Э. Мендельсон

Введение в математическую логику

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э. Менделсон

Э1 Введение в математическую логику / Э. Мендельсон – М.: Книга по Требованию, 2024. – 320 с.

ISBN 978-5-458-30833-5

В книге Э.Мендельсона "Введение в математическую логику" даётся доступное для начинающего читателя и достаточно полное изложение основных разделов современной математической логики и многих её приложений. Наряду с такими разделами, как логика высказываний, исчисление предикатов, формальная арифметика и теория алгоритмов, в ней освещены также теория моделей и аксиоматическая теория множеств, отсутствующие в книге С.К. Клинин "Введение в математику", которая до настоящего времени служила наиболее полным пособием по математической логике. Следует однако отметить, что в отличие от книги С.К. Клинин в этой книге по существу не затрагиваются интуиционистское и конструктивное направления математической логики.Изложение материала в книге ясное и лаконичное. Основной текст перемежается с большим числом примеров и упражнений. В упражнения автор вынес также некоторые результаты, используемые затем в основном тексте. Это, наряду с лаконичностью изложения, способствовало сокращению размеров книги при весьма обширном содержании.

ISBN 978-5-458-30833-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

От редактора перевода

В книге Э. Мендельсона «Введение в математическую логику» дается доступное для начинающего читателя и достаточно полное изложение основных разделов современной математической логики и многих ее приложений. Наряду с такими разделами, как логика высказываний, исчисление предикатов, формальная арифметика и теория алгоритмов, в ней освещены также теория моделей и аксиоматическая теория множеств, отсутствующие в книге С. К. Клини «Введение в метаматематику», которая до настоящего времени служила наиболее полным пособием по математической логике. Следует однако отметить, что в отличие от книги С. К. Клини в этой книге по существу не затрагиваются интуиционистское и конструктивное направления математической логики.

Изложение материала в книге ясное и лаконичное. Основной текст перемежается с большим числом примеров и упражнений. В упражнения автор вынес также некоторые результаты, используемые затем в основном тексте. Это, наряду с лаконичностью изложения, способствовало сокращению размеров книги при весьма обширном содержании.

Переводчик и редактор перевода позволили себе без специальных оговорок и примечаний исправить ряд неточностей и опечаток, имевшихся в оригинале, а также привести терминологию и обозначения в соответствие с принятыми в русской литературе.

Книгу Э. Мендельсона можно рекомендовать в качестве пособия не только студентам и аспирантам, специализирующимся по математической логике, но также всякому, кто захочет начать систематическое изучение этого предмета.

С. И. Адян

Предисловие

В этой книге мы попытались представить сжатое введение в некоторые основные разделы математической логики. Чтобы дать полное и точное изложение основных и наиболее важных вопросов, мы опустили такие дополнительные темы, как модальная, комбинаторная и интуиционистская логики, а также некоторые интересные, но более специальные вопросы, как, например, степени рекурсивной неразрешимости.

Придерживаясь того мнения, что начинающим следует предлагать наиболее естественные и легкие доказательства, мы применяем самые непринужденные теоретико-множественные методы. Значение требования конструктивных доказательств может быть оценено только после известного опыта занятий математической логикой. В конце концов, если уж нам предстоит быть изгнанными из «канторова рая» (как назвал Гильберт неконструктивную теорию множеств), то по крайней мере мы должны знать, чего лишаемся.

Пять глав книги удобно распределить на два семестра, а для курса в один семестр вполне подойдут главы с 1 по 3 (при этом можно, если это потребуется для ускорения, опустить §§ 5 и 6 главы 1 и §§ 10—12 главы 2). Мы будем отмечать верхним индексом D упражнения, которые, вероятно, будут трудны для начинающего, и верхним индексом A — упражнения, предполагающие знакомство с материалом, недостаточно освещенным в тексте.

