В. И. Смирнов

Вариационное исчисление

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
В11

В. И. Смирнов

В11 Вариационное исчисление / В. И. Смирнов – М.: Книга по Требованию, 2024. – 204 с.

ISBN 978-5-458-25383-3

Настоящая книга выпускается в качестве пособия для студентов математического и физического факультетов Ленинградского Университета. В ее основе лежат лекции, которые читались мною несколько лет тому назад студентам-физикам. Объем этих лекций был значительно меньше объема выпускаемой книги, которая предназначается не только для физиков, но и для математиков. В связи с этим в книге добавлен большой новый материал. Вся эта книга составлена Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым.

ISBN 978-5-458-25383-3

деляются численными значениями одного или нескольких независимых переменных. Это понятие функции, позволяющее разрешить ряд вопросов, является во многих случаях недостаточным. Оно не охватывает всех видов зависимостей, существующих в действительности. Рассмотрим хотя бы следующие два примера:

1) Величина напряжения в данном месте электромагнитного поля, вызванного прохождением тока по проводнику, зависит от формы кривой, по которой расположен проводник.

2) Сопротивление, оказываемое жидкостью движущемуся телу, зависит от формы поверхности этого тела.

В обоих указанных примерах рассматриваемая величина (напряжение поля, сопротивление) зависит от выбора кривой или поверхности. Такая зависимость не может быть очевидно приведена к обычной функциональной зависимости, а представляет нечто существенно новое. Мы видим, таким образом, что изучение подобного рода зависимостей заставляет расширить понятие функции.

Важнейшим обобщением понятия о функции является понятие о функционале. Существенное отличие функционала состоит в том, что значения аргументов его не числа, как у обычной функции, а функции одного или нескольких переменных. Таким образом, функционал дает такого рода зависимость, что каждой функции (или паре функций) определенного класса ставится в соответствие число—значение функционала. Мы дали сейчас аналитическое определение функционала; геометрически же разница между функционалом и функцией та, что обычная функция одного или нескольких переменных есть функция точки на прямой, плоскости или в пространстве, функционал же есть функция более сложных геометрических образований: линий, поверхностей и т. п. Так, например, если функционал зависит от двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то мы можем считать его функцией от пространственной кривой $y=f(x)$; $z=\varphi(x)$.

Простейшим примером функционала является определенный интеграл функции, взятый в данных пределах:

$$V[f(x)]=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Другим весьма важным общим примером функционала является интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

который каждой дифференцируемой функции $y=f(x)$ ставит в соответствие некоторое число. При частном выборе функции F, мы можем получить из (1) интегралы I, к исследованию которых привелось решение задач о наименьшей поверхности вращения и о брахистохроне (§ 2). Таким образом эти интегралы I также представляют собой функционалы.

Общее исследование функционалов представляет задачу функционального анализа. Вариационное исчисление занимается только задачей нахождения maxima и minima функционалов, ограничиваясь при этом простейшими из них.

Прежде чем перейти к изложению основных задач вариационного исчисления, мы докажем два простых вспомогательных предложения, которыми придется нам воспользоваться.

§ 4. Две леммы.

ЛЕММА I.

Если интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\eta(x)\,dx,$$

где $F(x)$ данная непрерывная в промежутке (x_0, x_1) функция, обращается в нуль для всякой функции $\eta(x)$, непрерывной вместе со своей производной в (x_0, x_1) и исчезающей на концах его: $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, то

$$F(x)=0$$

для всякого x, в промежутке (x_0, x_1).

Предположим противное, что в некоторой точке ξ внутри промежутка (x_0, x_1) функция $F(x)$ отлична от нуля, например, $F(\xi)>0$. Тогда, благодаря непрерывности $F(x)$, она будет положительна и в некотором промежутке (ξ_1, ξ_2), содержащем точку ξ и лежащем внутри (x_0, x_1) $[x_0<\xi_1<\xi<\xi_2<x_2]$.

Определим теперь функцию $\eta(x)$ следующим образом:

$$\eta(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x_0\leqslant x<\xi_1 \\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2 & \text{,, } \xi_1\leqslant x<\xi_2 \\ 0 & \text{,, } \xi_2\leqslant x<x_2 \end{cases}$$

Построенная таким образом функция $\eta(x)$ (график ее дан на рис. 1) удовлетворяет наложенным на нее в лемме ограничениям.

