**А. Картан**

# Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

**А. Картан**

А11 Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных / А. Картан – М.: Книга по Требованию, 2013. – 298 с.

**ISBN 978-5-458-29155-2**

Книга представляет собой курс, читанный Анри Картаном на факультете наук в Париже. В нём излагаются основные идеи теории аналитических функций, причём особенно подчёркиваются связи классического материала с новыми понятиями современной математики.Изложение вполне элементарно, курс освобождён от ряда второстепенных деталей, но наряду с общими идеями содержит и много конкретных методов.

**ISBN 978-5-458-29155-2**

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга выдающегося французского математика Анри Картана представляет собой интересное явление в математической учебной литературе. Она посвящена одной из наиболее классических отраслей математики — теории функций комплексного переменного — и содержит лишь самые основные и элементарные факты этой теории. И тем не менее основное впечатление от книги — свежесть и новизна.

Казалось бы, что может быть традиционнее вейерштрассова подхода к изложению теории функций? Однако, предпослав теории степенных рядов в комплексной области чрезвычайно простое и элегантное изложение формальных степенных рядов, А. Картан сразу подчеркивает связи этой теории с современной алгеброй и топологией. Использование понятия дифференциальной формы и гомотопии очень освежает изложение теории интегрирования, а введение пространств $\mathscr{C}(D)$ и $\mathscr{H}(D)$ функций, соответственно непрерывных и аналитических в области $D$, указывает на связи с последними работами по функциональному анализу...

Такого рода примеров можно привести довольно много. Однако автор отнюдь не злоупотребляет модернизмами, напротив, он строго ограничивает число новых терминов и понятий.

Книга А. Картана очень хорошо отражает дух современной теории функций комплексного переменного — науки одновременно и классической и молодой, богатой связями и с конкретными физическими задачами и с самыми новыми отраслями теоретической математики. Читатель не найдет в книге ряда традиционных вещей: почти не рассматриваются отображения, осуществляемые элементарными функциями, теорема Руше дана лишь в упражнениях, разложения на простейшие дроби и в бесконечные произведения даются на примерах и т. п. Однако в последнее время в университетском преподавании усиливаются тенденции сокращения основных курсов за счет освобождения их от деталей с тем, чтобы яснее выделить основные идеи. И курс Анри Картана, на наш взгляд, является отличным примером того, как эти тенденции следует осуществлять.

Можно надеяться, что читатели русского издания получат от книги такое же удовольствие, какое испытали переводчики и редакторы, работая над подготовкой этого издания.

*Б. В. Шабат*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга повторяет с некоторыми добавлениями курс лекций, читанный на факультете наук в Париже в рамках программы для лиценциатов в 1957/1958, 1958/1959 и 1959/1960 учебных годах. Она посвящена, главным образом, теории функций одного комплексного переменного. Случай многих действительных или комплексных переменных, тем не менее, затрагивается в гл. IV с той целью, чтобы, во-первых, стало возможным рассматривать гармонические функции двух действительных переменных как аналитические функции и, во-вторых, доказать в гл. VII теорему существования решения системы дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями и начальными условиями.

Содержание этой книги перекрывает ту часть программы экзамена по курсу «Математика II», которая посвящена аналитическим функциям. Этот круг вопросов ранее входил в курс «Дифференциальное и интегральное исчисление».

Детали программ лиценциатских экзаменов не являются твердо установленными, и лектор обычно сохраняет достаточно большую свободу в выборе материала для своего курса. Эта свобода не ограничивается практически ничем, кроме традиций; когда же речь идет о теории функций комплексного переменного, следует сказать, что эти традиции во Франции хорошо установлены. Мне, вероятно, остается только указать, в какой мере я отошел от них.

Прежде всего, я предпочел начать изложение не с точки зрения Коши (дифференцируемые функции и интеграл Коши), а с точки зрения Вейерштрасса, т. е. с теории сходящихся степенных рядов (гл. I). Этому предшествует сжатое изложение теории формальных операций над степенными рядами — того, что в наши дни называется теорией формальных степенных рядов. Кроме того, я обновил традиции, посвятив два параграфа гл. VI систематическому, хотя и совершенно элементарному изложению теории абстрактных «аналитических пространств» (комплексной размерности 1). Мы называем здесь «аналитическим пространством» то, что раньше называли и часто называют еще сейчас «римановой поверхностью». Мы, однако, предпочитаем сохранить название римановой поверхности для обозначения совокупности аналитического пространства и голоморфного отображения этого пространства в комплексную плоскость (или в другое аналитическое пространство). Таким образом, с желаемой ясностью устанавливается различие между двумя этими понятиями, что невозможно в классической терминологии.