Настоящая книга представляет собой расширенное воспроизведение записей полугодового курса лекций по математической логике, читанного автором с 1958 по 1960 г. в Колумбийском университете, а в 1961 и 1962 гг. в Куинс колледже. Автор надеется, что эта книга может быть прочитана без особого труда всяким, кто имеет некоторый опыт абстрактного математического мышления; при этом каких-либо конкретных предварительных знаний не требуется. Автор хотел бы поблагодарить Дж. Баркли Россера за поддержку и руководство во время аспирантских занятий логикой, а также с признательностью отметить несомненное влияние, оказанное на него книгами Гильберта и Бернайса [1934, 1939], Клини [1952], Россера [1953] и Чёрча [1956].

Эллиот Мендельсон

Queens, New York,
Январь 1963

Введение

Согласно одному из самых распространенных определений, логика есть анализ методов рассуждений. Изучая эти методы, логика интересуется в первую очередь формой, а не содержанием доводов в том или ином рассуждении. Рассмотрим, например, следующие два вывода:

(1) Все люди смертны. Сократ—человек. Следовательно, Сократ смертен.

(2) Все кролики любят морковь. Себастьян — кролик. Следовательно, Себастьян любит морковь.

Оба эти вывода имеют одну и ту же форму: все A суть B; S есть A; следовательно, S есть B. Истинность или ложность отдельных посылок или заключений не интересует логика. Он желает лишь знать, вытекает ли истинность заключения из истинности посылок. Систематическая формализация и каталогизация правильных способов рассуждений — одна из основных задач логика. Если при этом логик применяет математический аппарат, и его исследования посвящены в первую очередь изучению математических рассуждений, то предмет его занятий может быть назван математической логикой. Мы можем сузить область математической логики, если скажем, что главная ее цель — дать точное и адекватное определение понятия «математическое доказательство».

Безупречные определения имеют малую ценность в начале изучения предмета. Лучший способ понять, что такое математическая логика, состоит в том, чтобы приняться за ее изучение. Мы рекомендуем студенту начать читать эту книгу, даже если (и в особенности если) он имеет сомнения относительно значения и целей предмета.

Хотя логика и является основой всех остальных наук, тем не менее присущее ей, наряду с фундаментальностью, свойство самоочевидности действовало расхолаживающе на стремление к сколько-нибудь глубоким логическим исследованиям вплоть до девятнадцатого столетия, когда интерес к логике оживился под влиянием открытия неевклидовых геометрий и стремления обеспечить строгое обоснование анализа. Этот новый интерес оставался все еще не столь жгучим до тех пор, пока на исходе столетия математический мир не был потрясен открытием парадоксов, т. е. рассуждений, приводящих к противоречиям. Наиболее важными из этих парадоксов являются следующие.

Логические парадоксы

(1) (Рассел, 1902). Под множеством мы понимаем всякое собрание каких-либо объектов. Примерами множеств являются множество всех

четных чисел, множество всех саксофонистов в Бруклине и т. д. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Множества сами могут быть элементами множеств, так, например, множество всех множеств целых чисел имеет своими элементами множества. Большинство множеств не являются элементами самих себя. Например, множество всех котов не является элементом самого себя, потому что оно само не кот. Возможны, однако, и такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы, — например, множество всех множеств. Рассмотрим теперь множество A всех таких множеств X, что X не есть элемент X. Согласно определению, если A есть элемент A, то A также и не есть элемент A, и если A не есть элемент A, то A есть элемент A. В любом случае A есть элемент A и A не есть элемент A.

