

Ш.Е. Микеладзе

**О численном решении
интегральных уравнений**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ш11

Ш11 **Ш.Е. Микеладзе**
О численном решении интегральных уравнений / Ш.Е. Микеладзе – М.:
Книга по Требованию, 2017. – 46 с.

ISBN 978-5-458-57010-7

ISBN 978-5-458-57010-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2017

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2017

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Пусть M и N соответственно обозначают точную верхнюю границу абсолютных величин:

$$\lambda A_m \bar{K}_{nm} \text{ и } \lambda A_m \bar{\gamma}_m$$

в интервале (a, b) . Обозначим через M_1 положительную постоянную, с таким свойством, что величина

$$\lambda O(h^l)$$

по абсолютному значению в том же интервале была бы меньше $M_1 h^l$. Рассматривая только абсолютные значения, (8) можно переписать так:

$$(1 - hM) |\xi_n| < \delta_0 + hM \sum_{m=0}^{n-1} |\xi_m| + 2N(b-a)\delta_1 + M_1 h^l,$$

причем положили

$$0 < 1 - hM < 1.$$

Полагая последовательно

$$n = 1, 2, 3, \dots, \frac{b-a}{h},$$

убеждаемся, что при всяком значении указателя $r \geq 1$

$$|\xi_r| < \frac{(1 + hM)\delta_0 + 2N(b-a)\delta_1 + M_1 h^l}{(1 - hM)^r}.$$

Для всех этих значений r имеет место неравенство

$$(1 - hM)^{-r} \leq (1 - hM)^{-\frac{b-a}{h}}.$$

Но так как $(1 - hM)^{-\frac{b-a}{h}}$ стремится к своему пределу $e^{M(b-a)}$, постоянно убывая, можно указать такое значение h , что при разблении промежутка (a, b) на равные частичные промежутки числом $i > \frac{b-a}{h}$,

$$(1 - hM)^{-\frac{b-a}{h}} < \gamma,$$

где γ —, не зависящее от i , положительное число. Таким образом наша оценка получает следующий окончательный вид:

$$(9) \quad |\xi_r| < \gamma [(1 + hM)\delta_0 + 2N(b-a)\delta_1 + M_1 h^l],$$

где γ , M , N , M_1 и $b-a$ не зависят ни от h ни от r .

Из неравенства (9) следует, что если δ_0 и δ_1 величны l -го или высшего порядка малости относительно h , точность алгоритма должна быть по крайней мере l -го порядка малости относительно h .

Сверх того, если при неограниченном уменьшении h погрешности δ_0 и δ_1 тоже неограниченно убывают, то правая часть неравенства (9) стремится к нулю; следовательно, погрешность ξ также стремится к нулю и значения $\bar{\varphi}_r$, доставляемые изложенной методой, при $r \rightarrow \infty$ будут совпадать с точными значениями φ_r .

Для приближенного вычисления

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds,$$

с целью получения алгоритмов численного решения интегрального уравнения (1), удобно пользоваться формулами прямоугольников и трапеций. Первая из этих формул будет доставлять результаты с погрешностью, по крайней мере, первого порядка малости относительно h , второй формуле соответствует алгоритм, доставляющий численные значения $\varphi(x)$ с погрешностью не ниже второго порядка малости относительно h .

Более точные результаты доставляются комбинированием формулы Симпсона с формулой трапеции. Погрешность соответствующего алгоритма будет, по крайней мере, третьего порядка малости относительно h .

В последнем случае найдем последовательно:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &\approx f_0, \\ \varphi_1 &\approx \frac{f_1 + \frac{\lambda h}{2} K_{10} \varphi_0}{1 - \frac{\lambda h}{2} K_{11}}, \\ \varphi_2 &\approx \frac{f_2 + \frac{\lambda h}{3} [K_{20} \varphi_0 + 4K_{21} \varphi_1]}{1 - \frac{\lambda h}{3} K_{22}}, \\ \varphi_3 &\approx \frac{f_3 + \frac{\lambda h}{3} [K_{30} \varphi_0 + 4K_{31} \varphi_1 + \frac{5}{2} K_{32} \varphi_2]}{1 - \frac{\lambda h}{2} K_{33}}, \\ \varphi_4 &\approx \frac{f_4 + \frac{\lambda h}{3} [K_{40} \varphi_0 + 4K_{41} \varphi_1 + 2K_{42} \varphi_2 + 4K_{43} \varphi_3]}{1 - \frac{\lambda h}{3} K_{44}},\end{aligned}$$

Следует заметить, что численное решение интегрального уравнения Вольterra второго рода сильно упрощается для специальных ядер вида:

$$(10) \quad K(x, s) = K(x - s),$$

когда $K(x, x) = 0$.

