

Журнал Квант 1978 №7

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
Ж92

Ж92 Журнал Квант 1978 №7 / – М.: Книга по Требованию, 2024. – 68 с.

ISBN 978-5-458-30636-2

Журнал Квант 1978 №7

ISBN 978-5-458-30636-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

красящего вещества на земле — хлорофилла. Как известно, хлорофилл окрашивает листья растений в зеленый цвет. Поместив листья в спирт, можно получить раствор хлорофилла в спирте и провести такой опыт.

Поставьте на лист белой бумаги стакан и медленно наливайте в него раствор хлорофилла. Сначала дно стакана на просвет будет казаться зеленым, а затем, при большой толщине слоя, раствор приобретет насыщенный темно-красный цвет.

Вернемся к зеленому стеклу. Можно еще сильнее запутать вопрос о цвете стекла, если после лампочки накаливания посмотреть сквозь кусочки стекла на раскаленный конец кочерги. Уже через три кусочка стекла он будет виден рубиново-красным. Вот вам и второй неожиданный результат: видимый цвет стекла зависит не только от его толщины, но и от того, на какой светящийся предмет мы смотрим сквозь это стекло. Слой из трех кусочков стекла кажется бесцветным при наблюдении нити лампы накаливания и красным — при наблюдении конца раскаленной кочерги.

С кочергой можно сделать еще один опыт, из которого следует практически важный вывод. Вынутая из печки кочерга быстро остывает. Попробуйте проследить сквозь стекла за концом кочерги во время остывания. Как мы уже говорили, конец раскаленной кочерги виден красным сквозь три кусочка стекла. Конец несколько остывшей кочерги кажется красным уже через два кусочка. Подождя еще немного, вы увидите конец кочерги красным даже через один кусочек зеленого стекла. Из этого опыта следует, что, чем выше температура раскаленного тела, тем толще должен быть слой стекла, чтобы произошло изменение его цвета. Значит, по толщине слоя стекла, необходимого для изменения цвета, можно судить о температуре раскаленного тела.

Опыты с кочергой делают понятным устройство чрезвычайно остроумного и простого прибора, служащего для определения температур раскаленных тел, — пирометрического клина (рис. 2). Он представляет со-

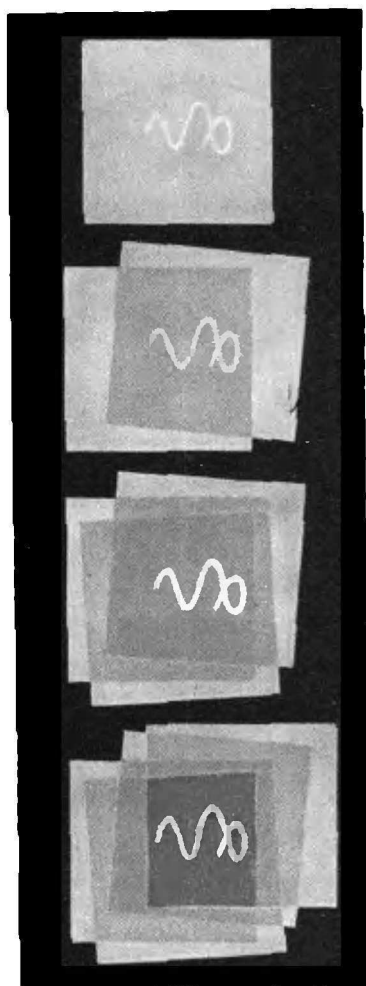


Рис. 1. Изменение видимого цвета нити накаливания от зеленого до красного при наблюдении через разное число кусочков зеленого стекла.

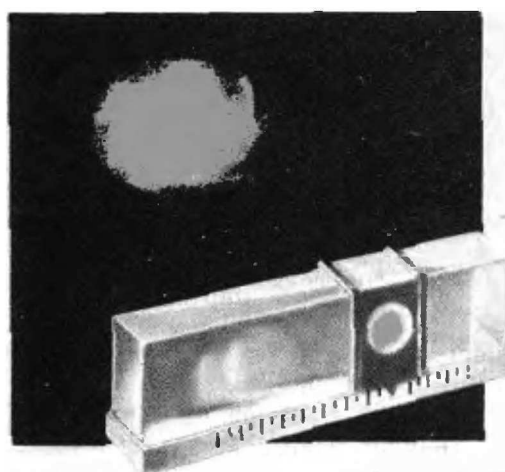


Рис. 2. Пирометрический клин — прибор для определения температур раскаленных тел.

Рис. 3. Вид зеленого пейзажа через синие очки.