(2) (Кантор, 1899). Этот парадокс требует некоторых сведений из теории кардинальных чисел, и может быть опущен читателем, если он не знаком с этой теорией. Кардинальное число $\overline{\overline{Y}}$ множества Y определяется как множество всех множеств X, равномощных с множеством Y (т. е. таких X, для которых существует взаимно однозначное соответствие между Y и X, см. стр. 15). Мы определяем $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{Z}}$ как условие равномощности Y с некоторым подмножеством множества Z, а $\overline{\overline{Y}} < \overline{\overline{Z}}$ — как $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{Z}}$ и $\overline{\overline{Y}} \neq \overline{\overline{Z}}$. Кантор доказал, что если $\mathscr{P}(Y)$ есть множество всех подмножеств множества Y, то $\overline{\overline{Y}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(Y)}}$ (см. стр. 202). Пусть C — универсальное множество, т. е. множество всех множеств. Так как $\mathscr{P}(C)$ есть подмножество множества C, то, очевидно, $\overline{\overline{\mathscr{P}(C)}} < \overline{\overline{C}}$. С другой стороны, по теореме Кантора $\overline{\overline{C}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(C)}}$. Теорема же Шрёдера — Бернштейна (см. стр. 201) утверждает, что если $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{Z}}$ и $\overline{\overline{Z}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$, то $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Z}}$. Следовательно, $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{\mathscr{P}(C)}}$, что находится в противоречии с $\overline{\overline{C}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(C)}}$.

(3) (Бурали-Форти, 1897). Этот парадокс аналогичен парадоксу Кантора. Он возникает в теории порядковых чисел и будет понятен только тому, кто уже знаком с теорией порядковых чисел. Для любого порядкового числа существует порядковое число, его превосходящее. Однако порядковое число, определяемое множеством всех порядковых чисел, является наибольшим порядковым числом.

Семантические парадоксы

(4) Парадокс лжеца. Некто говорит: «Я лгу». Если он при этом лжет, то сказанное им есть ложь, и, следовательно, он не лжет. Если же он при этом не лжет, то сказанное им есть истина, и, следовательно, он лжет. В любом случае оказывается, что он лжет и не лжет одновременно *).

---

*) С парадоксом лжеца имеет сходство известный еще в древности (см., например, «Послание к Титу св. апостола Павла», 1, 12) так называемый «парадокс критянина». Критский философ Эпименид сказал: «Все критяне — лжецы». Если то, что он сказал, верно, то, поскольку Эпименид сам критянин, сказанное

(5) (Ришар, 1905). С помощью некоторых фраз русского языка могут быть охарактеризованы те или иные вещественные числа. Например, фраза «отношение длины окружности к длине диаметра в круге» характеризует число π. Все фразы русского языка могут быть перенумерованы некоторым стандартным способом, а именно: упорядочим сперва лексикографически (т. е. как в словаре) все фразы, содержащие в точности k букв, а затем поместим все фразы из k букв впереди всех фраз с бо́льшим числом букв. Теперь можно перенумеровать все те фразы русского языка, которые характеризуют то или иное вещественное число. Для этого достаточно в стандартной нумерации всех фраз опустить все остальные фразы. Число, получающее при такой нумерации номер n, назовем n-м числом Ришара. Рассмотрим такую фразу: «Вещественное число, у которого n-й десятичный знак равен 1, если у n-го числа Ришара n-й десятичный знак не равен 1, и n-й десятичный знак равен 2, если у n-го числа Ришара n-й десятичный знак равен 1». Эта фраза определяет некоторое число Ришара, допустим, k-е; однако, согласно определению, оно отличается от k-го числа Ришара в k-м десятичном знаке.

(6) (Берри, 1906). Существует лишь конечное число слогов в русском языке. Следовательно, имеется лишь конечное число таких фраз русского языка, которые содержат не более пятидесяти слогов. Поэтому с помощью таких фраз можно охарактеризовать только конечное число натуральных чисел. Пусть k есть *наименьшее из натуральных чисел, которые не характеризуются никакой фразой русского языка, содержащей не более пятидесяти слогов*. Напечатанная курсивом фраза характеризует число k и содержит не более пятидесяти слогов.

(7) (Греллинг, 1908). Прилагательное называется *автологическим*, если свойство, которое оно обозначает, присуще ему самому. Прилагательное называется *гетерологическим*, если свойство, которое оно обозначает, ему самому не присуще. Так, например, прилагательные «многосложный», «русский» являются автологическими, а прилагательные «односложный», «французский», «голубой» — гетерологическими. Рассмотрим прилагательное «гетерологический». Если это прилагательное гетерологично, то оно негетерологично, если же оно негетерологично, то оно гетерологично. Итак, в любом случае прилагательное «гетерологический» является гетерологическим и негетерологическим одновременно.

