Зельдович Яков Борисович

Высшая математика для начинающих и её приложения к физике

2-е издание. Переработанное и дополненное

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
З-50

Зельдович Яков Борисович

З-50 Высшая математика для начинающих и её приложения к физике: 2-е издание. Переработанное и дополненное / Зельдович Яков Борисович – М.: Книга по Требованию, 2024. – 560 с.

ISBN 978-5-458-34563-7

Книга рассчитана на школьников старших классов, учащихся техникумов и лиц, занимающихся самообразованием, она может быть полезна и студентам 1-го курса вузов и втузов.В книге в наиболее простой, наглядной и доступной форме объясняются основные понятия дифференциального и интегрального исчисления. Далее даются сведения, необходимые для практического применения высшей математики к задачам физики и техники. На основе высшей математики рассмотрено большое число физических вопросов: радиоактивный распад, ядерная цепная реакция, законы механики, в частности, реактивное движение и космическая скорость, молекулярное движение. Рассмотрены электрические явления и, в частности, теория колебаний, лежащая в основе радиотехники. Наряду с математическим исследованием очень подробно изложена физическая сущность рассматриваемых явлений.

ISBN 978-5-458-34563-7

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Высшей математикой называют дифференциальное и интегральное исчисление в отличие от алгебры, геометрии и тригонометрии, изучение которых заканчивается в средней школе.

Основные понятия высшей математики — производная и интеграл — необходимы для описания физических явлений, для точной формулировки законов природы.

Эти основные понятия уже давно стали необходимой частью знаний каждого культурного человека наряду, например, с пониманием того, что неизвестную величину можно обозначать буквой x и производить с этой буквой алгебраические действия. Понятия высшей математики необходимы везде, где мы имеем дело с изменяющимися величинами, с функциональной зависимостью одних величин от других.

В настоящее время существует большое число учебников высшей математики. Естественно возникает вопрос о том, каково отличие предлагаемой книги от изданных ранее, какие новые цели ставил перед собой автор. Таким общим отличием является иное отношение к читателю. Можно представить себе читателя «упирающегося», требующего точного и строгого доказательства всех положений, которые дает ему автор, выискивающего возражения и исключения. Для такого читателя предмет следует излагать в виде строгой и стройной цепи доказательств и теорем, заставляя этого читателя признать правильность теорем. Многие учебники построены именно таким образом.

Предлагаемая книга рассчитана на совершенно другого читателя — читателя, который хочет понять, что такое высшая математика, и научиться ее применению, т. е. читателя, который не упирается, а сам тянется вперед. Такого читателя не надо «подталкивать», с ним можно идти рядом и дружески беседовать.

Основной упор в книге сделан не на доказательства, а на пояснения при помощи примеров. Сначала на наглядных примерах выяснены смысл наиболее трудных понятий, способ их применения, их полезность и значение. Уже после этого даются более строгие и точные формулировки.

Для чтения книги достаточно знания основ алгебры, геометрии и тригонометрии в объеме, значительно меньшем программ средней школы. Поэтому книга вполне доступна для школьников 9—11 классов и для лиц, не имеющих законченного среднего образования.

В предлагаемом втором издании книги в первой части даны краткие сведения по графикам функций и аналитической геометрии. Эта часть в значительной мере повторяет материал, содержащийся в школьных учебниках алгебры. Однако представляется, что читателю будет удобно повторить этот материал, не обращаясь к другим книгам.

Вторая часть книги целиком посвящена выяснению смысла понятий производиой и интеграла и способов их применения. Так же как в начале изучения алгебры учатся составлению уравнений, так и во второй части книги на нескольких примерах показано, как при помощи понятий высшей математики формулируются соотношения между скоростью движения и пройденным путем, между уравнением кривой и ограниченной этой кривой площадью и т. п. Вторая часть требует минимальной подготовки, не выходящей за пределы самых простых понятий алгебры и геометрии. Во втором издании в этой части изложение приблизилось к традиционному по сравнению с первым изданием, но по-прежнему отсутствует формальная теория пределов.

Третья часть представляет собой в основном изложение правил дифференцирования и интегрирования и применение этих правил к нахождению производных и интегралов от различных функций. В этой части дается техника практической работы с понятиями высшей математики.

