

§ 2. Алгебраические выражения.

Решим задачу.

Ученик купил n тетрадей по 2 коп. за тетрадь и учебник за 8 коп. Сколько заплатил он за всю покупку?

Чтобы узнать стоимость всех тетрадей, надо цену одной тетради умножить на число тетрадей. Значит, стоимость тетрадей будет равна $2 \cdot n$ копейкам.

Стоимость же всей покупки будет равна

$$(2 \cdot n + 8) \text{ копеек.}$$

Заметим, что перед множителем, выраженным буквой, знак умножения принято опускать, он просто подразумевается. Поэтому предыдущую запись можно представить в таком виде:

$$2n + 8.$$

Получили формулу решения задачи. Она показывает, что для решения задачи надо цену тетради умножить на число купленных тетрадей и к произведению прибавить стоимость учебника.

Вместо слова «формула» для подобных записей употребляют также название «алгебраическое выражение».

Алгебраическим выражением называется запись, состоящая из чисел, обозначенных цифрами или буквами и соединённых знаками действий.

Для краткости вместо «алгебраическое выражение» говорят иногда просто «выражение».

Приведём ещё примеры алгебраических выражений:

$$\frac{a+3}{b-1}; \quad 3mn; \quad 9(p+q); \quad a; \quad (3+8) \cdot 7; \quad 4,5.$$

Из этих примеров видим, что алгебраическое выражение может состоять только из одной буквы, а может совсем не содержать чисел, обозначенных буквами (два последних примера). В этом последнем случае выражение называется также арифметическим выражением.

Дадим в полученном нами алгебраическом выражении $2n + 8$ букве n значение 5 (значит, ученик купил 5 тетрадей). Подставив вместо n число 5, получим:

$$2 \cdot 5 + 8,$$

что равно 18 (то есть 18 коп.).

Число 18 является значением данного алгебраического выражения при $n = 5$.

Значением алгебраического выражения называется число, которое получится, если в это выражение подставить вместо букв данные их значения и произвести над числами указанные действия.

Например, мы можем сказать: значение выражения $2n + 8$ при $n = 2$ равно 12 (12 коп.).

Значение этого же выражения при $n = 3$ равно 14 (14 коп.) и т. д.

Мы видим, что значение алгебраического выражения зависит от того, какие значения мы дадим входящим в него буквам. Правда, иногда бывает, что значение выражения не зависит от значений входящих в него букв. Например, выражение $2(a + 3) - 2a$ равно 6 при любых значениях a .

Найдём в виде примера числовые значения выражения $3a + 2b$ при различных значениях букв a и b .

Пусть $a = 4$ и $b = 2$.

Подставим в данное выражение вместо a число 4, а вместо b число 2 и вычислим полученное выражение:

$$3a + 2b = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12 + 4 = 16.$$

Итак, при $a = 4$ и $b = 2$ значение выражения $3a + 2b$ равно 16.

Таким же образом найдём, что при $a = 5$ и $b = 7$ значение выражения равно 29, при $a = 0$ и $b = 1$ оно равно 2 и т. д.

Результаты вычислений можно записать в виде таблицы, которая наглядно покажет, как изменяется значение выражения в зависимости от изменения значений входящих в него букв.

Составим таблицу из трёх строк. В первой строке будем записывать значения a , во второй — значения b и

в третьей — значения выражения $3a + 2b$. Получим такую таблицу:

a	4	5	0	3	3
b	2	7	1	5	1
$3a + 2b$	16	29	2	19	11

В § 1, говоря о переместительном законе сложения, мы записали, что два выражения $a + b$ и $b + a$ равны:

$$a + b = b + a.$$

Такая запись называется равенством.

Два алгебраических выражения, соединённые знаком «равно», образуют равенство.

Как известно из арифметики, кроме знака равенства, употребляются ещё знаки неравенства:

$>$ — этот знак означает больше,
 $<$ — этот знак означает меньше.

Например:

$5 > 2$ — читается: пять больше двух;

$3 < 7$ — читается: три меньше семи.

Следует запомнить, что знак неравенства всегда обращён остриём к меньшему числу.

Два выражения, соединённые знаком «больше» или «меньше», образуют неравенство.

Пример. Измерив отрезок, получили, что его длина d больше 5 см, но меньше 6 см. Результат измерения можно записать в виде двойного неравенства:

$$5 \text{ см} < d < 6 \text{ см}.$$

§ 3. Допустимые значения букв.

Из примеров, приведённых в § 1, заключаем, что буквы, входящие в какое-либо алгебраическое выражение, могут принимать иногда любые значения (первый

пример), иногда лишь некоторые, но не любые значения (второй пример).

Определение. Значения, которые могут принимать буквы в данном алгебраическом выражении, называются допустимыми значениями для этих букв.

Если выражение получилось в результате решения задачи, то совокупность, или, как принято говорить, множество, допустимых значений для букв определяется по смыслу самой задачи.