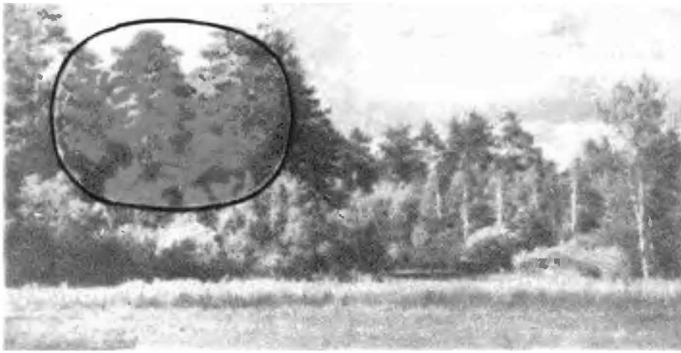


Рис. 4. Опыт, не сделанный Ньютоном. При прохождении белого света сквозь пирометрический клин в спектре остаются зеленые и красные лучи.

бой действительно клин из зеленого стекла, толщина которого плавно возрастает от одного конца к другому. Клин движется в металлической оправке с отверстием для наблюдения раскаленного тела. По краю клина нанесена шкала температур, причем температура растет от тонкого конца клина к толстому. Наставив отверстие оправки на раскаленное тело, надо двигать клин в оправке до тех пор, пока не произойдет изменение видимого цвета тела. Тогда на шкале против указателя, соединенного с оправкой, можно прочесть температуру раскаленного тела.

Пирометрическим клином особенно часто пользуются для определения температуры расплавленного металла, например, в мартеновских печах. Несмотря на свое простое устройство, клин в опытных руках дает высокую точность.

Вы познакомились с принципом действия полезного прибора, использующего свойства зеленого стекла, но загадка самого стекла осталась загадкой.

Опыт, не сделанный Ньютоном, и ландшафтная живопись

Наверное, многие из вас помнят знаменитый опыт Ньютона с разложением солнечного луча в разноцветный спектр при помощи стеклянной призмы. Этот опыт показал, что солнечный свет представляет смесь лучей различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового. Ньютон почему-то не попытался несколько усложнить этот опыт: поставить на пути солнечного луча цветное стекло или сосуд с окрашенной жидкостью. Во всяком случае, в своих трудах Ньютон не описывает такого опыта.

Опыт с красным стеклом, собственно, ничего интересного и не дал бы. Вместо разноцветной полоски спектра остался бы только участок, соответствующий красным лучам. Результат можно было предсказать заранее: красное стекло потому и красное, что пропускает только красные лучи и поглощает все остальные.

Гораздо более интересен опыт с зеленым стеклом или сосудом, наполненным раствором хлорофилла. В этих случаях от спектра останутся уже не одна, а две полоски: зеленая и темно-красная. А это значит, что зеленое стекло и раствор хлорофилла пропускают не только зеленые, но и красные лучи.

По поводу хлорофилла очень интересны замечания знаменитого русского ботаника К. А. Тимирязева: «Убедиться в том, что хлорофилл пропускает красные лучи, можно очень легко: стоит на залитый ярким солнечным светом ландшафт посмотреть через особое синее стекло (рис. 3), которое пропускает красные и синие лучи, но задерживает зеленые, для того, чтобы перед нашими изумленными взорами вся природа совершенно преобразилась — под обычным синим небом мы увидим кроваво-красную растительность. Не в этой ли особенности цвета хлорофилла лежат те трудности, с которыми, очевидно, приходится бороться ландшафтной живописи? На палитре живописца, по-видимому, нет тех зеленых тонов, которые представляет вблизи ярко освещенная зелень.»

Оставим, однако, живопись пока в стороне и вернемся к пирометрическому клину. Несколько видоизменим описанный выше опыт с клином. В качестве источника света используем нить лампы накаливания и между ней и призмой поместим пирометрический клин (рис. 4). На стене мы опять увидим две полоски — зеленую и красную, причем соотношение яркостей этих полосок будет зависеть от толщины клина в месте прохождения светового луча. Если луч проходит сквозь тонкую часть клина, зеленая полоска значительно ярче, чем красная. При увеличении толщины клина яркость обеих полосок снижается, и, начиная с некоторого момента, красная полоска становится ярче зеленой. Когда зеленая полоска ярче красной, нить видна зеленой, при обратном соотношении яркостей полосок — красной. При равенстве яркостей полосок нить кажется бесцветной.

