

Т.И. Стильтьес

**Исследования о
непрерывных дробях**

Книга 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Т11

Т11 **Т.И. Сильтьес**
Исследования о непрерывных дробях: Книга 1 / Т.И. Сильтьес – М.: Книга
по Требованию, 2024. – 157 с.

ISBN 978-5-458-27086-1

Предметом этой работы является изучение непрерывной дроби, в которой все a_i суть числа вещественные и положительные, тогда как z есть переменная, могущая принимать всякие вещественные или мнимые значения.

ISBN 978-5-458-27086-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ

Предметом этой работы является изучение непрерывной дроби

$$(I) \quad \frac{1}{a_1 z + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 z + \dots + \frac{1}{a_{2n} + \frac{1}{a_{2n+1} z + \dots}}}}}$$

в которой все a_i суть числа вещественные и положительные, тогда как z есть переменная, могущая принимать всякие вещественные или мнимые значения.

Обозначая через $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ n -ую подходящую дробь, зависящую только от n первых коэффициентов a_i , мы будем искать, в каких случаях эта подходящая дробь стремится к некоторому пределу при $n = \infty$, и будем изучать природу этого предела как функции от z .

Изложим вкратце наиболее существенный результат этого изучения. Следует различать два случая.

Первый случай. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится.

В этом случае для всякого конечного значения z

$$\lim P_{2n}(z) = p(z),$$

$$\lim Q_{2n}(z) = q(z),$$

$$\lim P_{2n+1}(z) = p_1(z),$$

$$\lim Q_{2n+1}(z) = q_1(z),$$

где $p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ суть голоморфные функции во всей плоскости, удовлетворяющие соотношению

$$q(z) p_1(z) - q_1(z) p(z) = +1.$$

Это функции нулевого рода, имеющие только простые, вещественные и отрицательные нули.

Как подходящие дроби четного, так и подходящие дроби нечетного порядка стремятся, следовательно, к пределам, но эти пределы различны и могут быть представлены в виде рядов простых дробей

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\mu_1}{z + \lambda_1} + \frac{\mu_2}{z + \lambda_2} + \dots + \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \dots,$$

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_1}{z + \theta_1} + \frac{\nu_2}{z + \theta_2} + \dots + \frac{\nu_k}{z + \theta_k} + \dots,$$

где $\mu_k, \lambda_k, \nu_k, \theta_k$ — вещественные положительные числа.

Второй случай. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ расходится.

В этом случае подходящие дроби стремятся к одному конечному пределу, каково бы ни было значение z ; следует исключить только вещественные отрицательные значения z и рассматривать, таким образом, отрицательную часть вещественной оси как разрез (купюру). Этот предел есть аналитическая функция от z , которая может быть представлена в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(u) du}{(z+u)^2} = \int_0^{\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Здесь $\Phi(u)$ является вещественной и возрастающей функцией (вообще говоря, не аналитической), которая растет от $\Phi(0) = 0$ до $\Phi(\infty) = \frac{1}{a_1}$. Эта функция $\Phi(u)$ может к тому же иметь вне-

запные скачки в конечном или бесконечном числе. Разрез будет, таким образом, линией существенных особенностей, когда $\Phi(u)$ имеет разрывы в каждом интервале (что следует рассматривать как общий случай) и даже тогда, когда она не аналитична.

Часто встречаются в слегка отличной форме непрерывные дроби, которые в действительности входят в тип (I) и к которым, таким образом, можно применять наши теоремы.

Если положим сначала

$$b_0 = \frac{1}{a_1}, \quad b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}},$$

то непрерывная дробь (I) напишется в виде

$$(I^a) \quad \cfrac{b_0}{z + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{z + \cfrac{b_3}{1 + \cfrac{b_4}{z + \dots}}}}}$$

и при $tz = 1$ в виде

$$(\Gamma^b) \quad \frac{\frac{b_0 t}{1 + \frac{b_1 t}{1 + \frac{b_2 t}{1 + \frac{b_3 t}{1 + \dots}}}}}{1 + \frac{b_1 t}{1 + \frac{b_2 t}{1 + \frac{b_3 t}{1 + \dots}}}}$$

