Н.П. Антонов

Сборник задач по элементарной математике

Пособие для самообразования

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 82-053.2
ББК 74.27
Н11

Н.П. Антонов
Н11 Сборник задач по элементарной математике: Пособие для самообразования / Н.П. Антонов – М.: Книга по Требованию, 2023. – 532 с.

ISBN 978-5-458-25440-3

Настоящее пособие для самообразования предназначается для лиц с незаконченным средним образованием или окончивших школу давно и готовящихся к поступлению в вузы. Отклики читателей на первые два издания (вышедших под несколько иным названием) показали, что множество учащихся, занимающихся математикой без помощи преподавателя, действительно, нуждаются в таком пособии. Составители хотели помочь этим лицам научиться решать математические задачи и с этой целью дали решения для большинства задач.

ISBN 978-5-458-25440-3

решения нескольких последовательных задач учащийся видит, что они его не затрудняют, то он может пропустить несколько задач; сколько именно — можно сообразить, бегло просмотрев условия и решения.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В четвертом издании, хотя оно издается стереотипно, оказалось возможным учесть ряд замечаний, сделанных читателями относительно рационализации решений, а также исправить погрешности, обнаруженные в предыдущих изданиях. Исполнение пожеланий, требующих более значительной переделки текста, пришлось отложить до следующего издания.

Составители выражают глубокую признательность всем лицам, приславшим свои отзывы о книге. Помимо лиц, упомянутых в предисловии ко второму изданию, мы должны особо поблагодарить тт. Бабушкина Э. (Москва), Бровак (Москва), Добровольского Б. А. (Лабинск), Коба А. (Ленинград), Кравченко В. (Сталинград), Кубицкого Г. (Вильнюс), Лысова В. И. (Сталино), Нахумович Р. М. (Баку), Панова Э. (Куйбышев), Старчевского Ч. А., Теплову (Кемерово), Филайовича А. Г. (София, Болгария), Фоминкова В. Ф. (Запорожье), Хованова Г. М., Шильникову А. (Киров) и Шмелькина С. (Ленинград).

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании уточнены формулировки некоторых задач и внесены некоторые дополнения в объяснения.

Составители выражают глубокую признательность всем лицам, приславшим отзывы о книге. Помимо лиц, упомянутых в предисловиях ко второму и четвертому изданиям, мы должны особо поблагодарить тт. Архарову М. (Таганрог), Заколодкина Ю. (Горький), Клопкова В. Ф. (Москва), Кузьмина В. С. (Львов), Лежнева А., Турчанинова В. В. (Харьков) и Шевченко А. (Одесса).

Заранее выражаем признательность тем читателям, которые захотят высказать свои пожелания и замечания.

Отзывы и пожелания адресовать: Москва В-71, Ленинский проспект 15, «Физматгиз».

Н. Антонов, М. Выгодский, В. Никитин.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

I. Арифметика и алгебра

Пропорции

1. В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; a и d — крайние члены, b и c — средние. Основное свойство пропорции $a\cdot d=b\cdot c$.

2. Перестановка членов пропорции:

$$\text{а) } \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\quad \text{б) } \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \text{в) } \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \text{г) } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

3. Производные пропорции: дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, справедливы следующие пропорции:

$$\text{а) } \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c};\qquad \text{б) } \frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Действия со степенями

1. $(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$, то есть $a^n\cdot b^n\cdot c^n=(a\cdot b\cdot c)^n$.

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, то есть $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$. 3. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

4. $a^m:a^n=a^{m-n}$. 5. $1:a^n=a^0:a^n=a^{-n}$.

6. $(a^m)^n=a^{mn}$.

Действия с корнями*)

1. $\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}$, то есть $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}$.

2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, то есть $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.

---

*) Корни предполагаются арифметическими, ср. стр. 122—125.

3. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, то есть $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. 4. $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p = \sqrt[m]{a^{np}}$.

5. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$, то есть $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Квадратные уравнения

1. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ решается по формуле $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

2. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ решается по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

3. Уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ решается по формуле $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

4. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

5. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

6. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Прогрессии (см. стр. 43).

Логарифмы*)

1. Запись $\log_a N = x$ равнозначна записи $a^x = N$, так что имеем тождество $a^{\log_a N} = N$.

2. $\log_a a = 1$. 3. $\log_a 1 = 0$. 4. $\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$.

5. $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$. 6. $\log_a (N^m) = m \log_a N$.

7. $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \log_a N$.

8. О модуле перехода от системы логарифмов с основанием «b» к системе с основанием «a» см. стр. 192—193.

Соединения

1. $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$. 2. $P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m = m!$

3. $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$. 4. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

---

*) Числа a (основание логарифма) и N предполагаются положительными, причем a отлично от 1.

