А.П. Норден

Об основаниях геометрии

Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.П. Норден
А11 Об основаниях геометрии: Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей / А.П. Норден – М.: Книга по Требованию, 2023. – 532 с.

ISBN 978-5-458-36745-5

Сборник рассчитай на читателя, имеющего математическую подготовку и объеме трех курсов университета или полного курса педагогического института; поэтому в нем имеется лишь незначительное число примечаний, поясняющих текст или дающих библиографическую ссылку. Эти примечания, сделанные переводчиком работы или редактором сборника, отмечены всюду [Ред.], в отличие от примечаний самого автора. Фамилии всех переводчиков работ, помещенных в сборнике, указаны в содержании. Новые переводы сделаны: писем и черновых набросков Гаусса — В. Ф. Каганом и А. II. Норденом, работы Кали и первой работы Пуанкаре—Б. Л. Лаптевым, статей Миндинга и работы Клейна о неевклидовой геометрии — А. Л. Широковым. Все старые переводы были тщательно сверены с оригиналами, и в них внесены многочисленные исправления. Комплектование сборника, составление вступительной статьи и большего числа примечаний и редактирование переводов осуществлены А. П. Норденом; переводы работ Бельтрам и отредактировал Б. Л. Лаптев, добавивший к ним ряд дополнительных примечаний. Сборник подготовил к изданию И. Н. Бронштейн; им же составлено приложение к «Аппендиксу» Больаи, ряд примечаний и библиографические сведения.

ISBN 978-5-458-36745-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1893 году, к столетнему юбилею со дня рождения Лобачевского, Казанское физико-математическое общество выпустило в свет сборник «Об основаниях геометрии». Он содержал переводы шести важных работ, посвященных интерпретации геометрии Лобачевского и развитию его идей: две работы Бельтрами (об интерпретации неевклидовой геометрии и о пространствах постоянной кривизны), работы Римана, Гельмгольца и Пуанкаре об основаниях геометрии и замечание Ли на работу Гельмгольца; к ним была приложена переписка Гаусса с Шумахером. Сборник быстро разошелся и через два года вышел вторым изданием; в нем был дополнительно помещен знаменитый мемуар Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях». Оба издания давно стали библиографической редкостью; помещенные в них работы почти не издавались [1]).

К столетию со дня смерти Лобачевского Государственное издательство технико-теоретической литературы повторяет ценное начинание Казанского физико-математического общества и выпускает в свет сборник под тем же названием, но значительно расширенный.

В сборник включено 22 классические работы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Эти работы сгруппированы по трем отделам.

Первый отдел — работы самого Лобачевского, Яноша Больаи и Гаусса по неевклидовой геометрии. Из работ Лобачевского в этот отдел включены начальные, самые существенные части первых опубликованных им сочинений «О началах геометрии» и «Воображаемая геометрия», представляющих синтетическое и аналитическое построение его геометрической системы [2]), а также замечательное вступление к «Новым началам геометрии с полной теорией парал-

---

1) Мемуар Гаусса выходил отдельным изданием в другом переводе еще в 1887 году в Петербурге; работа Римана была включена в русское издание его сочинений (1948) также в другом переводе. Эти переводы помещены в настоящем сборнике.

2) Публикуемые здесь части обоих сочинений Лобачевского доведены до аналитических приложений «воображаемой геометрии» — вычисления длин, площадей, поверхностей и объемов — и основанному на них нахождению значений определенных интегралов. Этим вопросам посвящена бо́льшая часть работ Лобачевского. Читатель может получить представление об этой стороне творчества Лобачевского по его сочинению «Пангеометрия» (Н. И. Лобачевский, Три сочинения по геометрии, М., 1956, стр. 137—217) или по полному тексту сочинений (Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., тт. I и III).