С помощью тождества

$$z + \frac{b_1}{1 + \frac{b_2}{\lambda}} = z + b_1 - \frac{b_1 b_2}{b_2 + \lambda}$$

непрерывную дробь (Γ^a) можно преобразовать в (Γ^c)

$$(\Gamma^c) \quad \frac{\frac{b_0}{z + b_1 - \frac{b_1 b_2}{z + b_2 + b_3 - \frac{b_3 b_4}{z + b_4 + b_5 - \dots}}}}{z + b_1 - \frac{b_1 b_2}{z + b_2 + b_3 - \frac{b_3 b_4}{z + b_4 + b_5 - \dots}}};$$

n -ая подходящая дробь для (Γ^c) тождественна с $2n$ -ой подходящей дробью для (Γ) или для (Γ^a) .

Дробь (Γ^c) имеет вид

$$(\Gamma^d) \quad \frac{\frac{\lambda_0}{z + \alpha_1 - \frac{\lambda_1}{z + \alpha_2 - \frac{\lambda_2}{z + \alpha_3 - \frac{\lambda_3}{z + \alpha_4 - \dots}}}}}{z + \alpha_1 - \frac{\lambda_1}{z + \alpha_2 - \frac{\lambda_2}{z + \alpha_3 - \frac{\lambda_3}{z + \alpha_4 - \dots}}}}$$

где λ_i, α_i имеют положительные значения. Эта форма (Γ^d) встречается достаточно часто; поэтому интересно знать, может ли она быть представлена в виде (Γ^c) с *положительными* значениями b_i так, чтобы наши теоремы были применимы.

Отождествляя, имеем

$$\begin{aligned} b_0 &= \lambda_0, & b_1 &= \alpha_1, \\ b_1 b_2 &= \lambda_1, & b_2 + b_3 &= \alpha_2, \\ b_3 b_4 &= \lambda_2, & b_4 + b_5 &= \alpha_3, \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

откуда получаются последовательно $b_0, b_1, b_2 \dots$ и вообще

$$b_{2n} = \frac{\lambda_n}{\alpha_n - \frac{\lambda_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \dots - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}}},$$

сверх того $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$.

Однако может случиться, что вычисление b_i станет сложным и, поскольку речь идет только о том, чтобы узнать, все ли эти количества положительны, то иногда можно с успехом пользоваться следующим предложением.

Все количества b_i несомненно положительны, если можно найти такую положительную функцию P_n ($P_1 = 0$) от n , для которой

$$P_n < a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{\lambda_n}{a_n - P_n} \leq P_{n+1}.$$

Действительно, число $b_2 = \frac{\lambda_1}{a_1}$ положительно и не превосходит

$\frac{\lambda_1}{a_1 - P_1} \leq P_2$. Но если b_{2n-2} заключается между 0 и P_n , то в силу

$$b_{2n} = \frac{\lambda_n}{a_n - b_{2n-2}}$$

следует, что b_{2n} положительно и меньше, чем $\frac{\lambda_n}{a_n - P_n} \leq P_{n+1}$.

Стало быть вообще $0 < b_{2n} \leq P_{n+1}$; величина $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$ по-этому также положительна.

В частности, все b_i положительны в двух следующих случаях:

1. $a_n \geq 1 + \lambda_n$ (поскольку высказанное предложение применимо тогда при $P_n = 1$);

2. $a_{n+1} \geq 1 + \lambda_n$ (достаточно принять $P_n = \lambda_{n-1}$).

Рассмотрим для примера непрерывную дробь, изученную Laguerre'ом, которая имеет вид (Γ^d) со следующими значениями коэффициентов

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = n^2 \quad (n \geq 1),$$

$$a_n = 2n - 1.$$

Вычисление b_i здесь не представляет никакой трудности, и мы найдем, что

$$b_0 = 1,$$

$$b_{2n-1} = b_{2n} = n \quad (n \geq 1),$$

далее

$$a_{2n-1} = 1, \quad a_{2n} = \frac{1}{n}.$$

Laguerre показал, предполагая z вещественным и положительным, что непрерывная дробь сходится и равна

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u} du}{z + u}.$$

Теперь из нашей теории следует, что это предложение распространяется на все вещественные или мнимые значения z , за исключением значений вещественных и отрицательных.