Как будто загадка зеленого стекла разгадана. Однако остается еще

объяснить, почему с ростом толщины стекла соотношение яркостей красной и зеленой полосок меняется на обратное. Оказывается, объяснение вытекает из важного закона оптики, открытого одним бравым моряком лет двести тому назад.

Капитан дальнего плавания и геометрическая прогрессия

Капитан дальнего плавания француз Пьер Бугер, живший в первой половине восемнадцатого столетия, не был, пожалуй, простым моряком. Им написаны объемистые трактаты по конструкции судов, по навигации и другим отраслям морского дела. Французская Академия наук присудила Бугеру три премии за работы по морскому делу и избрала его своим членом. Вкус к морской науке Бугер унаследовал от своего отца, профессора гидрологии.

Если морем Бугер занимался по наследству, то оптикой он занялся по собственному почину. Бугер первый обратил внимание на проблемы, связанные с измерениями силы света и освещенности. Он придумал первые приборы для измерения силы света и установил, что сила света Солнца в 300 тысяч раз больше силы света Луны, а в его «Оптическом трактате» содержался очень важный закон ослабления света в поглощающих телах.

Чтобы понять смысл этого закона (его также называют законом Бугера), воспользуемся не очень правдоподобной, но наглядной аналогией из области спорта. Представим себе, что мы присутствуем на плохо подготовленном массовом состязании в беге на семь километров. Слабая тренировка участников стала сказываться сразу, и болельщики быстро установили следующий любопытный закон — лишь одна треть бегунов, начавших данный километр дистанции, добегают его до конца. Старт приняли 2187 участников, к концу первого километра на дистанции остались 729, к концу второго — 243, к концу третьего — 81, четвертого — 27, пятого — 9, шестого — 3. Наконец, седьмой километр заканчивает только один бегун, объявленный победителем. Судьям даже не пришлось восполь-

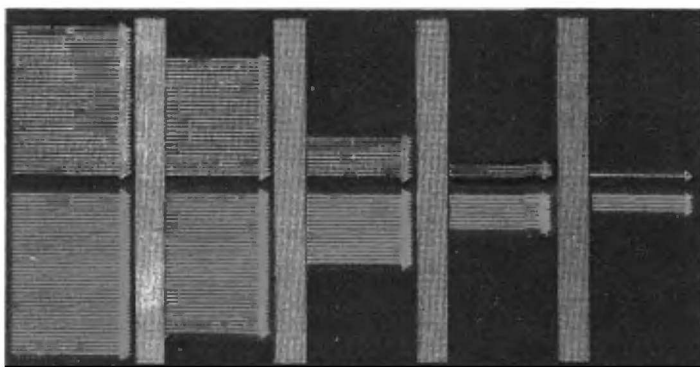


Рис. 5. Иллюстрация применения закона Бугера для объяснения изменения цвета нити лампы накаливания при увеличении числа зеленых стекол.

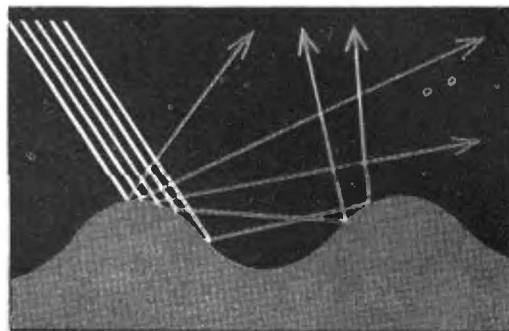


Рис. 6. Острый глаз древнерусского художника заметил изменение цвета в глубине складок ткани, происходящее за счет повторных отражений.

зоваться секундомером для определения того, кто первым коснулся финишной ленточки.

Выпишем в строку числа бегунов, пробежавших различные дистанции:
2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

Нетрудно видеть, что эти числа образуют убывающую геометрическую прогрессию, в которой каждое последующее число в три раза меньше предыдущего, стоящего слева от него.

Вернемся от спорта к оптике. Возьмем кусок окрашенного стекла. Допустим, что он пропускает одну треть падающего на него света. Добавим второй такой же кусок. Он пропустит одну треть светового потока, прошедшего через первый кусок, то есть одну девятую часть светового потока, падающего на первый кусок. Поставив еще один кусок, получим одну двадцать седьмую часть и так далее.

Ясно, что такой же результат получился бы просто при увеличении толщины куска стекла вдвое, втрое и т. д. Когда толщина стекла растет, доля пропускаемого света падает по геометрической прогрессии.

Это и есть закон, открытый Бугером. В примере с бегунами мы уже видели, как быстро уменьшаются числа в геометрической прогрессии.