Так, в выражении $2n + 8$, полученном в § 2, множеством допустимых значений для n является только множество натуральных чисел, так как количество тетрадей может выражаться лишь натуральным числом.

Если о значениях букв в данном выражении ничего не сказано, то для такого выражения допустимыми считаются все те значения букв, при которых выражение имеет смысл.

Пусть дано выражение:

$$\frac{2x - 15}{2}.$$

Найдём его значение при $x = 2$. Подставив в него вместо x число 2, получим:

$$\frac{2 \cdot 2 - 15}{2} = \frac{4 - 15}{2}.$$

Получили в числителе уменьшаемое, которое меньше вычитаемого. Выражение при $x = 2$ потеряло смысл. Значит, число 2 не является допустимым значением для x . Легко видеть, что x в этом выражении может принимать значения только большие или равные $\frac{15}{2}$. При всех значениях x , меньших $\frac{15}{2}$, выражение теряет смысл. Коротко эти допустимые значения для x можно записать так: $x \geq \frac{15}{2}$.

Знак $\geq$ означает «больше или равно».

В выражении $\frac{2}{a-3}$ допустимыми значениями для a будут только числа, большие 3, так как при $a = 3$ в зна-

менателе получается нуль, а (как известно из арифметики) на нуль делить нельзя; если же a меньше, чем 3, то нельзя из a вычесть 3. Множество допустимых значений для a можно записать так: $a > 3$.

§ 4. Порядок действий.

Когда в арифметике над числами нужно было произвести различные действия, то мы производили их в порядке, установленном особыми правилами. Эти же правила остаются и в алгебре.

Напомним, что

сложение и вычитание называются действиями первой степени;

умножение и деление называются действиями второй степени.

Напомним теперь правила о порядке действий.

Правило 1. *Действия одной и той же степени производятся в том порядке, в каком они записаны.*

Примеры.

$$17 - 11 + 8 = 6 + 8 = 14;$$

$$8 : 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Правило 2. *Если выражение содержит действия различных степеней, то сначала производят действия высшей степени, затем низшей степени.*

Поясним это правило на примерах.

Пример 1.

$$3 + 5 \cdot 7 = 3 + 35 = 38.$$

Первым произведено умножение (действие второй степени), затем — сложение.

Пример 2.

$$\begin{aligned} 2,5 \cdot 3,7 + 5,9 \cdot 6,1 - 2,4 \cdot 3,2 = \\ = 9,25 + 35,99 - 7,68 = 37,56. \end{aligned}$$

И в этом примере мы сначала выполнили все умножения (действия второй степени), а затем (в порядке записи

произвели сложение и вычитание (действия первой ступени).

Но иногда приходится отступать от порядка, указанного в правиле 2. Покажем это на задаче.

Задача. Из двух пунктов одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного a км в час, другого b км в час. Каково расстояние между пунктами, если велосипедисты встретились через t часов?

Решим задачу по вопросам.

1) Какое расстояние проходили за час оба велосипедиста вместе?

$$a + b \text{ (км).}$$

2) Чему равно расстояние между двумя пунктами?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо полученное расстояние $a + b$ умножить на t . Если мы запишем это действие в виде

$$a + bt \text{ (км),}$$

то ответ будет неверен, так как по правилу 2 мы должны в этом выражении b умножить на t и результат прибавить к a . Нам надо показать, что здесь сначала следует произвести сложение (действие первой ступени), а затем умножение (действие второй ступени). Показывается это при помощи скобок, и выражение записывается так:

$$(a + b)t \text{ (км).}$$

Правило 3. Если нужно произвести раньше действия низшей ступени, то применяются скобки. Действия над числами, заключёнными в скобки, производятся первыми.

Приведём примеры.

1) $11 - 2 \cdot 4 = 11 - 8 = 3$, но $(11 - 2) \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$.

2) $(5 + 3) \cdot (8 - 2) = 8 \cdot 6 = 48$, но $5 + 3 \cdot 8 - 2 =$
 $= 5 + 24 - 2 = 27$.

Если дано дробное выражение, записанное с помощью черты, то черта заменяет скобки и означает, что надо вычислить отдельно выражение, стоящее в числителе, и

отдельно выражение, стоящее в знаменателе, и первый результат разделить на второй.

Пример.

$$\frac{a+b}{c-d} = (a+b):(c-d).$$

При $a=20$, $b=16$, $c=8$, $d=2$ получим:

$$\frac{a+b}{c-d} = \frac{20+16}{8-2} = \frac{36}{6} = 6.$$

§ 5. Основные законы сложения и умножения.

В дальнейшем, когда будем изучать действия над числами, изображёнными цифрами или буквами (безразлично), нам придётся во многих выводах опираться на те законы действий, которые изучались в арифметике. В силу важности этих законов они называются основными законами действий.

Напомним их.

1. Переместительный закон сложения.

Сумма не изменяется от перемены порядка слагаемых.

