каждое число первого класса $<$ каждого числа второго, то необходимо существует рациональное или иррациональное пограничное число m, определяющее сечение, так что каждое число, меньшее m, принадлежит классу A, каждое же число, большее m, принадлежит классу B.*

В самом деле, пусть m будет тем рациональным или иррациональным числом, которое служит границей для рациональных чисел, содержащихся, соответственно, в классе A и в классе B. Каждое рациональное число, большее m, принадлежит классу B, а меньшее m — классу A. Остается показать, что это заключение сохраняется и для иррационального числа.

Но это непосредственно очевидно, ибо если иррациональное число больше m, то оно больше бесконечного множества рациональных чисел, больших m и, следовательно, принадлежащих классу B, так что оно *a fortiori* принадлежит классу B; иррациональное же число, меньшее m, меньше бесконечного множества рациональных чисел, меньших m, и вместе с ними содержится в классе A.

Предшествующие исследования не дают еще полного математического определения иррациональных чисел; к ним надлежит присоединить еще определения четырех основных арифметических действий.