Следующие части — от четвертой до восьмой включительно — представляют собой простые применения высшей математики.

В части четвертой рассматриваются применения к математическим вопросам — нахождение максимума и минимума функций, вычисление площадей и объемов.

Части пятая — восьмая посвящены применениям высшей математики к физике. Они написаны не как примеры, иллюстрирующие определенные математические методы, а скорее как главы курса физики.

Когда учащемуся известны основы высшей математики, изложение физики можно существенно изменить по сравнению с обычным школьным курсом.

В этих частях рассмотрены вопросы механики, электричества, молекулярного движения, радиоактивного распада. Наряду с решением различных физических задач много внимания уделено физической сущности рассматриваемых явлений и физическим следствиям из полученных формул.

Переработка в связи с выпуском второго издания в этих частях сводилась к отдельным исправлениям и дополнениям, перечислять которые нет необходимости.

Первое издание было выпущено тиражом 75 000 экземпляров и быстро разошлось. Выпуск второго издания показывает интерес к высшей математике в широких кругах читателей, не имеющих высшего физико-математического или технического образования. Этот круг читателей нуждается в учебнике, упрощенном по сравнению с обычными курсами для вузов и втузов.

Введение 11-летнего образования должно привести к пересмотру школьных программ и включению элементов высшей математики в курс средней школы при некотором сокращении традиционных курсов арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Предлагаемая книга (с небольшими сокращениями) в первых четырех частях дает представление о желательном объеме курса высшей математики в средней школе: во всяком случае следует дать оба тесно связанных понятия — производную и интеграл. Остальные четыре части показывают, как можно было бы формулировать физические законы и разбирать такие явления, как колебания, резонанс и др., если физика читается параллельно с высшей математикой.

Выпуск второго издания не является доказательством правильности всех методических идей, заложенных в первом издании. При обсуждении книги на секции преподавателей втузов Московского математического общества и в частном порядке справедливо указывалось на необходимость более точной формулировки понятий производной и интеграла. В связи с этим начало книги было существенно переработано.

В создании книги большая роль принадлежит В. Л. Мануилову, подготовившему рукопись первого издания к печати и составившему упражнения и задачи, а также почти всю четвертую часть, и К. А. Семендяеву, внимательно просмотревшему рукопись и сделавшему много ценных замечаний. Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность всем лицам, принимавшим участие в обсуждении первого издания книги, и в особенности Н. А. Дмитриеву, Н. Н. Мейману, Р. С. Гутеру и Л. Я. Цлафу за принципиальные критические замечания.

С благодарностью приняты и использованы при переработке замечания читателей Е. Ф. Давыдова, П. П. Склярова, А. Г. Соколова.

Практическую помощь в подготовке второго издания оказал Х. Г. Цванг.

Академик *Я. Б. Зельдович*

ЧАСТЬ I

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. Функциональная зависимость

В природе, в технике, в математике мы чрезвычайно часто встречаемся с функциональными зависимостями. Функциональная зависимость одной величины (y) от другой (x) означает, что каждому значению x соответствует определенное значение y.

Величина x при этом называется независимой переменной, y — функцией этой переменной. Иногда x называют аргументом функции.

Приведем несколько примеров из геометрии и физики:

1) Объем шара V является функцией его радиуса r

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

2) Объем V конуса с данной высотой h зависит от радиуса его основания r

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

3) Путь z, пройденный свободно падающим телом, зависит от времени t, протекшего с момента, когда началось падение,

$$z = \frac{gt^2}{2}.$$

4) Сила тока i по закону Ома зависит от сопротивления проводника R при данной разности потенциалов u

$$i = \frac{u}{R}. \qquad (1.1)$$

Можно было бы привести еще множество примеров такого рода.

Характерно, что в природе и в технике в большинстве случаев интересующая нас величина (функция) зависит от нескольких величин. Так, например, в последнем примере сила тока зависит от двух величин: от разности потенциалов u и от сопротивления проводника R. Объем конуса зависит от его высоты h и от радиуса основания r.

Считая заданными и постоянными все величины, кроме одной, мы изучаем зависимость функции от одной переменной; в данной книге мы в основном ограничиваемся функциями одной переменной.