Рассмотрим, во-вторых, непрерывную дробь, которую мы встретили в этих *Анналах*,¹ т. III, и которая также имеет вид (I'') , если отвлечься от замены z на z^2 . Для нее

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = (2n-1)(2n)^2(2n+1)k^2, \\ a_n = (2n-1)^2(1+k^2),$$

где k^2 —положительное количество. Здесь вычисление b_i сложно. Но если положить

$$P_n = \frac{n-1}{2n-1} a_n, \quad a_n - P_n = \frac{n}{2n-1} a_n,$$

то неравенство

$$\frac{\lambda_n}{a_n - P_n} \leq P_{n+1}$$

сведется к

$$4k^2 \leq (1+k^2)^2,$$

правильность которого очевидна. Рассматриваемая непрерывная дробь принадлежит, таким образом, также к изученному нами типу.

¹ Речь идет о мемуаре *T. Stieltjes'a*, Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable, *Annales de Toulouse*, t. III, 1889. (*Прим. перев.*).

Глава I

Изучение полиномов $P_n(z)$, $Q_n(z)$

1. Рассмотрим последовательность чисел $N, N_1, N_2, \dots$, связанных соотношениями:

$$\begin{aligned} N &= a_1 N_1 + N_2, \\ N_1 &= a_2 N_2 + N_3, \\ &\dots \dots \dots \\ N_{k-1} &= a_k N_k + N_{k+1}. \end{aligned}$$

Можно выразить N последовательно через N_1 и N_2 , через N_2 и N_3 , через N_3 и N_4 и т. д.

$$N = (a_1 a_2 + 1) N_2 + a_1 N_3 = (a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3) N_3 + (a_1 a_2 + 1) N_4 = \dots$$

Введем символ

$$[a_1, a_2, \dots, a_k],$$

определяемый соотношениями

$$(1) \quad \begin{cases} [a_1] = a_1, & [a_1, a_2] = a_1 a_2 + 1, \\ [a_1, a_2, \dots, a_k] = [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}] a_k + [a_1, a_2, \dots, a_{k-2}], \end{cases}$$

тогда

$$(2) \quad N = [a_1, a_2, \dots, a_k] N_k + [a_1, a_2, \dots, a_{k-2}] N_{k+1}.$$

Ясно, что N, N_k, N_{k+1} связаны линейным однородным соотношением. Легко получить это соотношение. Умножим (2) на a_{k+1} и заменим $a_{k+1} N_{k+1}$ через $N_k - N_{k+2}$, получим:

$$[a_{k+1}] N = [a_1, a_2, \dots, a_{k+1}] N_k - [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}] N_{k+2};$$

умножим на a_{k+2} и сложим почленно с (2), получится

$$[a_{k+1}, a_{k+2}] N = [a_1, a_2, \dots, a_{k+2}] N_k + [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}] N_{k+3}.$$

Ясно, что вообще

$$(3) \quad \begin{aligned} &[a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+l-1}] N = \\ &= [a_1, a_2, \dots, a_{k+l-1}] N_k + (-1)^{l+1} [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}] N_{k+l}. \end{aligned}$$

Отсюда мы выведем одно тождество, которое понадобится в дальнейшем. Заменяя k через α , l через $\beta + \gamma + 1$, будем иметь

$$(4) \quad [a_{\alpha+1}, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] N = [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] N_{\alpha} + \\ + (-1)^{\beta+\gamma} [a_1, \dots, a_{\alpha-1}] N_{\alpha+\beta+\gamma+1}.$$

С другой стороны, исключая $N_{\alpha+\beta+1}$ из формул

$$[a_{\alpha+1}, \dots, a_{\alpha+\beta}] N = [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta}] N_{\alpha} + (-1)^{\beta} [a_1, \dots, a_{\alpha-1}] N_{\alpha+\beta+1}, \\ [a_{\alpha+\beta+2}, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] N = [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] N_{\alpha+\beta+1} + \\ + (-1)^{\gamma+1} [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta}] N_{\alpha+\beta+\gamma+1},$$

получаем соотношение между N , N_{α} , $N_{\alpha+\beta+\gamma+1}$ в виде

$$(5) \quad \Delta N = [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta}] \{ [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] N_{\alpha} + \\ + (-1)^{\beta+\gamma} [a_1, \dots, a_{\alpha-1}] N_{\alpha+\beta+\gamma+1} \},$$