лельных»[1]). Творчество Яноша Больаи отражено в его основной работе «Аппендикс», помещенной здесь полностью. Гаусс ничего по неевклидовой геометрии не опубликовал; об его открытии узнали только после его смерти из писем к друзьям и черновых набросков. Соответствующие отрывки из писем и два наброска Гаусса помещены в сборнике; они публикуются в полном виде на русском языке впервые[2]).

Второй отдел — основы теории поверхностей и интерпретации геометрии Лобачевского. Он начинается работами по теории поверхностей — основным мемуаром Гаусса и четырьмя статьями Миндинга (о внутренней геометрии поверхностей). За ними следует работа Бельтрами, помещенная в казанском издании «Об основаниях геометрии», содержащая первую интерпретацию геометрии Лобачевского; эта работа дополнена статьей Гильберта о поверхностях постоянной кривизны. Отдел заканчивается известными работами Кэли и Клейна о проективном мероопределении и проективной интерпретации неевклидовой геометрии и работой Пуанкаре о ее конформной интерпретации. Работы Миндинга, Кэли, Клейна и Пуанкаре появляются на русском языке впервые.

Последний отдел — развитие идей геометрии Лобачевского — начинается известными работами Римана, Бельтрами, Гельмгольца, Ли и Пуанкаре об основаниях геометрии, которые были помещены в казанском издании сборника; мемуар Римана дополнен комментариями Вейля. За ними следует знаменитая «Эрлангенская программа» Клейна. Сборник не отвечал бы своему назначению, если бы в нем не были отражены групповой и аксиоматический методы обоснования геометрии, но все работы этих направлений — например, «Theorie der Transformationsgruppen» Софуса Ли, «Grundlagen der Geometrie» Гильберта и «Основания геометрии» Кагана — велики, а делать из них извлечения невозможно без нарушения цельности работ[3]). Пришлось в этих случаях сделать исключения и поместить вместо подлинников отзывы Клейна и Пуанкаре о работах Ли и Гильберта, а также краткое изложение аксиоматической системы В. Ф. Кагана из его статьи «Теоретические основания математики». Отдел заканчивается замечательной работой Картана «Теория групп и геометрия», в которой на основе синтеза идей Клейна и Римана характеризуется новое направление в геометрии.

---

[1]) Наиболее известное и доступное сочинение Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий» в сборник не включено, так как оно является лишь позднейшей обработкой его первых работ; кроме того, оно в последнее время неоднократно издавалось с обстоятельными комментариями (два последних издания — в 1956 году в сборниках «Три сочинения по геометрии» и «Избранные сочинения по геометрии»).

[2]) Из сохранившихся черновых набросков Гаусса сюда не включены третий набросок «Параллелизм», повторяющий содержание первых двух, и важный набросок, посвященный сферической и неевклидовой тригонометрии; он изложен так конспективно, что потребовал бы очень больших комментариев. Свободное изложение этого наброска имеется в книге В. Ф. Кагана «Лобачевский и его геометрия», М., 1955, стр. 282—292 и статье А. П. Нордена «Гаусс и Лобачевский», Историко-математические исследования, вып. IX, М., 1956, 145—168.

[3]) Книга Гильберта вышла с подробными примечаниями в 1948 году; заключительная глава книги В. Ф. Кагана будет включена в сборник его геометрических работ (готовится к печати).

Сборник рассчитан на читателя, имеющего математическую подготовку в объеме трех курсов университета или полного курса педагогического института; поэтому в нем имеется лишь незначительное число примечаний, поясняющих текст или дающих библиографическую ссылку. Эти примечания, сделанные переводчиком работы или редактором сборника, отмечены всюду [*Ред.*], в отличие от примечаний самого автора.

Фамилии всех переводчиков работ, помещенных в сборнике, указаны в содержании. Новые переводы сделаны: писем и черновых набросков Гаусса — В. Ф. Каганом и А. П. Норденом, работы Кэли и первой работы Пуанкаре—Б. Л. Лаптевым, статей Миндинга и работы Клейна о неевклидовой геометрии — А. П. Широковым. Все старые переводы были тщательно сверены с оригиналами, и в них внесены многочисленные исправления.