Предыдущие формулы для этого случая принимают вид:

$$\varphi_0 \approx f_0,$$

$$\varphi_1 \approx f_1 + \frac{\lambda h}{2} K_{10} \varphi_0,$$

$$\varphi_2 \approx f_2 + \frac{\lambda h}{3} [K_{20} \varphi_0 + 4K_{21} \varphi_1],$$

В случае специальных ядер вида (10) особенно удобно строить алгоритмы с помощью формулы Эйлера-Маклорена:

$$(11) \quad \int_a^b y(x) dx = h \left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right] -$$

$$- B_2 \frac{h^2}{2!} [y'(b) - y'(a)] - B_4 \frac{h^4}{4!} [y'''(b) - y'''(a)] - \dots -$$

$$- B_{2r-2} \frac{h^{2r-2}}{(2r-2)!} [y^{(2r-3)}(b) - y^{(2r-3)}(a)] + R,$$

где

$$R = -B_{2r} \frac{(b-a) h^{2r}}{(2r)!} y^{(2r)}(\xi),$$

$$\xi = a + \vartheta(b-a) \quad 0 < \vartheta < 1$$

a $B_2, B_4, \dots$ числа Бернулли. Формула Эйлера-Маклорена может служить для построения алгоритмов, доставляющих решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода с довольно высокой степенью точности. Построению подобных алгоритмов уделяем 4-й параграф.

§ 3. О численном решении линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x),$$

где

$$a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x) \text{ и } f(x)$$

— непрерывные функции в интервале

$$x_0 \leq x \leq a.$$

Для определения интеграла, принимающего значения

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

при $x = x_0$, как было уже сказано выше, должно быть численно решено интегральное уравнение:

$$(12) \quad \begin{aligned} y^{(n)}(x) = f(x) - \int_{x_0}^x \sum_{\mu=1}^n a_{\mu}(x) \frac{(x-s)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} y^{(n)}(s) ds - \\ - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^{\mu} y_0^{(n-\nu)} a_{\mu}(x) \frac{(x-x_0)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}. \end{aligned}$$

Итак мы полагаем, что решение интегрального уравнения (12) исполнено при посредстве соответствующе выбранного алгоритма. Если погрешность алгоритма l -го порядка малости относительно h , то согласно результатам, полученным в предыдущем параграфе, численные значения $y^{(n)}$ во всех точках интересующего нас интервала получим с погрешностью не ниже l -го порядка малости относительно h .

Значения $y^{(n)}$ позволяют вычислить численные значения

$$y, y', \dots, y^{(n-1)},$$

с помощью формулы:

$$y^{(n-\mu)}(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} y^{(n)}(s) ds + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{(x-x_0)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!} y_0^{(n-\nu)} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

В самом деле, предположим, что промежуток (x_0, a) разбит на

$$\frac{a-x_0}{h}$$

равных частей, пусть будут

$$y_i, y_i', \dots, y_i^{(n)}$$

соответствующие значения

$$y, y', \dots, y^{(n)}$$

в точках деления, тогда при помощи какой-нибудь формулы приближенного вычисления определенных интегралов, с равноотстоящими ординатами, получается

$$(13) \quad y_i^{(n-\mu)} = h \sum_{m=0}^i A_m \frac{[(i-m)h]^{\mu-1}}{(\mu-1)!} y_m^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{(ih)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!} y_0^{(n-\nu)} + O(h^l) \quad (i \geq 1),$$

где $O(h^l)$ — погрешность выбранной приближенной формулы.

Пусть будут

$$Y_0^{(n-\mu)}, Y_1^{(n-\mu)}, \dots, Y_m^{(n-\mu)}, \dots$$

соответственно обозначать приближенные значения

$$y_0^{(n-\mu)}, y_1^{(n-\mu)}, \dots, y_m^{(n-\mu)}, \dots$$

а

$$\eta_{0, n-\mu}, \eta_{1, n-\mu}, \dots, \eta_{m, n-\mu}, \dots$$

— погрешности. Следовательно для всякого значения числа m мы имеем:

$$y_m^{(n-\mu)} = Y_m^{(n-\mu)} + \eta_{m, n-\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n).$$

Обозначим через $Y_m^{(n)}$ приближенное значение $y_m^{(n)}$. Предположим теперь, что имеем вычисленные значения $Y_m^{(n)}$. Мы можем написать:

$$y_m^{(n)} = Y_m^{(n)} + \xi_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, i)$$

где ξ_m — погрешность.

