

Д. Бобылев

**Очерк теории водяных
течений, выработанной
Буссинеском**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Д11

Д11 **Д. Бобылев**
Очерк теории водяных течений, выработанной Буссинеском / Д. Бобылев – М.:
Книга по Требованию, 2026. – 197 с.

ISBN 978-5-458-58144-8

ISBN 978-5-458-58144-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

отъ средней мѣстной скорости и отъ другихъ величинъ. Въ § 2-мъ настоящаго очерка излагаются эти допущенія или гипотезы Буссинека ¹⁾.

Въ § 3-мъ выводятся приближенные равенства, получаемыя Буссинекомъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія, причемъ говорится о томъ, какими именно величинами и выраженіями онъ пренебрегаетъ. Самая слабая сторопа такихъ пренебреженій, дѣлаемыхъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ гидродинамики, заключается въ томъ, что мы очень часто не можемъ указать, каковы величины дѣлаемыхъ при этомъ погрѣшностей.

Въ §§ 4 и 5 дѣлается выводъ приближеннаго выраженія для давленія и выводъ уравненія движенія потока.

Въ слѣдующихъ затѣмъ §§ 6 — 11 излагается въ измѣненномъ видѣ параграфъ XI третьей части книги Буссинека. Авторъ (на стр. 488) говоритъ, что изложеніе было бы короче и можно было бы избѣжать многихъ повтореній, еслибы параграфъ этотъ былъ изложенъ передъ началомъ части второй; но онъ не сдѣлалъ этого и избралъ длиннѣйшій путь для того, чтобы постепенно переходить отъ простыхъ вопросовъ къ болѣе сложнымъ.

Стъ § 12-го начинается примѣненіе предыдущихъ общихъ формулъ къ теоріи теченій установившихся, сначала равномерныхъ (§ 12), затѣмъ однообразныхъ (§§ 13, 14, 15).

Въ § 16-мъ общія формулы примѣняются къ теченію въ широкомъ каналѣ при замѣтномъ искривленіи линий теченія; искривленія эти могутъ происходить, какъ вслѣдствіе искривленія дна русла, такъ и при переходѣ отъ равномернаго теченія къ неравномерному, или обратно. Въ § 17-мъ разсматривается искривленіе поверхности въ областяхъ такихъ переходовъ, причемъ выясняется необходимость раздѣлить потоки на три класса: рѣки, быстрые стремнины (§ 18) и стремнины умѣреннаго уклона (§ 19). Въ § 20-мъ разсматри-

¹⁾ Въ настоящемъ 1896 году въ томахъ CXXXII (стр. 1289, 1371, 1446, 1517) и CXXXIII (стр. 7, 77, 141) помѣщена статья Буссинека подъ заглавіемъ: „Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grandes section“. Статья эта недавно издана отдѣльно. Появленіе ея объясняется частью тѣмъ, что всѣ отдѣльные экземпляры „Essai sur la théorie des saix courantes“ разошлись, частью тѣмъ, что авторъ нашелъ удобнымъ нѣсколько упростить выводы нѣкоторыхъ формулъ.

вается предложенное С.-Вспомомъ раздѣленіе потоковъ на спокойные и стремительные и характеристическое различіе въ видѣ поверхности такихъ потоковъ въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ однообразное теченіе устанавливается или растривается. Въ § 21-мъ разсматривается вліяніе неровностей дна на видъ поверхности потока.

Въ § 22-мъ разсматриваются неустановившіяся теченія въ трубахъ наполненныхъ жидкостью.

Всѣ дальнѣйшіе параграфы относятся къ теченіямъ въ открытыхъ руслахъ, предполагая, что ширина живого сѣченія во много разъ болѣе глубины. О содержаніи этихъ параграфовъ можно судить по прилагаемому оглавленію всего очерка.

Въ очеркъ не вошло изложеніе той части § XXVIII книги автора, въ которой разсматривается распространеніе волнъ въ бассейнахъ и даны приближенныя выраженія движенія жидкости при зыби и толчеѣ.

Д. Бобылевъ.

О Г Л А В Л Е Н І Е.

§§

стр.