Комплектование сборника, составление вступительной статьи и большего числа примечаний и редактирование переводов осуществлены А. П. Норденом; переводы работ Бельтрами отредактировал Б. Л. Лаптев, добавивший к ним ряд дополнительных примечаний. Сборник подготовил к изданию И. Н. Бронштейн; им же составлено приложение к «Аппендиксу» Больаи, ряд примечаний и библиографические сведения.

А. П. НОРДЕН

ОТКРЫТИЕ ЛОБАЧЕВСКОГО И ЕГО МЕСТО В ИСТОРИИ НОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

*

1. Открытие неевклидовой геометрии

Со времен первых продолжателей и комментаторов Евклида проблема пятого постулата его «Начал» и связанная с ней теория параллельных линий стали центральной проблемой обоснования геометрии. Интерес к ней не слабел в течение двух тысячелетий, и доказательство пятого постулата на основе других постулатов Евклида считалось единственно приемлемым путем решения этой проблемы [1]).

Бурное развитие математической мысли сказалось и в оживлении интереса к вопросам обоснования геометрии во Франции и Германии XVIII века. Но если во Франции проблема постулата Евклида рассматривалась как проблема методики (Лежандр), то геометры Германии связывали ее с вопросами методологии или, по выражению Гаусса, «метафизики пространства».

Вопрос о происхождении геометрических истин был также одним из центральных вопросов теории познания Канта, оказавшей длительное влияние на представителей немецкой точной науки XVIII — XIX веков. Утверждая, что основные положения геометрии имеют априорное, доопытное происхождение и коренятся в «чистом воззрении», Кант присоединяется, собственно говоря, к распространенному взгляду, согласно которому постулаты должны обладать признаком самоочевидности. С этой точки зрения проблема пятого постулата вставала с новой остротой. Только этот постулат явно не обладал самоочевидностью, а возможность его доказательства представлялась равносильной возможности априорного обоснования всей геометрии.

Именно так ставит вопрос Гаусс (1777—1855) в своем письме к Фаркашу Больаи от 16 XII 1799 [2]). Однако уверенность в возможности доказательства постулата Евклида еще долго не покидает Гаусса: об этом он определенно пишет Фаркашу Больаи еще в 1804 году [3]), и только в 1817 году он первый раз (в письме к Ольберсу) выражает свои сомнения [4]). Важно отметить, что эти сомнения Гаусс сразу же распространяет и на возможность априорного обоснования геометрии, отмечая, что «геометрию приходится ставить в один ранг не с арифметикой, существующей чисто a priori, а скорее с механикой».

---

1) См. В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955 (Очерк I — «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии», стр. 21—69).

2) См. стр. 101 настоящего сборника. (В дальнейшем страницы в примечаниях без указания источника относятся к настоящему изданию.)

3) Стр. 102.

4) Стр. 103.

Следующие годы являются переломными в истории взглядов Гаусса на теорию параллельных, но только внешний толчок, связанный с получением заметки Швейкарта [1]), заставил его в первый раз с достаточной определенностью высказать свои новые взгляды. Действительно, в письме к Герлингу по поводу этой заметки, в которой Швейкарт допускает существование *Астральной геометрии*, Гаусс говорит, что все это списано из его души [2]).

С еще большей определенностью Гаусс утверждает в 1824 году (в письме в Тауринусу) [3]) что геометрия, основанная на предположении, противоречащем постулату Евклида, «совершенно последовательна» (in sich selbst consequent). В это время ему уже известны многие из ее основных фактов, и, тем не менее, он не только не высказывает публично своих взглядов, но и определенно просит Тауринуса не обнародовать их. Лишь в 1831 году Гаусс сообщает Шумахеру о своем желании записать свои результаты [4]). Сохранилось несколько черновых набросков Гаусса по неевклидовой геометрии [5]), но эта работа не была им закончена, возможно потому, что уже в марте 1832 года он получил экземпляр «Аппендикса» Янота Больаи [6]).