Еще немного спорта

Вооруженные законом Бугера, мы можем смело броситься в атаку на загадку зеленого стекла. Однако прежде вспомним опять о спорте.

Новички, так неудачно пробежавшие дистанцию в семь километров, самоуверенно вызвали на соревнование команду опытных мастеров. Мастера приняли вызов и даже предложили

весьма великодушные условия. На старт выходят все 2187 новичков и только 512 мастеров. Победившей считается команда, в которой большее число бегунов добежит до конца седьмого километра.

На состязание обе команды явились в цветных майках: новички надели зеленые майки, мастера — красные.

После первого километра сторонники новичков приободрились. Из команды новичков осталось, как и в прошлый раз, 729 бегунов, а у мастеров — 256. Большой численный перевес сохранился на стороне новичков. Поклонники мастеров были несколько обескуражены тем, что в этой команде сразу вышли из строя половина бегунов. Но один из болельщиков, сделав карандашом нехитрые выкладки на папиросной коробке, уверенно заявил, что если дело пойдет так же и дальше, то выиграют наверняка мастера.

После второго километра «зеленых» осталось 243 человека, а «красных» — 128. После третьего километра «зеленых» — 81, а «красных» — 64. Настроение сторонников новичков заметно стало падать. После четвертого километра «зеленых» — 27, а «красных» — 32. Все с почтением посмотрели на предсказателя с коробкой папирос.

Оставшиеся три километра только усугубили поражение «зеленых». После пятого километра «зеленых» — 9, «красных» — 16, после шестого — 3 и 8. Наконец, к финишу в конце седьмого километра пришли один «зеленый» и четыре «красных».

Выпишем друг под другом числа бегунов в обеих командах:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1
512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4.

Во второй строке отношение последующего числа к предыдущему равно одной второй, а в первой строке, как и раньше, — одной трети. Оказалось, что эта небольшая разница в числах не только достаточна, чтобы компенсировать большой начальный численный перевес команды «зеленых», но и привела команду «красных» к победе. Нужна была только достаточно длинная дистанция, не

менее четырех километров. На более коротких дистанциях победили бы «зеленые».

В поведении зеленых и красных лучей и «зеленых» и «красных» бегунов существует полная аналогия (рис. 5). Зеленое стекло лучше пропускает темно-красные лучи, чем зеленые, причем, согласно закону Бугера, различие в пропускании этих лучей быстро растет с ростом толщины слоя стекла («длинная дистанция»).

Но тогда естественно возникает вопрос: почему в тонком слое стекло кажется зеленым, если оно пропускает темно-красные лучи лучше, чем зеленые? Объясняется это спектральной характеристикой источника света, с которым проводился опыт: зеленый участок спектра гораздо ярче, чем темно-красный (команда «зеленых» многочисленнее «красных»). В тонком слое стекла («короткая дистанция») разница в поглощении темно-красных и зеленых лучей еще не настолько велика, чтобы перекрыть перевес в начальной яркости зеленых лучей. Основную роль играют зеленые лучи, что и дает соответствующую окраску.

С ростом толщины стекла, согласно закону Бугера, пропускание зеленых лучей падает несравненно быстрее, чем темно-красных (числа «зеленых» и «красных» бегунов на больших дистанциях). При достаточно большой толщине разница в пропускании уже так велика, что перекрывает начальный перевес в яркости зеленых лучей, и от всего спектра практически остается только темно-красная полоска.

Осталось только объяснить, какую роль играет температура раскаленного тела, на которое мы смотрим сквозь стекло. Известно, что чем сильнее мы раскалим любой металлический предмет, тем белее даваемый им свет. Недаром говорят: «довести до белого каления». Так, при недостаточном накале лампочка накаливания дает красноватый свет, при нормальном накале — гораздо более белый. Объясняется это тем, что с ростом температуры яркость зеленых и синих лучей растет гораздо быстрее, чем красных.

Значит, при более высокой температуре разница в яркостях зеленой и темно-красной частей спектра больше, и ее труднее перекрыть поглощением в стекле. Вот почему при более высоких температурах раскаленного тела для изменения цвета наблюдаемого излучения нужно более толстое стекло.

Древнерусские иконы и наблюдения Леонардо да Винчи

На некоторых древнерусских иконах бросается в глаза необычная расцветка одеяний святых. Складки изображены краской, обладающей резко отличным цветом от цвета гладких частей одеяния. Например, красные складки на зеленом плаще (рис. 6) или оранжевые складки на синем одеянии. Острый глаз древнерусского богомаза заметил, что некоторые ткани обладают двухцветностью и в складках приобретают другой цвет, чем на ровной поверхности. Причина двухцветности тканей та же, что и в опыте с пирометрическим клином.