Так, например, взяв данную аккумуляторную батарею с определенной разностью потенциалов u, будем менять сопротивление проводника R и измерять силу тока i; в такой постановке опыта сила тока зависит только от сопротивления, величину u в формуле (1.1) следует рассматривать как постоянный коэффициент.

В математике функциональная зависимость чаще всего задается формулами, например,

$$y = 2x + 3,\quad y = x^2 + 5,\quad y = 3x^3 - x^2 - x,\qquad (1.2)$$
$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

В этих формулах очевидно, что мы имеем дело с функциями одной переменной и формула дает способ вычисления значений функции при каждом заданном значении независимой переменной.

Зная формулу, дающую зависимость y от x, легко составить таблицу значений y для нескольких произвольно заданных значений x.

Составим, например, такую таблицу для третьей функции из (1.2). В верхней строке даны выбранные нами значения x, в нижней строке под каждым данным x дано соответствующее значение y.

Таблица 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3x^3 - x^2 - x$	-87	-26	-3	0	1	18	69

Понятно, что по данной формуле можно составить и более подробную таблицу, задавая, например, значения $x=0$; 0,1; 0,2; ... и т. д. Таким образом, формула «сильнее» любой таблицы. Формула содержит не только те сведения, которые позволяют составить данную таблицу, но позволяет также найти значения функции при значениях независимой переменной, не содержащихся в данной таблице. С другой стороны, таблица удобнее, так как с ее помощью можно быстрее найти значение y при данном x — если это x есть в таблице, — поскольку вычисления по формуле уже были проделаны при составлении таблицы.

В природе и в технике, когда уже установлен закон интересующего нас явления, этот закон выражается формулой. Однако бывает и такое положение, когда теории явления нет и физик (или химик, биолог, техник) может дать только результаты проделанных им опытов — зависимость исследуемой величины от величины, задаваемой при постановке опыта. Так обстоит дело, например, при исследовании зависимости сопротивления проводника от его температуры. В этом случае функциональная зависимость может быть задана только в виде таблицы, содержащей результаты опыта.

Из опыта известно, что для данного проводника (из данного материала, данного сечения и данной длины) электрическое сопротивление зависит от температуры проводника. При каждом значении температуры T проводник имеет определенное сопротивление R, так что можно говорить о функциональной зависимости R от T, о том, что сопротивление R есть функция температуры T.

Проводя измерения, можно найти значения R при различных T и таким образом найти зависимость $R(T)$; при этом результатом опытов является таблица, в которой даны значения R при различных T, например:

Таблица 2

T (градусы Цельсия)	0°	25°	50°	75°	100°
R (омы)	112,0	118,4	124,6	130,3	135,2

Если нас интересуют значения R при других температурах, не входящих в таблицу, то в принципе нужны дополнительные измерения, так как точная формула, дающая зависимость $R(T)$, неизвестна. Практически можно подобрать приближенную формулу, которая хорошо согласовалась бы с опытом при тех температурах, при которых приведены измерения; возьмем, например, формулу

$$R = 112{,}0 + 0{,}272T - 0{,}0004T^2$$

и составим таблицу по этой формуле:

Таблица 3

T	0	25	50	75	100
R (по формуле)	112,0	118,55	124,6	130,15	135,2

Формула дает значения R, очень близкие к опыту, при тех температурах, при которых проделаны измерения; поэтому законно предположение, что и при промежуточных температурах (например, при 10° или при 80° и 90°) формула также правильно описывает функциональную зависимость $R(T)$. Однако пользование формулой за пределами исследованного интервала (например, при -200°C или $+500$°C) может привести к ошибкам, поскольку нет оснований для того, чтобы $R(T)$ выражалось квадратным трехчленом.

Такие формулы, полученные не из теории, а подбором, называют эмпирическими (т. е. опытными, основанными на опыте).

§ 2. Координаты

Для наглядного изображения функциональной зависимости с помощью рисунка (графика) пользуются координатами. Проведем на плоскости две перпендикулярные прямые. Горизонтальная прямая называется «ось x» (ось икс) или, иначе, «ось абсцисс»; вертикальная прямая — «ось y» (ось игреков) или «ось ординат». Точка пересечения