где

$$\Delta = [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \times [a_{\alpha+1}, \dots, a_{\alpha+\beta}] + \\ + (-1)^{\beta+1} [a_1, \dots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+\beta+2}, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

Сравнение (4) и (5) показывает, что имеется тождество

$$\Delta = [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta}] \times [a_{\alpha+1}, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

Мы имеем, таким образом, следующее соотношение

$$(A) \quad [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \times [a_{\alpha+1}, \dots, a_{\alpha+\beta}] = \\ = [a_1, \dots, a_{\alpha+\beta}] \times [a_{\alpha+1}, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] + \\ + (-1)^{\beta} [a_1, \dots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+\beta+2}, \dots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

Полезно отметить некоторые частные случаи. При $\beta = 0$ имеем

$$(B) \quad [a_1, \dots, a_{\alpha+\gamma}] = [a_1, \dots, a_{\alpha}] \times [a_{\alpha+1}, \dots, a_{\alpha+\gamma}] + \\ + [a_1, \dots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+2}, \dots, a_{\alpha+\gamma}]$$

и при $\alpha = \gamma = 1$

$$(C) \quad [a_1, \dots, a_{\beta+2}] \times [a_2, \dots, a_{\beta+1}] = [a_1, \dots, a_{\beta+1}] \times \\ \times [a_2, \dots, a_{\beta+2}] + (-1)^{\beta}.$$

При $\gamma = 1$ соотношение (B) воспроизводит рекуррентный закон (1); при $\alpha = 1$ будет

$$(6) \quad [a_1, \dots, a_{\gamma+1}] = a_1 [a_2, \dots, a_{\gamma+1}] + [a_3, \dots, a_{\gamma+1}].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{[a_1, \dots, a_k]}{[a_2, \dots, a_k]} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k}}},$$

тогда как в силу (1)

$$\frac{[a_1, \dots, a_k]}{[a_1, \dots, a_{k-1}]} = a_k + \frac{1}{a_{k-1} + \dots + \frac{1}{a_1}}.$$

В силу предыдущего последняя непрерывная дробь равна также $\frac{[a_k, \dots, a_1]}{[a_{k-1}, \dots, a_1]}$, откуда легко заключить, что

$$(7) \quad [a_1, a_2, \dots, a_k] = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_1].$$

Ясно, что символ $[a_1, \dots, a_k, \dots, a_n]$ является линейным относительно любого элемента a_k , и с помощью (B) легко найти, что

$$(8) \quad [a_1, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{k-1}] \times [a_{k+1}, \dots, a_n] a_k + R,$$

где R от a_k не зависит и может быть представлено в виде

$$R = [a_1, \dots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{k-2}, a_{k-1} + a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n].$$

Наконец, легко убедиться в следующих соотношениях, где m есть какое угодно число

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[m a_1, \frac{a_2}{m}, m a_3, \frac{a_4}{m}, \dots, m a_{2n-1}, \frac{a_{2n}}{m} \right] = [a_1, a_2, \dots, a_{2n}], \\ & \left[m a_1, \frac{a_2}{m}, m a_3, \frac{a_4}{m}, \dots, m a_{2n-1}, \frac{a_{2n}}{m}, m a_{2n+1} \right] = \\ & \quad = m \times [a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}]. \end{aligned} \right.$$

2. Из сказанного ясно, что числители и знаменатели входящих дробей выражаются следующим образом с помощью символа $[a_1, \dots, a_n]$

$$P_{2n}(z) = [a_2, a_3 z, a_4, \dots, a_{2n-1} z, a_{2n}],$$

$$Q_{2n}(z) = [a_1 z, a_2, a_3 z, \dots, a_{2n}],$$

$$P_{2n+1}(z) = [a_2, a_3 z, a_4, \dots, a_{2n}, a_{2n+1} z],$$

$$Q_{2n+1}(z) = [a_1 z, a_2, \dots, a_{2n+1} z].$$

Мы обозначим через $P_n^k(z)$, $Q_n^k(z)$ то, во что обратятся $P_n(z)$, $Q_n(z)$, если везде заменить a_i через a_{i+k} ,