Если луч света, отраженный от двухцветной ткани, пропустить сквозь призму, то в спектре обязательно останутся две цветные полосы. Для зеленой двухцветной ткани картина будет той же, что с зеленым стеклом: останутся красная и зеленая полосы, остальные лучи поглотятся.

Двухцветная зеленая ткань лучше отражает красные лучи, чем зеленые, но при однократном отражении от гладкой поверхности ткани сказывается большая яркость зеленых лучей в падающем свете. Поэтому в однократно отраженном свете все-таки преобладают зеленые лучи.

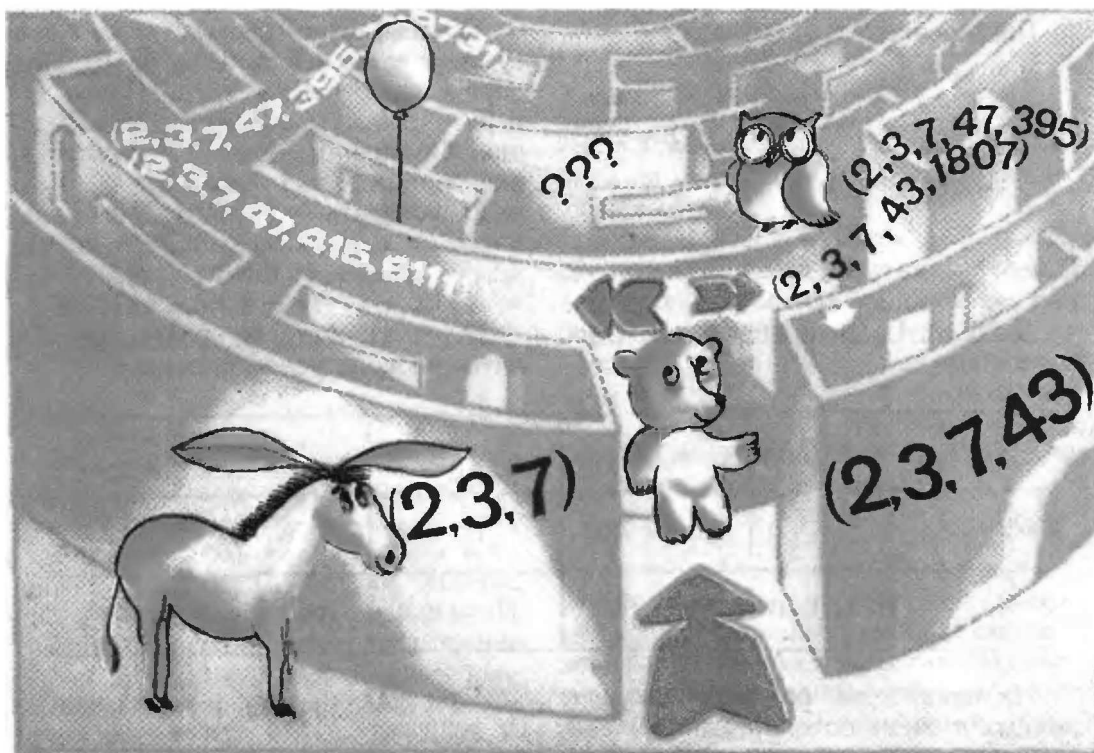
В складках ткани свет испытывает по крайней мере два последовательных отражения. При втором отражении красные лучи отражаются опять сильнее, чем зеленые, и в результате двукратного отражения происходит то же, что и в зеленом стекле большой толщины: яркость красных лучей становится больше яркости зеленых лучей, и ткань меняет цвет. Многократные отражения усиливают этот эффект.

Большинство обычных тканей обладает прямо противоположными

свойствами. В складках получается более насыщенный, но такой же цветовой тон, что и на ровной поверхности. Объясняется это опять-таки повторными отражениями. Свет, отраженный от таких тканей, после разложения призмой дает только одну полосу в спектре вместо двух полосок у двухцветных тканей. Например, свет, однажды отраженный от желтого бархата, дает в спектре широкую полосу с наибольшей яркостью в желтой части. Кроме желтых лучей, в спектре присутствуют еще зеленые и голубые лучи. При двукратном отражении полоса в спектре становится уже, так как голубые лучи практически исчезают совсем, а зеленые сильно ослабляются. Это работает все тот же закон геометрической прогрессии. В результате желто-оранжевый отраженный свет делается более насыщенным.