Главные уравненія теоріи теченій . . .	1
1. Дифференціальныя уравненія движенія жидкостей обладающих треніемъ, выведенныя Навье. Прямолинейныя теченія, какъ частныя рѣшенія этихъ уравненій. Заключение Буссинека о непримѣимости этихъ рѣшеній къ теченію въ широкихъ трубахъ и каналахъ, если предполагать коэффициентъ внутренняго тренія постояннымъ	1
2. Допущенія, положенныя на основаніи теоріи Буссинека	8
3. Приближенныя равенства, получаемыя изъ уравненій § 1-го	12
4. Выводъ приближеннаго выраженія для давленія	17
5. Выводъ уравненія движенія потока	19
6. Включеніе величины средней скорости потока въ полученныя уравненія	21
7. Третье допущеніе Буссинека. Введеніе представленія о равномерномъ теченіи черезъ данное сѣченіе	24
8. Новый видъ уравненій § 6-го	25
9. Степень малости величинъ ускореній и разности ($u - \varphi U$)	25
10. Составленіе приближеннаго выраженія для суммы выѣшнихъ треній на элементахъ подводнаго периметра	26
11. Преобразование уравненія движенія потока	34
 I. Теченія установившіяся	37
12. Равномерное установившееся теченіе при постоянномъ живомъ сѣченіи	37
13. Установившееся однообразное теченіе. Уравненіе потока	46
14. Распредѣленіе скоростей въ установившемся однообразномъ теченіи	51
15. Уравненіе однообразнаго теченія въ каналахъ и рѣкахъ, представленное подъ извѣстнымъ въ гидравликѣ видомъ	63
16. Установившееся теченіе въ широкомъ каналѣ при замѣтномъ искривленіи поверхности	65
17. Преобразование дифференціального уравненія (108) для случаевъ прямолинейнаго профиля дна русла	74
18. Потоки первыхъ двухъ классовъ. (Рѣки и быстрыя стремнины)	78

§§	стр.
19. Стремнины умирённого уклона	88
20. Потоки спокойные и стремительные	96
21. Вліяніе неровностей дна на видъ поверхности потока	100

II. Течения неустановившіяся 111

22. Однообразныя неустановившіяся теченія въ трубахъ, заполненныхъ жидкостью	111
23. Неустановившееся однообразное теченіе въ широкомъ каналѣ. Выраженія поперенныхъ скоростей при прямолинейной гидравлической оси	117
24. Неустановившееся однообразное теченіе въ прямоугольномъ широкомъ каналѣ съ плоскимъ дномъ. Выраженіе продольной скорости	122
25. Уравненія неустановившагося теченія въ каналѣ, ось и дно котораго не имѣютъ сильныхъ искривленій, а прямоугольныя живыя сѣченія имѣютъ ширину несравненно большую глубины потока или высоты сѣченія	128
26. Уравненія неустановившагося теченія въ каналѣ прямоугольнаго сѣченія при замѣтномъ искривленіи гидравлической оси, если скорости различныхъ линій теченія мало разнятся между собою	134
27. Преобразованіе уравненій (198) и (199)	137
28. Приближенное выраженіе закона распространенія невысокихъ волнъ въ каналѣ почти горизонтальномъ. Первое приближеніе	139
29. Исслѣдованіе законовъ распространенія волнъ въ каналѣ почти горизонтальномъ, производимое съ приближеніемъ второго порядка	143
30. Исслѣдованіе законовъ распространенія волнъ въ каналѣ почти горизонтальномъ и въ которомъ нѣтъ теченія. Уединенная волна	150
31. Центръ тяжести, полная энергія, количество движенія и моментъ неустойчивости какой либо волны въ каналѣ, не имѣющемъ теченія	159
32. О распространеніи волнъ неустойчивыхъ въ неимѣющемъ теченія каналѣ	168
33. О распространеніи волнъ незначительной кривизны въ неимѣющемъ теченія каналѣ. Примѣненія къ вопросу о распространеніи прилива въ каналѣ, предполагая, что пренебрегаютъ треніемъ	170
34. Обобщеніе формулъ и результатовъ, выведенныхъ въ §§ 30—32, на тѣ случаи, въ которыхъ первоначальное теченіе существуетъ въ каналѣ	173
35. Приближенные формулы для тѣхъ случаевъ, въ которыхъ продольныя скорости замѣтно разнятся между собою	176
36. Вліяніе уклона дна и тренія воды о дно на распространеніе волнъ въ каналѣ	181

Опечатки, замѣченные въ первомъ выпускѣ.