Формулы п°1 дают таким образом тождественные соотношения между этими полиномами, если для нечетного i заменить a_i на $a_i z$,

$$Q_{2n}(z) = a_{2n} Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z),$$

$$Q_{2n+1}(z) = a_{2n+1} z Q_{2n}(z) + Q_{2n-1}(z).$$

Легко усмотреть, что вообще

$$P_{2n}(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_{n-1} z^{n-1},$$

$$Q_{2n}(z) = B_0 + B_1 z + \dots + B_n z^n;$$

$$P_{2n+1}(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_n z^n,$$

$$Q_{2n+1}(z) = D_0 + D_1 z + \dots + D_{n+1} z^{n+1},$$

где коэффициенты — полиномы от a_i .

Общий закон для этих коэффициентов несколько сложен; впрочем он нам не будет нужен, но можно легко проверить несколько следующих формул, которые нам будут полезны:

$$A_0 = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n},$$

$$A_{n-2} = A_{n-1} \left(\frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} \right),$$

$$A_{n-1} = a_2 a_3 \dots a_{2n},$$

$$B_0 = 1,$$

$$B_1 = \sum_1^n (a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1}) a_{2k},$$

$$B_{n-1} = B_n \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} \right),$$

$$B_n = a_1 a_2 \dots a_{2n},$$

$$C_0 = 1,$$

$$C_1 = \sum_1^n (a_2 + a_4 + \dots + a_{2k}) a_{2k+1},$$

$$C_{n-1} = C_n \left(\frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}} \right),$$

$$C_n = a_2 a_3 \dots a_{2n+1},$$

$$D_0 = 0,$$

$$D_1 = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1},$$

$$D_n = D_{n+1} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}} \right),$$

$$D_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_{2n+1}.$$

В силу тождественного соотношения

$$Q_{2n}(z) P_{2n+1}(z) - P_{2n}(z) Q_{2n+1}(z) = 1$$

имеем

$$B_1 + C_1 = A_0 D_1.$$

3. Докажем теперь некоторые предложения относительно корней уравнений, которые получатся, если приравнять нулю полиномы P и Q . Впрочем, полиномы P существенно не отличаются от полиномов Q , и мы будем всюду говорить об этих последних. Положим в соотношении (A) $n^{\circ} 1$

$$\alpha = 2n - 3, \beta = 1, \gamma = 2;$$

заменяя всюду a_i на $a_i z$, когда i нечетно, получим

$$a_{2n-2} Q_{2n}(z) = [a_{2n-2}, a_{2n-1} z, a_{2n}] Q_{2n-2}(z) - a_{2n} Q_{2n-4}(z).$$

Мы видим, что

$$Q_{2n}(z), Q_{2n-2}(z), Q_{2n-4}(z), \dots, Q_2(z), Q_0(z) = 1$$

образуют ряд Sturm'a. При $z = -\infty$ этот ряд представляет n перемен знака, при $z = 0$ — ни одной перемены.

Мы заключаем, что все n корней уравнения

$$Q_{2n}(z) = 0$$

простые, отрицательные и разделяются корнями уравнения $Q_{2n-2}(z) = 0$.

Когда z проходит возрастая через корень уравнения $Q_{2n}(z) = 0$, отношение $Q_{2n-2}(z) : Q_{2n}(z)$ скачет от $-\infty$ до $+\infty$.

Положим теперь в соотношении (A)

$$\alpha = 2n - 2, \beta = 1, \gamma = 2,$$

получим:

$$a_{2n-1} \frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = [a_{2n-1}, a_{2n} z, a_{2n+1}] \frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - a_{2n+1} \frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$

значит

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \dots, \frac{Q_1(z)}{z} = a_1$$

образуют ряд Sturm'a. Все n корней уравнения

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = 0$$

простые, отрицательные и разделяются корнями уравнения $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = 0$. Отношение $Q_{2n-1}(z) : Q_{2n+1}(z)$ скачет всегда от $-\infty$ до $+\infty$.

Положим теперь

$$\alpha = 2n - 2, \beta = 1, \gamma = 1,$$

тогда будем иметь

$$a_{2n-1} Q_{2n}(z) = [a_{2n-1} z, a_{2n}] \frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - \frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$