Один из наиболее разносторонних гениев, живших когда-либо, — Леонардо да Винчи — не только заметил своим глазом художника эту особенность складок тканей, но и, как ученый, дал вполне правильное объяснение наблюдаемому явлению. В «Трактате о живописи» он пишет: «Отраженные цвета имеют гораздо большую красоту, чем природный цвет этих тел, как это видно на открывающихся складках золотых тканей ..., когда одна поверхность отражается в другой, стоящей напротив, а эта в ней, и так последовательно до бесконечности».

В том же «Трактате о живописи» сказано: «Рефлексы (отражения) от живого тела, получающего свет от другого живого тела, более красны и более превосходно телесного цвета, чем любая другая часть живого тела, какая только может быть у человека». Созерцая с наслаждением в залах ленинградского «Эрмитажа» изумительные полотна Ван-Дейка и Рубенса, нетрудно заметить, что и для этих великих мастеров эффект многократных отражений не был тайной.



А. Гейн

На пути к решению

Иногда небольшое изменение или обобщение условия школьной задачи может привести к интересным теоремам и даже нерешенным проблемам. Так, несколько лет назад В. И. Ариольд предложил задачу: «Описать все наборы из n натуральных чисел, таких, что произведение любых $n-1$ из них в сумме с единицей делится на оставшееся». Об этой задаче мы писали и в «Кванте» («Квант», 1976, № 12, с. 5). Получается она из совсем несложной школьной задачи: найти все такие тройки чисел, отличных от единицы, что произведение любых двух чисел тройки, сложенное с единицей, делится на третье число («Сборник задач московских математических олимпиад», М., «Просвещение», 1965, с. 70, задача 215). В ответе — единственный набор: (2, 3, 7). Если отбросить требование о том, чтобы все числа были отличны от единицы, получатся еще три набора: (1, 1, 1), (1, 1, 2) и (1, 2, 3). Столь же легко описать и все такие пары и четверки чисел. А вот дать ответ для

произвольного n никак не удастся — это до сих пор нерешенная проблема. В замечательной книге Д. Пойа «Как решать задачу» сформулированы «правила исследователя». Перечислим некоторые из них.

Начните с частных случаев — они могут оказаться легче. Рассмотрите полученные результаты. Наблюдайте, обобщайте, проверяйте.

Проанализируйте метод решения, расчлени его и посмотрите, какие его части могут быть перенесены на общий случай.

Подойдите к задаче с различных сторон, исследуйте различные детали; исследуйте одни и те же детали, но с разных точек зрения, попытайтесь усмотреть в каждой детали некоторую новую интерпретацию задачи. Ищите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями. Попробуйте увидеть знакомое в том, что вы исследуете и полезное в том, что оказалось знакомым.

Вглядитесь в метод. Постарайтесь выделить в нем главное. Постарайтесь улучшить его.

Попробуем, пользуясь «правилами исследователя», внимательно присмотреться к тому, что известно о задачах с $n = 2, 3$ и 4; может быть, это поможет нам хоть чуточку приблизиться к решению общей проблемы.

1. Повторение

— А разве ты не видишь?
— Нет.
— И я тоже!

И разговора Иа-Иа с Винни
Пухом^{*)}

С чего же начать? Прежде всего — с ответов в школьных вариантах задачи ($n = 2, 3, 4$). Выпишем эти ответы в таблицу:

$n = 2$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 3)		
$n = 3$	(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 3)	(2, 3, 7)	
$n = 4$	(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 2)	(1, 1, 2, 3)	(1, 2, 3, 7)	(2, 3, 7, 43)

Не правда ли, решения для различных n очень похожи? Они образуют вертикальные серии и получаются добавлением единицы. Это наблюдение распространяется на всевозможные n с помощью следующей очевидной леммы:

Лемма 1. Пусть набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ является решением задачи для $n = k$. Тогда набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_k, 1)$ — решение задачи для $n = k + 1$. И наоборот: если среди $k + 1$ чисел, являющихся решением задачи для $n = k + 1$, имеется единица, то, убрав ее из набора, получим решение задачи для $n = k$.

А как рождаются новые серии: (2, 3), (2, 3, 7), ...?

Пусть $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$. По условию задачи, если $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ — решение задачи для $n = k + 1$, то $x_1 \dots x_k + 1 = Cx_{k+1}$, где C — некоторое натуральное число. Попробуем положить C равным единице (так получаются числа $3 = 2 + 1$, $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $43 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$). Докажем такую лемму:

Лемма 2. Если набор чисел $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$, то набор $(x_1, \dots, x_k, x_1 \dots x_k + 1)$ — решение задачи для $n = k + 1$.