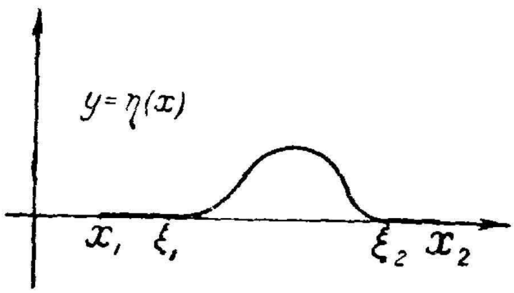

Рис. 1

Очевидно, она обращается в нуль в точках x_0 и x_1. Покажем, что $\eta(x)$ непрерывна вместе со своей производной. Это не вызывает сомнений для всех точек кроме ξ_1 и ξ_2, так как во всяком промежутке не содержащем ξ_1 и ξ_2 функция $\eta(x)$ совпадает с одной из функций 0 или $(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2$. Докажем, что то же самое имеет место и в точке ξ_1 [для ξ_2 рассуждение аналогично]. Но, действительно, значение функции $\eta(x)$ в точке ξ_1 равно нулю и тому же равен предел $\eta(x)$ справа и слева. Далее, так как слева от точки ξ_1 функция

$\eta(x)$ тождественно равна нулю, то производная ее слева в точке ξ_1 также равна нулю; нулю же равен, очевидно, и предел $\eta'(x)$ при $x \to \xi_1$, если точка x остается левее ξ_1. Справа от точки ξ_1 функция $\eta'(x)$ совпадает с функцией $(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2$, а потому производная ее справа от точки ξ_1 найдется дифференцированием этой функции, т.-е.

$$\eta'(x) = [(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2]' = 2(x-\xi_1)(x-\xi_2)[(x-\xi_1)+(x-\xi_2)].$$

Отсюда видно, в частности, что производная справа в самой точке ξ_1 равна нулю, и тому же равен, очевидно, предел $\eta'(x)$ при $x \to \xi$, $[x > \xi]$, так как написанное для $\eta'(x)$ выражение есть непрерывная функция x. Итак, значение производной функции $\eta(x)$ справа и слева в точке ξ_1 равно нулю, и тому же равен предел $\eta'(x)$ при $x \to \xi$, отсюда следует, что $\eta'(x)$ в точке $x = \xi_1$ существует и непрерывна, а потому функция $\eta(x)$ удовлетворяет всем поставленным в лемме условиям. Но интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} + \int_{\xi_2}^{x_1} =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} (x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 F(x)\,dx > 0,$$

так как подъинтегральная функция положительна, что противоречит условию леммы. Итак, во всех точках x промежутка (x_0, x_1)

$$F(x) = 0,$$

что требовалось доказать.

ЛЕММА II[1].

Пусть $F(x, y)$ определенная и непрерывная функция двух переменных в области D, ограниченной контуром L. И пусть для всякой функции $\eta(x, y)$, непрерывной вместе со своими частными производными в D и обращающейся в нуль на L:

$$\iint_{(D)} F(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

Тогда во всех точках области D

$$F(x, y) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке (x_1, y_1) внутри D функция $F(x, y)$ отлична от нуля, например, $F(x_1, y_1) > 0$. Тогда она будет положительна и в некотором круге

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = \delta^2$$

радиуса δ лежащем внутри D.

[1]) Чтение этой леммы читатель может отложить до § 10.

Определим $\eta(x, y)$ следующим образом

$$\eta(x,y)=\begin{cases}0 & \text{если } (x-x_1)^2+(y-y_1)^2\geqslant\delta^2\\ [(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-\delta^2]^2 & \text{,, } (x-x_1)+(y-y_1)^2<\delta^2\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что определенная таким образом функция $\eta(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы, между тем

$$\iint\limits_{(D)} F(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy>0,$$

что противоречит условию леммы. Итак, непременно во всех точках внутри D

$$F(x, y)=0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что лемма I остается верной, если мы наложим и более сильные ограничения на функцию $\eta(x)$. Например, если мы потребуем, чтобы интеграл произведения $F\cdot\eta$ обращался бы в нуль лишь для функций $\eta(x)$ непрерывных вместе с n производными и обращающихся вместе с $(n-1)$ производными в нуль на концах промежутка (x_0, x_1), то и в этом случае заключение леммы будет справедливо. Для доказательства этого нужно только в доказательстве леммы I заменить показатель 2, в формуле задающей $\eta(x)$ на $(n+1)$.