Пренебрегая величиной $O(h^l)$, получаем формулу:

$$Y_i^{(n-\mu)} = h \sum_{m=0}^i \frac{A_m [(i-m)h]^{\mu-1}}{(\mu-1)!} Y_m^{(n)} + \sum_{v=1}^{\mu} \frac{(ih)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} Y_0^{(n-v)}, \quad (14)$$

($\mu = 1, 2, \dots, n; i \geq 1$),

которая доставляет приближенные значения $y_i^{(n-\mu)}$.

Вычитая (14) из (13), мы получим:

$$(15) \quad \eta_{i, n-\mu} = h \sum_{m=0}^i \frac{A_m [(i-m)h]^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \xi_m + \sum_{v=1}^{\mu} \frac{(ih)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} \eta_{0, n-v} + O(h^l).$$

Пусть δ_1 обозначает высший предел абсолютных значений погрешностей:

$$\eta_{0,0}, \eta_{01}, \dots, \eta_{0, n-1}.$$

Пусть, далее, δ_1 — величина l -го порядка малости относительно h .

Обозначим через A максимальное абсолютное значение A_m , а через M_2 — положительную постоянную с таким свойством, что величина

$$O(h^l)$$

по абсолютному значению была бы меньше $M_2 h^l$ в интервале интегрирования.

Полагая $i = 1, 2, \dots$ и рассматривая только абсолютные значения, (15) можно переписать так:

$$(16) \quad |\eta_{i, n-\mu}| < \frac{2A(a-x_0)^\mu}{(\mu-1)!} \delta_0 + e^{a-x_0} \delta_1 + M_2 h^l,$$

где указатель $i \geq 1$, δ_0 — предельная абсолютная погрешность чисел $Y_m^{(n)}$, а A , $a-x_0$ и M_2 — определенные положительные числа не зависящие ни от h ни от i .

Неравенство (16) показывает, что если наибольшая ошибка алгоритма доставляющего значения $y^{(n)}$ l -го или высшего порядка малости относительно h , то чтобы значения

$$y_i^{(n-\mu)} \quad \left(i = 1, 2, \dots, \frac{a-x_0}{h} \right)$$

доставлялись с такой же ошибкой, необходимо пользоваться формулой приближенного вычисления определенного интеграла с погрешностью l -го порядка малости относительно h , и тогда наибольшая ошибка значений

$$Y_i^{(n-\mu)} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n),$$

будет, по крайней мере, l -го порядка малости относительно h .

Из самого способа, которым определялись значения

$$y_i^{(n-\mu)} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n),$$

с очевидностью вытекает, что эти значения вычисляются у нас с самого начала посредством ряда определенных формул. Вычисление $y_1^{(n-\mu)}$ исполняется в точности таким же способом, как и всякого другого значения $y_i^{(n-\mu)}$ в середине и в конце вычисления. Следовательно, мы избегаем разложения $y^{(n-\mu)}$ в степенной ряд¹ для определения нескольких значений

$$y_1^{(n-\mu)}, y_2^{(n-\mu)}, \dots, y_k^{(n-\mu)},$$

необходимых, например, для начала вычислительной схемы по способу Штёрмера, что очень существенно в том случае, когда функции

$$(17) \quad a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$$

не аналитические.

Сверх того, так как наш способ численного интегрирования дифференциальных уравнений не требует дифференцирования функций (17), то эти функции могут быть заданы таблично или графически, что в приложениях часто случается.

Для пояснения излагаемой методы рассмотрим пример. Пусть ищется частный интеграл дифференциального уравнения

$$(18) \quad y'' + xy' = 0,$$

удовлетворяющий начальным условиям: при $x = 0$ должно быть

$$y_0 = 0, y'_0 = 0.79790.$$

Интегрирование будем вести при ступени $h = 0.1$.

¹ Если не пользоваться последовательными приближениями.