Здесь уместно сделать краткий обзор тех фактов неевклидовой геометрии, которые были известны Гауссу. Он знал, что при переходе к новой геометрии определение параллельных линий, принятое в обычной геометрии, нужно заменить более сложным, но зато не зависящим от пятого постулата Евклида. Это определение и основанные на нем доказательства свойств параллельных и были изложены им в заметке 1831 года [7]). Ему было известно, что в неевклидовой геометрии сумма углов треугольника отличается от 180° и что мера этого различия пропорциональна площади треугольника [8]). Вследствие этого не существует подобных треугольников, но зато существует абсолютная мера длины [9]). Можно считать также, что еще в 1819 году Гаусс владел основными формулами гиперболической тригонометрии; об этом свидетельствует формула, приведенная им в письме к Герлингу [10]), которая выражает площадь асимптотического треугольника через константу Швейкарта C. Существует также набросок Гаусса, расшифрованный Штеккелем и относимый им к 40-м годам, содержащий вывод формул сферической и гиперболической тригонометрий, основанный на рассмотрении бесконечно малых фигур [11]).

---

1) Стр. 103—104.

2) Стр. 104. Тем не менее, нельзя утверждать, что сам Швейкарт был полностью свободен от сомнения в этом вопросе (стр. 103). Герлинг говорит, что Швейкарт только «почти убежден» в правильности своей точки зрения. Этими сомнениями можно объяснить и то, что Швейкарт так и не опубликовал своего открытия.

3) Стр. 105.

4) Стр. 106—107.

5) Стр. 108—112.

6) Стр. 113—117 (письмо Гаусса к Фаркашу Больаи).

7) Стр. 108.

8) Стр. 107.

9) Стр. 102, 105 и 106

10) Стр. 105.

11) Изложение этого вывода сделано В. Ф. Каганом в его очерке «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи» (В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 282—292).

В течение своей жизни Гаусс не только не публиковал своих исследований по неевклидовой геометрии, но и не отозвался публично о работах Больаи и Лобачевского. Его странная сдержанность обычно объясняется опасениями встретить непонимание современников. Однако нельзя недооценивать еще одного важного фактора, который объясняет и то, что период сомнений Гаусса в возможности существования неевклидовой геометрии растянулся почти на четверть века. Этим фактором являлись, по нашему мнению, философские воззрения Гаусса, который был первоначально уверен в априорном характере всей математики и отходил с позиций априоризма в геометрии весьма неуверенно, непоследовательно и неохотно [1]).

С иных, чисто материалистических позиций подходил к теории параллельных гениальный творец неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский. Еще в обозрении преподавания 1824 года он говорил, что основания математики «должны быть несомнительные для нас истины, *первые понятия о природе вещей,* которые, будучи раз приобретены, сохраняются навсегда...» [2]). В дальнейшем он еще уточняет этот тезис и прямо говорит, что источником приобретения этих понятий является опыт. «Первыми данными без сомнения будут всегда те понятия, которые мы *приобретаем в природе посредством наших чувств*» [3]).

Суждение же о всех других понятиях, которые Лобачевский называет составными, должно вытекать логически из свойств основных или простых понятий.

Исходя из этих общих принципов, Лобачевский подходит к выбору основных понятий геометрии. Он предлагает считать основным объектом геометрии *тело*, а основным отношением между телами — их *прикосновение*. Все остальные объекты, как-то: поверхность, линия, плоскость, прямая, точка и т. д., должны быть определены через эти основные понятия.

Эту точку зрения Лобачевский приводил во всех своих работах, начиная с неизданного курса лекций 1816—1817 года, и развивает подробно в 1835 году в своем фундаментальном сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» [4]). Хотя замысел Лобачевского перестроить основы геометрии и не может считаться в этой ее части вполне удавшимся, мы относимся с уважением к смелой попытке великого геометра преодолеть те трудности в основаниях геометрии, которые были осознаны и разрешены значительно позже на основе изучения наиболее ценного из наследия Лобачевского и, прежде всего, его гениальной теории параллельных.