Отметим также, что лемма II переносится на функции трех и более переменных.

§ 5. Постановка основной задачи.

Основной задачей вариационного исчисления называется задача нахождения extrema интеграла

$$I=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (1)$$

Здесь F данная функция аргументов x, y, $y'=\frac{dy}{dx}$, y есть функция от x; x_0 и x_1 постоянные. Величина интеграла (1) зависит от выбора функции или, что то же самое, кривой

$$y=f(x)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (2)$$

Для того, чтобы интеграл I имел смысл, а также для дальнейших рассуждений мы должны наложить некоторые ограничения на функции F и f. Относительно функции F будем предполагать, что она однозначна и непрерывна вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно при всех значениях x, y, из некоторой области R плоскости, точнее говоря, таких, что точка (x, y) лежит в R, и при всех конечных значениях y'. Прежде чем указать ограничения, налагаемые на $f(x)$, введем одно определение, которое сократит нам изложение в дальнейшем. Будем говорить, что функция или кривая $y=f(x)$ принадлежит классу $C^{(1)}$, если она однозначна и непрерывна в промежутке (x_0, x_1) и имеет непрерывную производную в этом промежутке [т.-е., касательная к кривой $y=f(x)$ меняется непрерывно и нигде не параллельна оси OY] и вообще $y=f(x)$ принадлежит к классу $C^{(n)}$, если она однозначна и непрерывна вместе со своими производными до n-ого порядка.

Теперь мы можем сформулировать точно основную задачу: это есть задача об отыскании такой кривой $y=f(x)$, лежащей в области R, принадлежащей классу $C^{(1)}$ и проходящей через две данные точки плоскости $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, для которой интеграл I имеет наименьшее значение.

Таким образом, кривые $y=f(x)$, для которых мы рассматриваем значение интеграла I [мы будем эти кривые называть для краткости *допустимыми*], должны удовлетворять следующим трем условиям:

1) Кривая принадлежит классу $C^{(1)}$, т.-е. $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной в (x_0, x_1).

2) Целиком лежит в данной области R плоскости. Выбор этой области определяется условиями задачи.

3) Проходит через точки

$$A(x_0, y_0) \text{ и } B(x_1, y_1),$$

т.-е.

$$f(x_0)=y_0;\ f(x_1)=y_1.$$

Мы можем теперь основную задачу сформулировать кратко так: среди допустимых кривых найти ту, для которой интеграл (1) имеет наименьшее значение.

Мы здесь и в дальнейшем говорим только о минимуме интеграла, так как задача о максимуме сводится к задаче о минимуме, если только заменить функцию F на $-F$.

Поставленная выше основная задача аналогична задаче об абсолютном extrema в дифференциальном исчислении, но существенная разница между этими задачами заключается в том, что основная задача вариационного исчисления в отличие от задачи дифференциального исчисления не всегда имеет решение [1].

Так же, как и в дифференциальном исчислении, для решения задачи об абсолютном минимуме нужно предварительно решить задачу об относительном минимуме, т.-е., о нахождении таких допустимых кривых, которые дают интегралу I значение минимальное по сравнению с соседними кривыми. Если задача об относительном минимуме будет решена, и мы найдем конечное число кривых, дающих интегралу I относительный минимум, и если из

---

[1]) Действительно, пусть $F(x, y, y') > 0$, тогда интеграл I принимает только положительные значения для всех допустимых кривых, и эти значения имеют точную нижнюю границу $m \geqslant 0$; но мы не можем поручиться, вообще говоря, что найдется такая кривая, для которой эта граница достигается. Наоборот, можно показать примером, что эта граница не всегда достигается (см. доб. стр. 32).

физических соображений ясно, что задача об абсолютном минимуме должна иметь единственное решение, удовлетворяющее условиям, наложенным на допустимую кривую, и лежащее внутри R, то это решение мы получим, выбрав из найденных кривых ту, для которой I наименьшее. В дальнейшем мы будем заниматься только задачей об относительном минимуме, который мы будем называть для краткости просто минимумом.