Стр.:	Строка сверху:	Напечатано:	Должно быть:
11	6	равне	позже
35	15	ds	∂s
52	6	$(\alpha - 1 - \gamma)$	α
53	14	$\partial \left(\frac{u}{U} \right) \frac{z}{\partial s} \frac{\partial h}{h \partial s}$	$\partial \left(\frac{u}{U} \right) \frac{z}{\partial z} \frac{\partial h}{h \partial s}$
53	16	w	$\frac{w}{u}$
53	17	представляющая полную	представляющая дѣйстви- тельную
56	16	$1 + \frac{B}{3A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right)$	$1 + \frac{B}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right)$
57	17	$\frac{B}{3A} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{B}{A} \right)$	$\frac{B}{6A} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{B}{A} \right)$
57	18	$\frac{B}{3A} \left(2 + \frac{7}{10} \frac{B}{A} \right)$	$\frac{B}{6A} \left(2 + \frac{7}{10} \frac{B}{A} \right)$
57	19	$\frac{B}{3A} \left(1 + \frac{5}{10} \frac{B}{A} \right)$	$\frac{B}{6A} \left(1 + \frac{5}{10} \frac{B}{A} \right)$
59	16	$\frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial s}$	$\frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial s} u$
59	18	$\frac{\partial \left(\frac{u}{U} \right)}{\partial r} W$	$\frac{\partial \left(\frac{u}{U} \right)}{\partial r} \frac{W}{u}$
60	1	(93),	(93), помноженной на u ,
67	8	$\frac{u^2}{\rho + z} = \frac{u^2}{\rho} - u^2 \frac{z}{\rho^2} + \dots$	$\frac{u^2}{\rho - z} = \frac{u^2}{\rho} + u^2 \frac{z}{\rho^2} + \dots$
96	12	$-\gamma$	γ
96	15	$-\infty$, выпуклость	$-\infty$. Выпуклость

§ 1. Дифференціальныя уравненія движенія жидкостей обладающих треніемъ, выведенныя Навье. Прямолинейныя теченія, какъ частныя рѣшенія этихъ уравненій. Занлючение Буссинека о непримѣимости этихъ рѣшеній къ теченію въ широкихъ трубахъ и каналахъ, если предполагать коэффиціентъ внутренняго тренія постояннымъ.

Первые зачатки изслѣдованій Буссинека, относящихся къ теоріи теченій, находимъ въ его мемуарѣ: *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, напечатанномъ въ журналѣ *Liouville* за 1868-й годъ *).

Здѣсь авторъ прежде всего составляетъ дифференціальныя уравненія движенія жидкостей, обладающихъ треніемъ, которыя впервые выведены были Навье въ 1822-мъ году **). Уравненія эти могутъ быть представлены подъ слѣдующимъ видомъ.

1) Въ каждой точкѣ жидкости проэкціи u, v, w (на оси координатъ OX, OY, OZ) скорости теченія должны удовлетворять слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, publié par J. Liouville, 2-me Série, tome 13, an. 1868, p. 377.

**) *Mémoires de l'Académie des Sciences* t. VII, p. 389. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*.

гдѣ ρ — плотность жидкости, X, Y, Z проэкціи на оси координатъ силы, приходящейся на единицу массы жидкости; величины $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ означаютъ выраженія:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -p + 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, & T_1 &= \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ N_2 &= -p + 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y}, & T_2 &= \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ N_3 &= -p + 2\varepsilon \frac{\partial w}{\partial z}, & T_3 &= \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad . . \quad (2)$$

здѣсь p есть давленіе жидкости, приходящееся на единицу площади, ε — коэффициентъ внутренняго тренія жидкости. Величины X, Y, Z, p, u, v, w суть функціи отъ x, y, z, t , а производныя, заключающіяся въ формулахъ (1) и (2), суть частныя производныя по переменнымъ x, y, z, t .

2) Функціи u, v, w должны удовлетворять дифференціальному уравненію:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

выражающему несжимаемость жидкости.