Все эти парадоксы являются подлинными в том смысле, что они не содержат явных логических изъянов. В логических парадоксах используются только понятия теории множеств, в то время как в парадоксах семантических применяются такие понятия, как «характеризовать»,

им есть ложь. Следовательно, то, что он сказал, есть ложь. Тогда должен быть такой критянин, который не лжет. Последнее не является логически невозможным, и мы здесь не имеем настоящего парадокса. Тем не менее тот факт, что произнесение Эпименидом этого ложного высказывания может повлечь за собой существование критянина, который не лжет, до некоторой степени обескураживает.

«истинный», «прилагательное», которое вовсе не обязаны появляться в обычном математическом языке. Ввиду этого логические парадоксы представляют собой куда бо́льшую угрозу спокойствию духа математиков, чем парадоксы семантические.

Анализ парадоксов привел к различным планам их устранения. Все эти планы предлагают тем или иным путем ограничивать «наивные» понятия, участвующие в выводе этих парадоксов. Рассел обратил внимание на то, что во всех этих парадоксах имеет место самоотнесение понятий. Он предложил снабдить каждый объект некоторым неотрицательным целым числом — «типом» этого объекта. После этого высказывание «x есть элемент множества y» должно считаться *осмысленным* тогда и только тогда, когда тип y на единицу больше типа x. Этот подход, систематически развитый Расселом и Уайтхедом [1910—1913] в так называемую теорию типов, приводит к цели, когда речь идет об устранении известных парадоксов *), однако он громоздок в практическом применении и имеет также некоторые другие недостатки. Другое острие критики логических парадоксов было нацелено на содержащееся в них допущение, состоящее в том, что для любого свойства $P(x)$ существует соответствующее множество всех элементов x, обладающих свойством $P(x)$. Стоит лишь отвергнуть это допущение, и логические парадоксы становятся невозможными **). Однако при этом необходимо принять некоторые новые постулаты для того, чтобы мы могли, опираясь на них, доказать существование таких множеств, в которых повседнёвно нуждаются практически работающие математики. Первая такая аксиоматическая теория множеств была построена Цермело [1908]. В главе 4 мы рассмотрим одну аксиоматическую теорию множеств, которая ведет свое происхождение от системы Цермело (с некоторыми изменениями, принадлежащими фон Нейману, Р. Робинсону, Бернайсу и Гёделю). Существуют также различные смешанные теории, соединяющие в себе те или иные черты теории типов и аксиоматической теории множеств; примером теории такого рода может служить система NF Куайна (см. Россер [1953]).

Более глубокое истолкование парадоксов было предпринято Брауэром и его интуиционистской школой (см. Гейтинг [1956]). Интуиционисты отказываются признавать универсальный характер некоторых основных законов логики таких, например, как *закон исключенного третьего*: *P или не P*. Этот закон, утверждают они, верен для конечных

---

*) Так, например, парадокс Рассела зависит от существования множества A всех множеств, которые не являются элементами самих себя. Так как, согласно теории типов, бессмысленно говорить о том, что какое-то множество принадлежит самому себе, то такого множества не может быть.

**) Парадокс Рассела в таком случае доказывает, что не существует множества A всех множеств, которые не принадлежат самим себе в качестве элемента, а парадоксы Кантора и Бурали-Форти показывают, что не существует универсального множества и не существует множества всех ординальных чисел. Семантические же парадоксы теперь не могут быть даже сформулированы, поскольку они включают в себя понятия, не выразимые внутри этой системы.