^{*)} Все энграммы взяты из сказки Младна «Винни Пух и Все. Все. Все».

Произведение первых k чисел в сумме с единицей делится на x_{k+1} по определению числа x_{k+1} . Пусть теперь число x_{k+1} входит в произведение. Обозначим через X_i произведение первых $k - 1$ чисел без x_i . Нам надо показать, что $X_i x_{k+1} + 1$ делится на x_i . Это следует из того, что $x_{k+1} = X_i x_i + 1$; тогда $X_i x_{k+1} + 1 = X_i (X_i x_i + 1) + 1 = x_i (X_i)^2 + (X_i + 1)$, а второе слагаемое делится на x_i по условию леммы.

При помощи лемм 1 и 2 из каждого решения задачи для $n = k$ могут быть получены два решения задачи для $n = k + 1$. На рисунке 1 показано, как из решений задачи для $n = 2$ при помощи леммы 1 (красные стрелки) и при помощи леммы 2 (синие стрелки) таким способом получаются решения задачи сначала для $n = 3$, а затем — для $n = 4$.

Нигде не следует, что таким путем мы получим все решения. Впрочем, легко доказать, что наборами, указанными на рисунке 1, исчерпываются все решения нашей задачи для $n = 2, 3, 4$. К сожалению, из решений для $n = 4$ таким способом получаются не все решения для $n = 5$; кроме решения (2, 3, 7, 43, 1807), получающегося по рецепту леммы 2, есть еще такое: (2, 3, 7, 47, 395).

2. Сведение к уравнению

Даже немножечко,
чайная ложечка, —
это уже хоришо.

Винни Пух

Лемма 1 позволяет здесь и дальше не рассматривать решений, содержащих 1, — с ними все ясно. Тогда, если набор $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$, то все числа x_i различны (подумайте, почему).

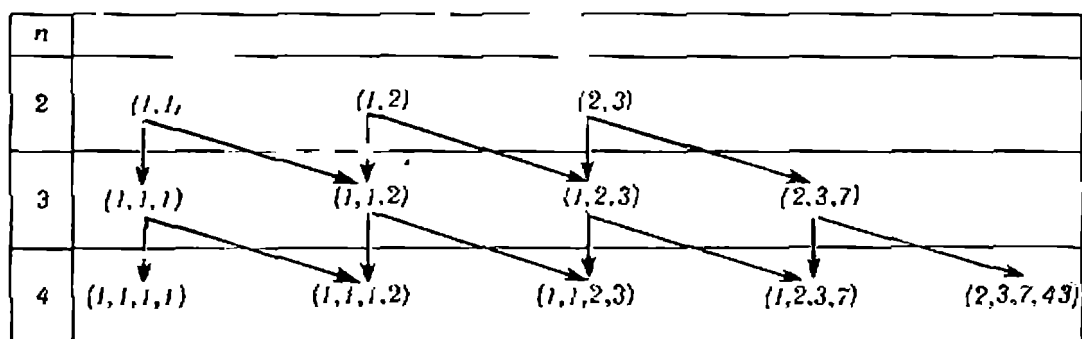


Рис. 1.

Анализируя ответы задачи при $n = 2, 3$ и 4 , мы можем создать гипотезы лишь о строении этих ответов, а отнюдь не о том, как решать задачу. Посмотрим теперь, как эти ответы получаются для $n=3$.

Пусть (x, y, z) — некоторое решение задачи с тремя числами. Тогда должны выполняться равенства

$$\begin{cases} xy + 1 = k_1 z, \\ xz + 1 = k_2 y, \\ yz + 1 = k_3 x, \end{cases}$$

где k_1, k_2, k_3 — какие-то натуральные числа.

Перемножив эти соотношения, получим

$$xyz(xyz + x + y + z) + xy + xz + yz + 1 = k_1 k_2 k_3 xyz.$$

Отсюда вытекает, что $xy + xz + yz + 1$ делится на xyz , то есть

$$xy + xz + yz + 1 = Axyz,$$

где A — натуральное число. Разделив обе части этого равенства на xyz , получим

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = A. \quad (1)$$

Итак, любое решение задачи для $n = 3$ удовлетворяет уравнению (1). Освободившись от знаменателя, легко увидеть, что и обратно: если x, y, z — натуральные числа, удовлетворяющие — при некотором натуральном A — уравнению (1), то (x, y, z) — решение задачи для $n = 3$.