Бином Ньютона

1. $(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots$
$\ldots + C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m.$
2. Общий член разложения: $T_{k+1} = C_m^k a^k x^{m-k}$.
3. $1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-2} + C_m^{m-1} + 1 = 2^m$.
4. $1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots \pm 1 = 0$.

II. Геометрия и тригонометрия

Длина окружности и ее дуги

$C = 2\pi R$; $l = \frac{\pi R a}{180} = R\alpha$ (a — градусная мера дуги, α — радианная мера).

Площади

Треугольник: $S = \frac{ah}{2}$ (a — основание, h — высота);
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p — полупериметр, a, b и c — стороны); $S = \frac{ab\sin C}{2}$.

Для равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a — сторона треугольника).

Параллелограмм: $S = bh$ (b — основание, h — высота).

Ромб: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ (d_1 и d_2 — диагонали).

Трапеция: $S = \frac{a+b}{2}h$ (a и b — основания, h — высота). $S = mh$ (m — средняя линия).

Правильный многоугольник: $S = \frac{Pa}{2}$ (P — периметр, a — апофема).

Круг: $S = \pi R^2$.

Круговой сектор: $S = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 a}{360}$ (a — градусная мера дуги сектора, α — радианная мера, l — длина дуги сектора).

Поверхности

Призма: $S_{бок} = Pl$ (P — периметр перпендикулярного сечения, l — боковое ребро).

Правильная пирамида: $S_{бок} = \frac{Pa}{2}$ (P — периметр основания, a — апофема).

Правильная усеченная пирамида: $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} a$ (P_1 и P_2 — периметры оснований, a — апофема).

Цилиндр: $S_{бок} = 2\pi RH$.

Конус: $S_{бок} = \pi Rl$ (l — образующая).

Усеченный конус: $S_{бок} = \pi (R_1 + R_2) l$.

Шар: $S = 4\pi R^2$.

Объемы

Призма: $V = SH$ (S — площадь основания, H — высота).

Пирамида: $V = \frac{SH}{3}$.

Усеченная пирамида: $V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Цилиндр: $V = \pi R^2 H$.

Конус: $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$.

Усеченный конус: $V = \frac{\pi H}{3}\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right)$.

Шар: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно

$\alpha = \frac{\pi \cdot a^\circ}{180^\circ}$; $a^\circ = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ (α — радианная мера угла, a — градусная).

Формулы сложения

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Двойные и половинные углы

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.
4. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$.
5. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$.
6. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$.
7. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.
8. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Приведение тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
5. $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.
6. $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 7. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Некоторые важные соотношения

1. $\sin\alpha\ \sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$.
2. $\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$.
3. $\sin\alpha\ \cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$.

Соотношения между элементами прямоугольного треугольника

(a, b — катеты; c — гипотенуза; A, B — острые углы; C — прямой)

1. $a=c\sin A=c\cos B$. 2. $b=c\sin B=c\cos A$.
3. $a=b\operatorname{tg}A=b\operatorname{ctg}B$. 4. $b=a\operatorname{tg}B=a\operatorname{ctg}A$.

Соотношения между элементами произвольного треугольника (a, b, c — стороны; A, B, C — углы)

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ (теорема синусов).
2. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (теорема косинусов).
3. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$ (теорема тангенсов).

Связь между значениями обратных тригонометрических функций

($\arcsin x$; $\arccos x$; $\operatorname{arctg} x$ — главные значения соответствующих обратных тригонометрических функций)

1. $\operatorname{Arcsin} x=k\pi+(-1)^k\arcsin x$. 2. $\operatorname{Arccos} x=2\pi k\pm\arccos x$.
3. $\operatorname{Arctg} x=\pi k+\operatorname{arctg} x$; k — любое целое число (положительное или отрицательное).

ЗАДАЧИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ГЛАВА 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. $\dfrac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$.

2. $\dfrac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$.

3. $\dfrac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0{,}0001:0{,}005}$.

4. $\left(\dfrac{0{,}012}{5}+\dfrac{0{,}04104}{5{,}4}\right)\cdot 4560-42\frac{1}{3}$.

5. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04}$.

6. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}002}$.

7. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+0{,}373}{0{,}2}$.

8. $\dfrac{\left(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3}+0{,}6}{0{,}2}$.

9. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)\cdot 13{,}5+0{,}111}{0{,}02}$.

10. $\dfrac{\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5}+2{,}13}{0{,}4}$.

11. $\dfrac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5}$.

12. $\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$.

13. $\dfrac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$.

14. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0{,}8+2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}$.

15. $\dfrac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\right)\cdot 4{,}5}{0{,}04}$.

16. $\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\dfrac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$.

17. $\dfrac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)\cdot 1\frac{9}{11}\right]\cdot 4{,}2}{0{,}008}$.

18. $\left[\dfrac{\left(2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\dfrac{\left(2{,}75-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-0{,}45}\right]:\dfrac{67}{200}$.

19. $\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right]:2\frac{1}{20}$.