Для того, чтобы данное выше определение относительного минимума стало вполне точным, нужно определить, что̀ надо понимать под соседними кривыми. Будем говорить, что *допустимая кривая $\bar{y}$ близка к другой допустимой кривой $y = f(x)$ и лежит в области R_ε, если она удовлетворяет в промежутке (x_0, x_1) неравенству*:

$$f(x) - \varepsilon < \bar{y} < f(x) + \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Эти условия, очевидно, равносильны тому, что $\bar{y} = f(x) + \omega(x)$, причем $\omega(x)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ и удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{aligned} \omega(x_0) = \omega(x_1) = 0; \\ |\omega(x)| < \varepsilon \text{ для } x_0 < x < x_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Дадим теперь точное определение того, что кривая дает минимум [1]) интегралу (1):

Кривая $y = f(x)$ *дает минимум интегралу I* (1), *если можно найти такое положительное число ε, что значение интеграла* (1) *взятого по данной кривой*:

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

меньше, чем значение интеграла I по всякой допустимой кривой $\bar{y}$ области R_ε, т.-е. меньше чем значение интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\, dx, \quad \ldots \quad (6)$$

где $\omega(x)$ функция класса $C^{(1)}$, удовлетворяющая условиям (4) *и не тождественно равная нулю в (x_0, x_1).*

§ 6. Первая вариация. Уравнение Эйлера.

Теперь мы займемся разысканием необходимых условий для того, чтобы кривая $y = f(x)$, лежащая внутри области R [2]) давала минимум интегралу (1). По определению, для этого необходимо

---

[1]) Как мы условились выше, минимум здесь обозначает относительный минимум.

[2]) Случай, когда эта кривая имеет общую часть с границей R, является, как и в дифференциальном исчислении случай концов промежутка, особым, и те необходимые условия, которые мы найдем дальше, к нему неприменимы.

и достаточно, чтобы при достаточно малом ε, для всякой функции $\omega(x)$, удовлетворяющей условию (4), интеграл (5) был бы меньше интеграла (6). Так как это условие должно выполняться для всякой $\omega(x)$, то оно будет выполнено и при частном выборе $\omega(x)$. Этим мы и воспользуемся для получения необходимых условий. Пусть $\eta(x)$ произвольная функция класса $C^{(1)}$, обращающаяся в ноль на концах промежутка

$$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Тогда *при* любом достаточно малом α функция

$$\omega(x)=\alpha\,\eta(x)$$

будет удовлетворять условиям (4), а потому, если подставить в интеграл (6) вместо $\omega(x)$ величину $\alpha\,\eta(x)$, то полученное выражение

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,[x,\, f(x)+\alpha\,\eta(x),\, f'(x)+\alpha\,\eta'(x)]\,dx=I(\alpha), \quad .\ . \quad (8)$$

представляющее некоторую функцию от α, не должно превосходить величины интеграла (5), при достаточно малом α. Но, как это ясно из (8), интеграл (5) представляет ничто иное, как $I(0)$ и поэтому, при достаточно малых α

$$I(0)<I(\alpha),$$

т.-е. функция $I(\alpha)$ достигает минимума при $\alpha=0$. Таким образом, задача приведена, в известной части, к задаче дифференциального исчисления.

Разложим функцию $I(\alpha)$ в ряд Маклорена:

$$I(\alpha)=I(0)+\frac{\alpha}{1}I'(0)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}I''(0)+\ldots,$$

получающиеся здесь выражения $\alpha\,I'(0)$, $\alpha^2\,I''(0), \ldots$ называются первой, второй, ... вариацией интеграла I и обозначаются соответственно δI, $\delta^2 I, \ldots$

Из теорем дифференциального исчисления вытекает, что *для того, чтобы функция* $y=f(x)$ *давала минимум интегралу* (1), *необходимо, чтобы* $I'(0)=0$, *т.-е.*

$$\delta I=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

причем это условие должно выполняться *для всякой функции* $\eta(x)$ [которая участвует в выражении δI], принадлежащей классу $C^{(1)}$ и удовлетворяющей условию (7).

Напишем выражение $\delta I=\alpha\,I'(0)$ в раскрытом виде. Из (8), дифференцируя под знаком интеграла по α и полагая затем $\alpha=0$, найдем $I'(0)$ и

$$\delta I=\alpha\,I'(0)=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta'(x)\right]dx, \quad .\ .\ . \quad (10)$$

причем в выражениях

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial y'}$$

величины y и y' должны быть заменены на $f(x)$ и $f'(x)$.