множеств, но нет никаких оснований распространять его без всяких ограничений на все множества. Точно так же, говорят интуиционисты, необоснованным является заключение, что утверждение «существует объект x такой, что не $P(x)$» следует из утверждения «неверно, что для любого x $P(x)$». По их мнению, мы только тогда можем согласиться с утверждением существования объекта, обладающего тем или иным свойством, когда мы владеем методом построения (или отыскания) такого объекта. Разумеется, если мы подчинимся суровым интуиционистским требованиям, то парадоксы станут невыводимыми (или даже лишенными смысла), но, увы, в таком же положении тогда окажутся и многие столь любимые теоремы повседневной математики, и по этой причине интуиционизм нашел себе мало приверженцев среди математиков.

Какой бы мы, однако, не избрали подход к проблеме парадоксов, следует сперва исследовать язык логики и математики, чтобы разобраться в том, какие в ней могут быть употреблены символы, как из этих символов составляются термы, формулы, утверждения и доказательства, что может и что не может быть доказано, если исходить из тех или иных аксиом и правил вывода. В этом состоит одна из задач математической логики, и пока это не сделано, нет и базы для сопоставления соперничающих точек зрения на основания логики и математики. Глубокие и опустошительные результаты Гёделя, Тарского, Чёрча, Россера, Клини и многих других были богатой наградой за вложенный труд и завоевали для математической логики положение независимой ветви математики.

Для тех, кто является абсолютным новичком, мы теперь кратко изложим некоторые основные понятия и факты, используемые в книге. Впрочем, мы рекомендуем читателю опустить сейчас этот обзор и лишь обращаться к нему в дальнейшем по мере необходимости для справок.

Множество есть собрание объектов *). Объекты этого собрания называются ***элементами*** множества. Мы будем писать «$x \in y$» вместо утверждения, что «x есть элемент y». (В том же смысле мы будем понимать высказывания «x принадлежит y» и «y содержит x».) Отрицание утверждения «$x \in y$» будет обозначаться через «$x \notin y$».

Запись «$x \subseteq y$» означает, что каждый элемент множества x является также элементом множества y или, другими словами, что x есть ***подмножество*** y (или x ***включено в*** y). Желая выразить тот факт, что t и s обозначают один и тот же объект, мы будем писать «$t = s$».

---

*) Мы здесь не будем уточнять, какие собрания объектов являются множествами. Однако мы будем избегать употребления таких связанных с понятием множества идей и процедур, которые могут привести к парадоксам. Все излагаемые здесь результаты могут быть формализованы в аксиоматической теории множеств, рассмотренной в главе 4. Термин «класс» иногда употребляют как синоним термина «множество», но мы его здесь избегаем, поскольку он в главе 4 употребляется в другом значении. Если свойство $P(x)$ определяет некоторое множество, то это множество часто обозначают через $\{x \mid P(x)\}$ или $\hat{x}(P(x))$.

Как обычно, «$t \neq s$» означает отрицание «$t = s$». Для множеств x и y мы говорим, что $x = y$ в том и только в том случае, если $x \subseteq y$ и $y \subseteq x$, т. е. в том и только в том случае, если x и y имеют одни и те же элементы. Если $x \subseteq y$, но $x \neq y$, то мы говорим, что x есть *собственное* подмножество y, и пишем $x \subset y$.

Объединение $x \cup y$ множеств x и y определяется как множество всех объектов, являющихся элементами хотя бы одного из множеств x и y. Отсюда сразу следует, что $x \cup x = x$, $x \cup y = y \cup x$ и $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$. *Пересечение* $x \cap y$ есть множество элементов, принадлежащих и x и y. Нетрудно проверить, что $x \cap x = x$, $x \cap y = y \cap x$, $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$, $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ и $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$. *Относительным дополнением* $x - y$ называется множество тех элементов x, которые не являются элементами y. Мы постулируем также существование пустого множества 0, т. е. множества, которое вовсе не имеет элементов. Легко видеть, что $x \cap 0 = 0$, $x \cup 0 = x$, $x - 0 = x$, $x - x = 0$. Два множества x и y называются *непересекающимися*, если $x \cap y = 0$.