3) На поверхности стѣнокъ скорость теченія должна быть касательна къ поверхности, т. е. должна удовлетворять условію:

$$u \cos (nX) + v \cos (nY) + w \cos (nZ) = 0, \quad . . . (4)$$

гдѣ n означаетъ направленіе нормали къ поверхности стѣнки, проведенное внутрь жидкости. Нормальное давленіе на стѣнку въ какой-либо точкѣ ея равняется той величинѣ p , которую эта функція имѣетъ въ разсматриваемой точкѣ, тангенціальное же напряженіе, оказываемое жидкостью на стѣнку, имѣетъ направленіе скорости V жидкости и равно λV , гдѣ λ есть численный коэффициентъ тренія жидкости о стѣнку. Послѣднія условія могутъ быть выражены слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} X_n - N_n \cos (nX) &= \lambda u \\ Y_n - N_n \cos (nY) &= \lambda v \\ Z_n - N_n \cos (nZ) &= \lambda w \end{aligned} \right\} (5)$$

гдѣ

$$N_n = X_n \cos (nX) + Y_n \cos (nY) + Z_n \cos (nZ)$$

есть нормальная составляющая напряженія, а X_n , Y_n , Z_n суть проекціи на оси координатъ напряженія на единицу поверхности элемента стѣнки, нормаль котораго есть n ; величины эти выражаются формулами:

$$X_n = N_1 \cos (nX) + T_3 \cos (nY) + T_2 \cos (nZ),$$

$$Y_n = T_3 \cos (nX) + N_2 \cos (nY) + T_1 \cos (nZ),$$

$$Z_n = T_2 \cos (nX) + T_1 \cos (nY) + N_3 \cos (nZ).$$

4) На свободной поверхности скорость жидкости должна быть направлена вдоль по поверхности, т. е., если уравненіе поверхности есть $f(x, y, z, t) = 0$, то скорость должна удовлетворять условію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \dots \dots (6)$$

Наружное давленіе уравнивается здѣсь съ давленіемъ p , дѣйствующимъ со стороны жидкости и коэффициентъ внѣшняго тренія λ здѣсь предполагается равнымъ нулю.

Одно изъ частныхъ рѣшеній этихъ дифференціальныхъ уравненій представляетъ прямолинейное теченіе тяжелой жидкости въ цилиндрической трубкѣ какого-либо сѣченія. Взявъ ось трубки, наклоненную подъ угломъ J къ горизонту внизъ за ось X -овъ, предполагая ось Z -овъ въ вертикальной плоскости внизъ, а ось Y -овъ горизонтальною, будемъ имѣть слѣдующія выраженія проекцій на оси координатъ силы тяжести, рассчитанной на единицу массы:

$$X = g \sin J, \quad Y = 0, \quad Z = g \cos J.$$

Предположимъ теченіе прямолинейнымъ, параллельнымъ оси трубки, т. е. положимъ v и w равными нулю, тогда дифференціальное уравненіе (3) обратится въ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (это значитъ u не зависитъ отъ x), а дифференціальныя уравненія (1) обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sin J - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

$$0 = g \cos J - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Означимъ $p = \rho g (x \sin J + z \cos J)$ черезъ P , тогда предыдущія уравненія получатъ такой видъ:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

Послѣднія два равенства выражаютъ, что P не зависитъ ни отъ y , ни отъ z , слѣдовательно оно можетъ быть только функціею отъ x и t ; поэтому и $\frac{\partial P}{\partial x}$ можетъ быть функціею только отъ x и t . Такъ какъ u не можетъ быть функціею отъ x , то изъ перваго дифференціального уравненія слѣдуетъ, что $\frac{\partial P}{\partial x}$ есть функція только отъ t . Ничто не мѣшаетъ предположить, что это есть произвольная функція; означивъ ее черезъ $\varphi(t)$, мы будемъ имѣть дифференціальное уравненіе:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t),$$

которому должна удовлетворить u , и для P слѣдующее выраженіе: $P = x\varphi(t) + \psi(t)$, гдѣ $\psi(t)$ новая произвольная функція.

Отсюда

$$p = (\rho g \sin J + \varphi(t)) x + \rho g z \cos J + \psi(t) \quad . \quad . \quad (7)$$

Въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ теченіе установившееся, ни p , ни u не зависятъ отъ t , а потому произвольныя функціи должны быть произвольными постоянными. Тогда p выразится такъ:

$$p = (\rho g \sin J + C_1) x + \rho g z \cos J + C_2 \quad . \quad . \quad (7 \text{ bis})$$

и дифференціальное уравненіе, опредѣляющее u , будетъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{C_1}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