Важность этой теории была осознана Лобачевским еще в первые годы его университетского преподавания. В первом из дошедших до нас обозрений 1822 года он пишет: «Другого рода трудность в геометрии представляет параллелизм линий, трудность до сих пор непобедимую, но между тем заключающую в себе истины ощутительные,

---

[1]) Подробнее об этом см. А. П. Норден, «Гаусс и Лобачевский», Историко-математические исследования, вып. IX, М., 1956, стр. 145—148.

[2]) См. Л. Б. Модзалевский (ред.), Материалы для биографии Н. И. Лобачевского, М., 1948, стр. 177. Курсив здесь и далее наш.

[3]) Стр. 68 настоящего сборника.

[4]) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. II, стр. 168—209.

вне всякого сомнения, и столь важные для целой науки, что никак не могут быть обойдены»[1]).

С общей точки зрения, принятой Лобачевским, пятый постулат тоже занимает особое место среди основных положений геометрии, но не по недостатку очевидности, а потому, что он говорит о сложных, «составных» понятиях и не вытекает прямо из непосредственно наблюдаемых свойств геометрических тел.

Вследствие этого Лобачевский присоединяется к общему мнению о том, что постулат Евклида требует проверки, и первоначально мыслит эту проверку в виде доказательства, которое и пытается построить. Однако в отличие от всех своих предшественников он очень скоро понял бесплодность этих попыток и встал на совершенно новый путь. «Напрасное старание со времен Евклида в продолжении двух тысяч лет, заставляли меня подозревать, — пишет он в своем сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», — что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты»[2]).

Однако в соответствии со сложной природой пятого постулата его проверка должна опираться на сложный эксперимент, требующий математической базы. Но эта база сама уже не может основываться на постулате Евклида, она должна быть геометрией, отличной от геометрии Евклида. Эту геометрию и разработал Лобачевский, назвав ее первоначально «*воображаемой*». Сочинение Лобачевского, посвященное этому вопросу, «О началах геометрии» было опубликовано в 1829 году и содержало изложение доклада, представленного физико-математическому факультету Казанского университета 11 (23) февраля 1826 года[3]).

В этом сочинении он исходит из предположения, что «угол параллелизма» не является прямым, как в геометрии Евклида, а представляет собой функцию $F(a)$ соответствующего отрезка. Указывая, далее, на то, что на предельной поверхности будет иметь место геометрия Евклида, он прямо переходит к выводу основных формул тригонометрии. Этот вывод Лобачевский завершает, определив конечное выражение функции $F(a)$ и показав, что оно содержит некоторое неопределенное постоянное число e, зависящее от выбора единицы длины[4]). Далее Лобачевский показывает, что для треугольников, длина стороны которых мала по сравнению с радиусом кривизны пространства, приближенно справедливы формулы евклидовой геометрии; это позволяет ему впоследствии говорить, что «воображаемая Геометрия обнимает употребительную Геометрию как частный случай, к которому переходим, принимая линии бесконечно малыми»[5]).

---

[1]) Л. Б. Модзалевский (см. сноску на предыдущей странице), стр. 205. В сборнике материалов Л. Б. Модзалевского это обозрение отнесено к 1825 г., но оно было написано еще в 1822 г. (см. об этом: И. Н. Бронштейн, К истории «Обозрений преподавания чистой математики» Н. И. Лобачевского, Историко-математические исследования, вып. III, М.—Л., 1950, 171—196).

[2]) Стр. 61—62.

[3]) Основная часть этого сочинения приведена на стр. 27—49.

[4]) Величина, которую называют в настоящее время радиусом кривизны пространства Лобачевского, равна $1/\ln e$.

[5]) Стр. 59.