Пусть даны какие-нибудь объекты $b_1, \ldots, b_k$; множество, элементами которого являются все эти объекты и только они, обозначается через $\{b_1, \ldots, b_k\}$. В частности, $\{x, y\}$ есть множество с двумя элементами x и y; если при этом $x \neq y$, то $\{x, y\}$ называется *неупорядоченной парой* (или просто *парой*) объектов x и y. Множество $\{x, x\}$ обозначается также через $\{x\}$ и называется *одноэлементным множеством* с элементом x. Заметим, что $\{x, y\} = \{y, x\}$. Через $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ мы обозначаем *упорядоченную n-ку объектов* $b_1, \ldots, b_n$. Основное свойство упорядоченных n-ок состоит в том, что $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ тогда и только тогда, когда $b_1 = c_1, \ldots, b_n = c_n$. Так, в частности, $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle b_2, b_1 \rangle$ в том и только в том случае, если $b_1 = b_2$. Упорядоченные двойки называются *упорядоченными парами*. Если X — множество и n — целое положительное число, то через X^n мы обозначаем множество всех упорядоченных n-ок $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ элементов $b_1, \ldots, b_n$ множества X; при этом мы условимся под X^1 понимать X. X^n называется *n-кратным декартовым произведением X на себя* или *n-й декартовой степенью* множества X. Если Y и Z — множества, то $Y \times Z$ означает множество всех таких упорядоченных пар $\langle y, z \rangle$, что $y \in Y$ и $z \in Z$. $Y \times Z$ называется *декартовым произведением* множеств Y и Z.

Под *n-местным отношением* (*отношением с n аргументами*) на множестве X мы понимаем всякое подмножество множества X^n, т. е. всякое множество n-ок элементов X. Например, 3-местное отношение «между» для точек на прямой представляет собой множество всех троек $\langle x, y, z \rangle$ таких, что точка x лежит между точками y и z. Двуместное отношение называют также *бинарным* отношением; например, бинарное отношение отцовства на множестве всех людей есть множество всех упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$ таких, что x и y — люди и x есть отец y. Одноместное отношение на X есть подмножество X и называется *свойством* на X.

Пусть R — бинарное отношение на множестве X. *Областью определения* R называется множество всех y таких, что $\langle y, z\rangle \in R$ хотя бы при одном z; *множеством значений* R называется множество всех z таких, что $\langle y, z\rangle \in R$ хотя бы при одном y; наконец, объединение области определения и множества значений R называется *полем* отношения R. Отношение R^{-1}, *обратное к* R, определяется как множество всех упорядоченных пар $\langle y, z\rangle$ таких, что $\langle z, y\rangle \in R$. Так, например, область определения отношения $<$ на множестве ω всех неотрицательных целых чисел есть ω, множеством значений этого отношения служит $\omega - \{0\}$, а обратным отношением является отношение $>$.

Замечание. Часто вместо $\langle x, y\rangle \in R$ пишут xRy. Так, в приведенном примере мы обычно пишем $x<y$ вместо $\langle x, y\rangle \in <$.

Бинарное отношение R называется *рефлексивным*, если xRx для любого x из поля отношения R, *симметричным*, если из xRy следует yRx, и *транзитивным*, если из xRy и yRz следует xRz. Например, отношение $\leqslant$ на множестве целых чисел рефлексивно и транзитивно, но не симметрично. Отношение «иметь по крайней мере одного общего родителя» на множестве людей рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