При рассмотрении такой классической темы, как теория функций комплексного переменного, которой посвящено и посвящается столько трактатов во всех странах, не может быть и речи о претензии на оригинальность. Если настоящая книга и отличается чем-либо от предшествующих ей во Франции, то может быть тем, что мы следуем в ней недавнему, но все более распространяющемуся принципу: математический текст должен содержать точные формулировки всех предложений и теорем, которых достаточно для понимания последующих формулировок и на которые в любой момент можно было бы сослаться. Не считая немногочисленных ясно оговоренных исключений, приведены полные доказательства всех сформулированных в тексте утверждений.

Довольно тонкие вопросы плоской топологии, возникающие в связи с интегралом Коши и изучением многозначных функций, смело рассмотрены в гл. II. Думается, что здесь, как и ранее, несколько точных формулировок предпочтительнее обращения к смутной интуиции и расплывчатым идеям. При изложении этих вопросов меня вдохновляла прекрасная книга Л. Альфорса (Complex Analysis), хотя я и не следовал полностью точкам зрения, которые там развиваются. Что же касается основных понятий общей топологии, то они предполагаются известными читателю и используются во многих местах этой книги; в самом деле, этот курс рассчитан на студентов, изучающих курс «Математика II» и уже изучивших, в принципе, курс «Математика I».

Я выражаю горячую признательность господину Р. Такахаси, который, имея большой опыт в проведении практических занятий со студентами, любезно дополнил главы этой книги формулировками упражнений и задач. Мы надеемся, что читатель с их помощью будет иметь возможность удостовериться в том, что он понял и усвоил теоретические понятия, изложенные в тексте.

*Анри Картан*

Ди (Дром), 4 августа 1960 года.

# Глава I

# СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ ОТ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## § 1. ФОРМАЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

**1. Алгебра полиномов.** Пусть $K$ — коммутативное поле. Мы будем рассматривать формальные полиномы от одного символа (или «неизвестной») $X$ с коэффициентами из $K$, пока не придавая $X$ конкретного смысла. Операции сложения двух полиномов и умножения полинома на «скаляр» (т. е. на элемент из поля $K$) превращают множество $K[X]$ таких полиномов в *векторное пространство* над $K$, которое обладает бесконечным базисом

$$1,\ X,\ X^2,\ \ldots,\ X^n,\ \ldots .$$

Каждый полином представляет собой конечную линейную комбинацию символов $X^n$ с коэффициентами из $K$, т. е. может быть записан в виде $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, где в бесконечной последовательности коэффициентов $a_n$ все элементы, за исключением конечного числа, равны нулю. Таблица умножения

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

определяет некоторое умножение в $K[X]$; произведение

$$\Big(\sum_p a_p X^p\Big) \cdot \Big(\sum_q b_q X^q\Big)$$

равно $\sum\limits_n c_n X^n$, где

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p \cdot b_q. \tag{1.1}$$

Это умножение коммутативно и ассоциативно. Оно также билинейно, в том смысле, что для любых полиномов $P_1$, $P_2$, $P$, $Q$ и скаляра $\lambda$ имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} (P_1 + P_2)\cdot Q &= P_1 Q + P_2 Q,\\ (\lambda P)\cdot Q &= \lambda\cdot(PQ). \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Для этого умножения существует единичный элемент (который мы будем обозначать 1), а именно полином $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, у которого $a_0 = 1$, $a_n = 0$ при $n > 0$.

Совокупность перечисленных свойств означает, что множество $K[X]$, обладающее структурой векторного пространства и таким умножением, является *коммутативной алгеброй* с единицей над полем $K$; в частности, оно является коммутативным кольцом с единицей.

**2. Алгебра формальных рядов.** Формальный степенной ряд от $X$ представляет собой формальное выражение $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, причем на этот раз не предполагается, что все коэффициенты $a_n$, за исключением конечного числа, равны нулю. Сумма двух формальных рядов определяется по формуле

$$\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n\Big) + \Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n X^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n, \quad \text{где } c_n = a_n + b_n,$$

а произведение формального ряда на скаляр — по формуле

$$\lambda \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} (\lambda a_n) X^n.$$

Множество $K[[X]]$ формальных степенных рядов является векторным пространством над $K$. Обозначим символом 0 элемент этого пространства, прибавление которого к любому формальному ряду не изменяет последнего; это формальный ряд, все коэффициенты которого равны нулю.

Произведение двух формальных рядов, так же как и произведение двух полиномов, определяется при помощи формулы (1.1), которая сохраняет смысл, так как в ней для каждого $n$ коэффициент $c_n$ определяется как сумма конечного числа слагаемых. Умножение и в этом случае коммутативно, ассоциативно и билинейно по отношению к операциям векторного пространства. Множество $K[[X]]$, так же как и множество $K[X]$, представляет собой алгебру над полем $K$ с единичным элементом, обозначаемым 1 (им является ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, такой, что $a_0 = 1$, $a_n = 0$ при $n > 0$).