Левая часть (1) принимает наибольшее значение при наименьших значениях x, y, z ; если $2 \leq x < y < z$, то

$$A \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{27}{24} < 2.$$

Следовательно, $A = 1$ и x, y, z удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 1.$$

Ну что же, первый шаг очень естествен. Воспользовавшись определением делимости, мы от несколько неопределенных слов — одно число делится на другое — перешли к уравнениям — вполне конкретным и знакомым нам объектам. Правда, появились новые неизвестные k_1, k_2, k_3 , которых раньше не было, но это — обычная расплата за «некоторую определенность». И второй шаг вполне понятен — желание избавиться от «лишних» неизвестных (за счет перехода от системы к одному уравнению).

Продолжав аналогичную операцию для произвольного n , мы снова получим уравнение вида

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = A, \quad (2)$$

где A — натуральное число. Слова легко проверяется обратное утверждение:

если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — натуральные числа, удовлетворяющие — при некотором натуральном A — уравнению (2), то набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является решением нашей задачи.

Итак, исходная задача эквивалентна задаче нахождения решений уравнения (2) в натуральных числах при всевозможных натуральных A . Продолжение, конечно, небольшое, но «даже немножечко... — это уже хорошо!»

Окрыленные успехом, мы можем попытаться доказать, что в уравне-

нии (2) $A = 1$. Поскольку можно считать, что $2 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, для A получаем оценку:

$$A = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \dots x_n} \leq \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}.$$

Однако уже для $n = 14$ сумма, стоящая в правой части, больше 2. Но, может быть, из этой оценки все-таки можно вывести, что величина A ограничена и потому может принимать лишь конечное число значений? Так ведь нет: сумма $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ неограниченно возрастает с увеличением n .

Упражнение 1. Докажите это.

По-видимому, наш метод оценки слишком груб. Нельзя ли его улучшить? Ясно, например, что все числа, входящие в решение, попарно взаимно просты. Поэтому, в частности, если $x_1 = 2$, то $x_3 > 4$.

Покажем, что сумму $\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \dots x_n}$ можно оценить сверху числом $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p}$, где p — n -е простое число.

Действительно, обозначим через p_i какой-нибудь простой делитель числа x_i . Заметим, что $p_i \leq x_i$. Поскольку числа x_i попарно взаимно просты, все p_i различны. Будем считать их упорядоченными по величине. Тогда $2 \leq p_1, 3 \leq p_2, 5 \leq p_3$ и т. д. Заменяя x_i на p_i , получаем требуемую оценку.

Может быть, сумма величин, обратных простым числам, не превосходит некоторого постоянного числа M ? Это означало бы, что $A < M + 1$. Оказывается, и это неверно: с увеличением количества слагаемых сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$ возрастает неограниченно *). Тем не менее полу-

ченная оценка позволяет утверждать, что $A = 1$ для всех $n \leq 58$. Утешительного мало, но по крайней мере ясно, почему, анализируя ответы, мы не натолкнулись на решение с константой $A = 2$: вряд ли кому-нибудь придет в голову рассматривать задачу сразу для шестидесяти чисел.

3. Добавление одного — ничего нового

Безвозмездно, то есть даром.
С о в а

Кто может заранее знать, какой путь приведет к успеху? Терпение (но не упрямство) — вот принцип исследователя. Вернемся еще раз к началу нашего путешествия. Теперь у нас в руках анализ ответов и методов решения задачи для частных случаев. Пристального внимания заслуживают леммы 1 и 2 — они содержат хоть какой-то алгоритм нахождения некоторых решений. Какой подход они предлагают? В обеих леммах говорится о том, как из решения задачи для $n = k$ получить решение задачи для $n = k + 1$. Нам такой подход вполне привычен (вспомните метод математической индукции). Попробуем, считая, что задача решена для $n = k$, решить ее для $n = k + 1$.

Итак, пусть $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$. Обозначим произведение $x_1 \dots x_k$ через f_k . Тогда

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{f_k} = A.$$

Если число x_{k+1} дополняет набор $x_1, \dots, x_k$ до решения задачи для $n = k + 1$ и $x_{k+1} \neq 1$, то имеет место соотношение

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{f_k x_{k+1}} = A$$

с тем же самым A (продумайте это).

Приравняв левые части этих двух равенств и отбрасывая одинаковые слагаемые, получаем

$$\frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{f_k x_{k+1}} = \frac{1}{f_k};$$

следовательно, $x_{k+1} = f_k + 1$. Именно так получается решение и по

*) Доказательство этого утверждения, принадлежащего Л. Эйлеру, можно найти в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (М., ГТТИ, 1954).