Этот закон уже был записан в § 1 в виде равенства:

$$a+b=b+a,$$

где a и b — любые числа.

Из арифметики известно, что переместительный закон верен для суммы любого числа слагаемых.

2. Сочетательный закон сложения.

Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой.

Для суммы трёх слагаемых имеем:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Например, сумму $5+7+11$ можно вычислить двумя способами так:

$$(5+7)+11=12+11=23,$$

$$5+(7+11)=5+18=23.$$

Сочетательный закон справедлив для любого числа слагаемых.

Так, в сумме $a + b + c + d$ четырёх слагаемых рядом стоящие слагаемые можно как угодно объединять в группы и заменять эти слагаемые их суммой:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= (a + b + c) + d = (a + b) + (c + d) = \\ &= a + (b + c) + d = a + b + (c + d) = (a + b) + c + d. \end{aligned}$$

Например, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$; мы получим то же число 16, каким бы способом ни группировали рядом стоящие слагаемые:

$$\begin{aligned} 1 + (3 + 5) + 7 &= 1 + 8 + 7 = 16, \\ 1 + 3 + (5 + 7) &= 1 + 3 + 12 = 16, \\ (1 + 3) + (5 + 7) &= 4 + 12 = 16. \end{aligned}$$

Переместительным и сочетательным законами часто пользуются при устных вычислениях, располагая числа так, чтобы легче было их сложить в уме.

Пример 1.

$$89 + 67 + 11.$$

Поменяем местами два последних слагаемых, получим:

$$89 + 11 + 67.$$

Сложить числа в этом порядке оказалось гораздо легче.

Обычно слагаемые в новом порядке не переписывают, а производят их перемещение в уме: переставив мысленно 67 и 11, сразу складывают 89 и 11 и затем прибавляют 67.

Пример 2.

$$2\frac{2}{23} + 7\frac{1}{2} + 3 + 2\frac{1}{2}.$$

Чтобы легче было сложить эти числа в уме, изменим порядок слагаемых так:

$$2\frac{2}{23} + 3 + 7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}.$$

Пользуясь сочетательным законом, заключим два последних слагаемых в скобки:

$$2\frac{2}{23} + 3 + \left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\right).$$

Сложение чисел в скобках произвести легко, получим:

$$2 \frac{2}{23} + 3 + 10 = 2 \frac{2}{23} + 13 = 15 \frac{2}{23}.$$

3. Переместительный закон умножения.

Произведение не изменяется от перемены порядка сомножителей:

$$ab = ba,$$

где a и b — любые числа.

Из арифметики известно, что переместительный закон верен для произведения любого числа сомножителей.

4. Сочетательный закон умножения.

Произведение нескольких сомножителей не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением.

Для произведения трёх сомножителей имеем:

$$(ab)c = a(bc).$$

Например, произведение трёх сомножителей $5 \cdot 3 \cdot 4$ можно вычислить так:

$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$$

или так:

$$5 \cdot (3 \cdot 4) = 5 \cdot 12 = 60.$$

Для произведения четырёх сомножителей имеем:

$$abcd = (abc)d = (ab)cd = a(bc)d = (ab)(cd) = \\ = a(bcd) = ab(cd).$$

Например, $2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = 20$; то же число 20 получится при любой группировке рядом стоящих сомножителей:

$$2 \left(6 \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20; \quad (2 \cdot 6) \left(\frac{1}{3} \cdot 5 \right) = 12 \cdot \frac{5}{3} = 20;$$

$$2 \left(6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \right) = 2 \cdot 10 = 20.$$

Применение переместительного и сочетательного законов умножения часто значительно облегчает вычисления.

Пример 1.

$$25 \cdot 37 \cdot 4.$$

Умножить 25 на 37 не очень легко. Переместим два последних сомножителя:

$$25 \cdot 4 \cdot 37.$$

Теперь умножение легко выполнится в уме.

Пример 2.

$$75 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 2.$$

Применим переместительный и сочетательный законы, запишем это выражение так:

$$75 \cdot 4 \cdot (35 \cdot 2).$$

Все эти действия легко выполняются в уме.

5. Распределительный закон умножения по отношению к сложению.

Чтобы умножить сумму двух (или нескольких) чисел на какое-либо число, можно каждое слагаемое умножить на это число и результаты сложить:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Пример 1. Распределительный закон мы применяем, например, при умножении двузначных (и многозначных) чисел. Так, чтобы умножить 26 на 7, мы представляем 26 в виде суммы $20 + 6$, умножаем 20 на 7, 6 на 7 и результаты складываем:

$$26 \cdot 7 = (20 + 6) \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = 140 + 42 = 182.$$

Но иногда бывает выгоднее поступать наоборот: вместо того чтобы умножить каждое слагаемое на одно и то же число, сначала находят сумму этих слагаемых и умножают её на данное число.

Пример 2.

$$87 \cdot 28 + 13 \cdot 28.$$

Представим выражение в другом виде:

$$(87 + 13) \cdot 28.$$