Бинарное рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*. Примеры отношений эквивалентности: (1) отношение *тождества* I_X на произвольном множестве X, состоящее из всех пар $\langle y, y\rangle$, где $y \in X$; (2) отношение параллельности между прямыми в плоскости; (3) отношение $x \equiv y \pmod n$, означающее, что x и y целые и $x-y$ делится на данное фиксированное целое положительное число n; (4) отношение между прямолинейными направленными отрезками в трехмерном пространстве, имеющее место тогда и только тогда, когда отрезки имеют одинаковые направление и длину; (5) отношение конгруэнтности на множестве треугольников в плоскости; (6) отношение подобия на множестве треугольников в плоскости. Пусть дано отношение эквивалентности R на множестве X и некоторый элемент y множества X. Определим $[y]$ как множество всех таких z из X, для которых yRz. Множество $[y]$ называется *классом R-эквивалентности*, определяемым элементом y. Легко видеть, что $[y]=[z]$ тогда и только тогда, когда yRz, и если $[y] \neq [z]$, то $[y] \cap [z] = 0$, т. е. различные классы R-эквивалентности не имеют общих элементов. Таким образом, X полностью разбивается на классы R-эквивалентности. В примере (1) классами эквивалентности являются одноэлементные множества $\{y\}$, где $y \in X$. В примере (2) классы эквивалентности могут рассматриваться как направления в данной плоскости. В примере (3) имеется n классов эквивалентности, k-й класс эквивалентности, $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ состоит из всех тех чисел, которые при делении на n дают в остатке k. В (4) классы эквивалентности суть трехмерные векторы.

Бинарное отношение f называется *функцией*, если из $\langle x, y\rangle \in f$ и $\langle x, z\rangle \in f$ следует $y=z$. Для любого x из области определения функции f существует единственный элемент y такой, что $\langle x, y\rangle \in f$; этот элемент y обозначается через $f(x)$. Если x принадлежит области определения f, то говорят, что $f(x)$ определено. Если f есть функция с областью определения X и множеством значений Y, то говорят, что *f отображает X на Y*. Если f отображает X на Y и $Y \subseteq Z$, то говорят, что *f отображает X в Z*. Например, если $f(x) = 2x$ для любого целого x, то мы можем сказать, что f отображает множество всех целых чисел на множество всех четных чисел и что f отображает множество всех целых чисел в множество всех целых чисел. Функция, область определения которой состоит из n-ок, называется функцией от n аргументов. *(Всюду определенной) функцией от n аргументов на множестве X* называется всякая функция, у которой область определения совпадает с X^n. Обычно вместо $f(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ мы пишем $f(x_1, \ldots, x_n)$. *Частичной функцией от n аргументов на множестве X* называется всякая функция, областью определения которой служит какое-нибудь подмножество X^n. Например, обычное деление является частичной, но не всюду определенной, функцией от двух аргументов на множестве целых чисел (поскольку деление на нуль не определено). Если f есть функция с областью определения X и множеством значений Y, то *ограничением f_Z функции f множеством Z* называется функция $f \cap (Z \times Y)$. Очевидно, $f_Z(u) = v$ тогда и только тогда, когда $u \in Z$ и $f(u) = v$. *Образом множества Z при отображении посредством функции f* называется множество значений функции f_Z. *Прообразом множества W при отображении посредством функции f* называется множество всех тех элементов u из области определения функции f, для которых $f(u) \in W$. Говорят что функция *f отображает* множество X на множество (в множество) Y, если X есть подмножество области определения f, а образом X при отображении посредством f является множество Y (подмножество множества Y). Под *n-местной операцией* (или *операцией с n аргументами*) *на множестве X* мы понимаем функцию, отображающую X^n в X. Например, обычное сложение является бинарной (т. е. двуместной) операцией на множестве натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Обычное вычитание не является бинарной операцией на множестве натуральных чисел, однако является бинарной операцией на множестве всех целых чисел.

Если f и g — функции, то композиция $f \circ g$ этих функций (иногда обозначаемая также через fg) есть, по определению, такая функция, что $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; $(f \circ g)(x)$ определено тогда и только тогда, когда определены $g(x)$ и $f(g(x))$. Например, если $g(x) = x^2$ и $f(x) = x + 1$, то $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ и $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$. Или, например, если $g(x) = -x$ для каждого вещественного числа x, а $f(x) = \sqrt{x}$ для каждого неотрицательного вещественного x, то $(f \circ g)(x)$ определено только для $x \leqslant 0$ и $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x}$. Функция f, для которой из $f(x) = f(y)$ следует $x = y$, называется *взаимно однозначной* функцией (или (1-1)-функцией).