Дифференциальное уравнение (18) с заданными начальными условиями, очевидно, может быть заменено следующим интегральным уравнением:

$$(19) \quad y'(x) = y'_0 - \int_0^x sy'(s) ds.$$

Решая полученное интегральное уравнение с помощью формулы Симпсона, комбинированной со способом трапеций, находим численные значения

$$y'(0.1), y'(0.2), \dots, y'(1).$$

Затем, вычисляем шаг за шагом,

$$y(0.1), y(0.2), \dots, y(1)$$

с помощью формулы:

$$y(x) = \int_0^x y'(s) ds,$$

которая доставляет достаточно точный результат, если пользоваться формулой Симпсона, комбинированной со способом трапеций. Приходим окончательно к таблице:

x	y'		y	
	по ряду	приближенное	по ряду	приближенное
0	0.79790		0	
0.1	0.79392	0.79393	0.07966	0.07959
0.2	0.78210	0.78210	0.15852	0.15852
0.3	0.76279	0.76284	0.23583	0.23577
0.4	0.73655	0.73655	0.31085	0.31086
0.5	0.70414	0.70422	0.38293	0.38290
0.6	0.66646	0.66645	0.45150	0.45152
0.7	0.62452	0.62460	0.51606	0.51607
0.8	0.57940	0.57938	0.57630	0.57633
0.9	0.53218	0.53225	0.63189	0.63191
1.0	0.48395	0.48393	0.68270	0.68274

Точные значения y' легко получить решением интегрального уравнения (19):

$$y' = y'_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2!2^2} - \frac{x^6}{3!2^3} + \frac{x^8}{4!2^4} - \dots \right],$$

а интегрированием этого ряда имеем:

$$y = y'_0 \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - \frac{x^{11}}{42240} + \frac{x^{13}}{599040} - \dots \right].$$

§ 4. О численном решении нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Перейдем теперь к общему случаю. Мы займемся уравнением общего вида:

$$(20) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Поставим себе целью найти интеграл, определяемый начальными условиями: при $x = x_0$ должно быть

$$(21) \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Для решения данного уравнения мы укажем на простой алгоритм, в основу построения которого лежит правило прямоугольников, причем вычисления корней каких-либо уравнений не потребуются. Алгоритм этот удобен, когда не требуется большой точности.

Ниже мы займемся решением дифференциального уравнения

$$(22) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) \quad (n \geq 2)$$

и укажем на возможность построения алгоритмов, доставляющих численные значения интеграла уравнения (22), определяемого начальными значениями (21), с достаточно высокой степенью точности без вычисления корней каких-либо уравнений.

Пусть функция

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})$$

остается непрерывной для любой системы значений переменных $x, y, y', \dots, y^{(n-2)}$ в области D , для $x_0 \leq x \leq a$, и допускает частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}},$$

которые при тех же условиях остаются ограниченными.

При посредстве соответствующе выбранной формулы механических квадратур получается:

$$(23) \quad y_i^{(n-\mu)} = h \sum_{m=0}^{i-1} A_m \frac{[(i-m)h]^{\mu-1}}{(\mu-1)!} y_m^{(n)} + \sum_{v=1}^{\mu} \frac{(ih)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} y_0^{(n-v)} + O(h^l),$$

($\mu = 2, 3, \dots, n; i \geq 1$)

где $O(h^l)$ — погрешность формулы механических квадратур.

Пусть будут

$$Y_0^{(n-\mu)}, \quad Y_1^{(n-\mu)}, \dots, \quad Y_i^{(n-\mu)}, \dots \quad (\mu = 2, 3, \dots, n)$$

соответственно обозначать приближенные значения

$$y_0^{(n-\mu)}, \quad y_1^{(n-\mu)}, \dots, \quad y_i^{(n-\mu)}, \dots$$

а

$$\eta_{0, n-\mu}, \eta_{1, n-\mu}, \dots, \eta_{i, n-\mu}, \dots$$

— погрешности. Следовательно для всякого значения числа i мы имеем:

$$y_i^{(n-\mu)} = Y_i^{(n-\mu)} + \eta_{i, n-\mu} \quad (\mu = 2, 3, \dots, n).$$

Пренебрегая величиной $O(h^l)$ получаем формулу:

$$(24) \quad Y_i^{(n-\mu)} = h \sum_{m=0}^{i-1} A_m \frac{[(i-m)h]^{\mu-1}}{(\mu-1)!} Y_m^{(n)} + \sum_{v=1}^{\mu} \frac{(ih)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} Y_0^{(n-v)} \\ (\mu = 2, 3, \dots, n; i \geq 1),$$

которая доставляет приближенные значения $Y_i^{(n-\mu)}$.