Сделаем теперь дополнительное предположение [1]), что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$; тогда вторую часть выражения (10) можно преобразовать, применив формулу) интегрирования по частям, а именно:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\,dx = \left[\eta(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx.$$

Первый член второй части этого равенства в силу (7), обращается в нуль и, подставляя остальное в выражение для δI (10), найдем

$$\delta I = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11$$

Для того, чтобы $\delta I = 0$, необходимо равенство нулю интеграла стоящего в правой части (11), для всякой функции $\eta(x)$ класса $C^{(1)}$ удовлетворяющей условию (7). Мы можем применить теперь лемму I (§ 4), так как все условия ее соблюдены, если за F принять

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]$$

и заключаем, что в промежутке (x_0, x_1) тождественно

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Итак, мы нашли первое условие, которому должна непременно удовлетворять функция $y = f(x)$:

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ давала экстремум определенному интегралу I, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла дифференциальному уравнению (12).

Это уравнение было найдено впервые Эйлером и носит его имя. Раскрывая член $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$, мы можем уравнение Эйлера (12) переписать в развернутом виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Вообще говоря, $F(x, y, y')$, действительно, содержит y', и уравнение Эйлера представляет тогда дифференциальное уравнение второго порядка.

---

[1]) Этого дополнительного условия можно и не ставить (см. доб. 2, стр. 33).

Его общий интеграл $f_1(x, C_1, C_2)$ содержит две произвольных постоянных C_1 и C_2. Если мы потребуем, чтобы интегральная кривая прошла через две заданные точки A и B, то мы должны выбрать константы C_1 и C_2, чтобы

$$f_1(x_0, C_1, C_2) = y_0 \text{ и } f_1(x_1, C_1, C_2) = y_1.$$

Так как число уравнений равно числу неизвестных, то задача эта, вообще, имеет решение.

Интегральные кривые уравнения Эйлера называют экстремалями. Мы показали выше, таким образом, что всякая кривая дающая экстремальное значение интегралу I есть интегральная кривая уравнения Эйлера, т. е. экстремаль.

§ 7. Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

Мы рассмотрим здесь те случаи, когда функция F, стоящая под знаком интеграла (1), не зависит от каких-либо из переменных x, y, y'.

1) F есть функция только от y'.

$$F = F(y').$$

В этом случае уравнение Эйлера (13) приводится к

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$$

или просто

$$y'' = 0.$$

Его общий интеграл есть

$$y = ax + b,$$

и интегральные кривые суть прямые линии.

2) F зависит только от y и y':

$$F = F(y, y').$$

Уравнение Эйлера в этом случае будет

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

и мы легко найдем его первый интеграл. Действительно, рассмотрим

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y'^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y' y'' =$$
$$= -y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Если функция y удовлетворяет уравнению Эйлера, то правая часть обращается в нуль и

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (14)$$

дает нам первый интеграл уравнения Эйлера. После того как первый интеграл найден, интегрирование может быть здесь доведено до конца с помощью квадратуры.

3) F зависит только от x и y':

$$F = F(x, y').$$

Так как в этом случае $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, то уравнение Эйлера (12) будет:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

и его первый интеграл находим сразу:

$$\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Решая это уравнение относительно y' и интегрируя, найдем общее решение уравнения Эйлера.

4) F зависит только от x и y:

$$F = F(x, y).$$

Уравнение Эйлера (12) в этом случае обращается в

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0$$

и не будет дифференциальным. Решая это уравнение, найдем одну или конечное число экстремалей вида:

$$y = \varphi(x).$$

Таким образом, в этом случае вариационная задача, вообще говоря, не имеет решения, так как нельзя найти для любых точек A и B экстремаль, проходящую через эти точки, и основная задача. разрешима здесь лишь при исключительных A и B.

§ 8. Некоторые обобщения основной задачи.

Здесь мы рассмотрим две задачи о минимуме интеграла типа (1) В основной задаче функция F зависела только от неизвестной функции y и ее производной y'; здесь мы рассмотрим два более общих случая:

1) Функция F зависит от нескольких неизвестных функций y, z, . . . и их первых производных y', z', . . .

2) Функция F зависит от неизвестной функции y и ее производных до n-ого порядка y', y'' . . . , $y^{(n)}$. Необходимые условия для этих задач находятся совершенно тем же методом, что и для основной задачи.

I. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ.

Мы ограничимся случаем, когда имеются две неизвестных функции y и z, так как случай большего числа неизвестных