Пусть $Y_i^{(n)}$ обозначает приближенное значение $y_i^{(n)}$, а ξ_i соответствующую погрешность. Мы можем написать

$$y_i^{(n)} = Y_i^{(n)} + \xi_i.$$

Для всякого целого $i \geq 0$ мы имеем:

$$(25) \quad Y_i^{(n)} \approx f(x_i, Y_i, Y_i', \dots, Y_i^{(n-2)}).$$

Вычитая (25) из (22) и применяя формулу конечных приращений, мы найдем:

$$\xi_i = f(x_i, y_i, y_i', \dots, y_i^{(n-2)}) - f(x_i, Y_i, Y_i', \dots, Y_i^{(n-2)}) = \\ = \sum_{\mu=2}^n \eta_{i, n-\mu} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-\mu)}} \bigg|_{y^{(n-\mu)} = \bar{y}_i^{(n-\mu)}},$$

где $\bar{y}_i^{(n-\mu)}$ есть число, заключенное между $y_i^{(n-\mu)}$ и $Y_i^{(n-\mu)}$.

Обозначим через $M_{n-\mu}$ ($\mu = 2, 3, \dots, n$) максимум выражения

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y^{(n-\mu)}} \right|$$

в промежутке (x_0, l) ,

Пусть, далее, M — наибольшая из постоянных $M_{n-\mu}$. Тогда для всякого значения числа i мы имеем:

$$(26) \quad |\xi_i| \leq M \sum_{\mu=2}^n |\eta_{i, n-\mu}|.$$

С другой стороны вычитая (24) из (23), мы найдем:

$$\eta_{i, n-\mu} = h \sum_{m=0}^{i-1} A_m \frac{[(i-m)h]^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \xi_m + \sum_{v=1}^{\mu} \frac{(ih)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} \eta_{0, n-v} + O(h^l).$$

Пусть A — постоянная, удовлетворяющая условию:

$$|A_i| \leq A \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{a-x_0}{h}\right).$$

Обозначим через δ_0 предельную абсолютную погрешность начальных значений:

$$y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}.$$

Пусть еще M_1 положительная постоянная, с таким свойством, что величина $O(h^l)$ по абсолютному значению была бы меньше

$$M_1 h^l$$

в интересующем нас интервале.

Для всякого значения числа i , рассматривая только абсолютные значения, мы имеем:

$$|\eta_{i, n-\mu}| < Ah \frac{(a-x_0)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \sum_{m=0}^{i-1} |\xi_m| + \delta_0 \sum_{v=1}^n \frac{(a-x_0)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} + M_1 h^l.$$

Это неравенство с помощью (26) можно заменить неравенством:

$$|\eta_{i, n-\mu}| < AMh \frac{(a-x_0)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{\mu=2}^n |\eta_{m, n-\mu}| + \delta_0 \sum_{v=1}^n \frac{(a-x_0)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} + M_1 h^l.$$

Положив для сокращения письма

$$AM \frac{(a-x_0)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} = \frac{N}{n-1}, \quad M_1 h^l + \delta_0 \sum_{v=1}^n \frac{(a-x_0)^{\mu-v}}{(\mu-v)!} = \tau,$$

мы можем написать:

$$|\eta_{i, n-\mu}| < \frac{hN}{n-1} \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{\mu=2}^n |\eta_{m, n-\mu}| + \tau \quad (\mu = 2, 3, \dots, n).$$

Полагая последовательно $i = 1, 2, \dots$

мы убеждаемся, что:

$$|\eta_{i, n-\mu}| < (\tau + hN\delta_0)(1 + hN)^{i-1},$$

где указатель $i \geq 1$.

Для всех этих значений i имеет место неравенство:

$$(1 + hN)^{i-1} < (1 + hN)^i < e^{(a-x_0)N},$$

и, следовательно,

$$(27) \quad |\eta_{i, n-\mu}| < e^{(a-x_0)N} (\tau + hN\delta_0).$$

Если предположить, что ошибки значений начальных не ниже l -го порядка малости относительно h , то и τ будет величиной l -го порядка малости относительно h . В силу предположения окончательно приходим к следующей оценке:

$$|\eta_{i, n-\mu}| < \gamma h^l \quad (\mu = 2, 3, \dots, n; i \geq 1),$$