

Ш.Ж. Валле-Пуссен

**Курс анализа бесконечно
малых**

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ш11

Ш11 **Ш.Ж. Валле-Пуссен**
Курс анализа бесконечно малых: Том 1 / Ш.Ж. Валле-Пуссен – М.: Книга по Требованию, 2021. – 494 с.

ISBN 978-5-458-25164-8

Одно из первых изданий в нашей стране книги знаменитого математика. Названия различных математических терминов пишется латиницей, есть даже апостроф в словах. Книга посвящена дифференцированию явных функций одной независимой переменной, формуле Тейлора, функциям нескольких переменных, неопределенным интегралам и др.

ISBN 978-5-458-25164-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

От редактора и переводчиков.

Предлагаемый здесь перевод I тома Курса анализа безконечно малых de la Vallée-Poussin'a выполнен с III французского издания; при этом Введение и главы VI, VII, X и XI переведены проф. Г. М. Фиктенгольцем, а главы I—V, VIII и IX—проф. Я. Д. Тамаркиным. Перевод в нескольких местах снабжен примечаниями переводчиков, раз'ясняющими и дополняющими текст.

При переводе допущены некоторые отступления от оригинала. Важнейшее из них состоит в том, что в I-й том перенесен из II-го ряд nn° , относящихся, главным образом, к так называемым несобственным интегралам (nn° 226, 233—243). В оригинале в I-м томе рассматриваются несобственные интегралы и некоторые из таких интегралов даже вычисляются, но без проверки самого существования их; признаки существования несобственных интегралов изложены автором во II-м томе. Это обстоятельство могло представить некоторые затруднения для читателя I-го тома русского перевода, не имеющего под руками II-го тома, за выход которого вскоре вслед за I-м при настоящих условиях нельзя ручаться.

Далее, существенное уклонение от оригинала представляет изложение вопроса о замене переменной в интегралах Lebesgue'a. Основная теорема, сюда относящаяся, была высказана автором в оригинале при слишком общих условиях, при которых она неверна. В мемуаре «Sur l'intégrale de Lebesgue», опубликованном автором в 1916 г. в Transactions of the American Mathematical Society, он дал совершенно новое изложение вопроса, но, хотя результаты, формулированные им, действительно, верны, самое рассуждение его содержит погрешность, неустранимую при сохранении порядка идей автора. Переводчик, сохранив результаты упомянутого мемуара, старался в доказательстве их возможно ближе держаться первоначального изложения, данного автором в I-м томе, устранив, конечно, содержащуюся там ошибку.

VIII

Упомянем еще о н° 253, содержащем обобщение теоремы о замене переменной для интегралов Riemann'a (он взят из II-го франц. изд I-го тома), и о наново написанном н° 254, в котором изложено известное обобщение формулы интегрирования по частям (для интегралов Riemann'a), необходимое в теории тригонометрических рядов (если не оперировать интегралами Lebesgue'a и оставаться в области классического анализа).

Другие отступления от оригинала представляют в большинстве случаев либо незначительные изменения текста, восполняющие случайные пробелы в изложении автора, либо более подробное развитие некоторых основных предложений.

Мысль об издании перевода книги de la Vallée-Poussin'a возникла уже давно, но осуществить издание оказалась возможным лишь теперь через «Научное книгоиздательство», которому удалось преодолеть значительные затруднения, связанные в настоящее время с печатанием вообще, а математических сочинений в особенности, что должно признать несомненной его заслугой.

В. А. Стеклов.

Я. Д. Тамиркин.

Г. М. Фихтенгольц.

10. VIII. 1922 г.

Том первый.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Вещественные числа.

1. Рациональные числа. Числа целые и дробные, положительные и отрицательные, включая и нуль, образуют *совокупность рациональных чисел*. Мы будем предполагать, что читатель знаком с наиболее элементарными свойствами этих чисел и умеет выполнять четыре основные арифметические действия над ними. Напомним, однако, о следующих свойствах:

1°. Совокупность рациональных чисел *расположена*, т. е. из двух различных рациональных чисел a и b одно больше другого и, в то же время, второе меньше первого; если, напр., b больше a (a меньше b), то пишут

$$b > a, \text{ или } a < b.$$

Понятие о порядке, выражаемое этим соотношением, сводится к тому свойству знака неравенства, что, если $a < b$ и $b < c$, то также и $a < c$.

2°. Между двумя различными рациональными числами a и b всегда можно вставить бесконечное множество отличных от них чисел, которые $>$ одного и $<$ другого. Совокупность чисел, обладающую этим свойством, называют *плотной* (ensemble dense), а самое свойство называют *плотностью* (densité).

2. Иррациональные числа. Введение иррациональных чисел основывается на следующих соображениях:

Предположим, что по какому-нибудь правилу (мы укажем ниже примеры таких правил) все рациональные числа разделены на два класса, нижний класс A и верхний класс B , такого рода, что любое число a первого класса $<$ любого числа b второго класса. Такое разделение наз. *сечением* (coupure). Когда оно произведено, то прежде всего ясно, что если a есть число класса A , то к тому же классу принадлежит и любое число $< a$, если же b принадлежит классу B , то и любое число $> b$ принадлежит классу B . Установив это, мы утверждаем, что могут представиться три случая:

1°. Нижний класс А содержит число m , большее всех других чисел того же класса, так что каждое число $< m$ принадлежит классу А, а каждое число $> m$ относится к классу В. Число m , таким образом, отделяет класс А от класса В, и мы его назовем *пограничным числом* этих классов.

2°. Верхний класс В содержит число m , меньшее всех других чисел того же класса. В этом случае также m является *пограничным числом* для двух классов: каждое число $< m$ принадлежит классу А, а каждое число $> m$ — классу В.

Эти первые два случая взаимно исключают друг друга, ибо, если бы существовали два различных пограничных числа m и m' , то все числа, содержащиеся между m и m' , должны были бы одновременно принадлежать обоим классам, что противоречило бы определению этих классов. Итак, если есть наибольшее число в классе А, то нет наименьшего в классе В, и наоборот.

Каждый из этих двух случаев легко осуществить. Достаточно, взяв по произволу число m , отнести числа $< m$ к классу А, а числа $> m$ к классу В. Само число m можно поместить в любой из этих классов. Таким образом получается, по желанию, первый или второй из рассмотренных нами двух случаев. В обоих случаях мы будем говорить, что число m определяет сечение (А, В), и что это сечение рационально.

3°. Наконец, может случиться, что нет ни наибольшего числа в классе А, ни наименьшего в классе В. Весьма простые примеры приводят к такого рода сечению. Пусть, напр., m есть рациональное положительное число, не представляющее полного квадрата; все рациональные числа можно распределить на два класса А и В, относя к классу А все отрицательные и такие положительные числа, квадрат которых $< m$, а к классу В положительные числа, квадрат которых $> m$. В классе А нет наибольшего числа, ибо, какое бы ни взять число a , квадрат которого $< m$, всегда можно найти большее число с таким же свойством, извлекая приближенный квадратный корень из m по недостатку с настолько большим числом десятичных знаков, чтобы квадрат этого корня был ближе к m , чем a^2 . Аналогичным образом убеждаемся, что не существует наименьшего числа в классе В.

Когда имеет место это обстоятельство, мы будем говорить, что сечение *иррационально*; в этом случае нет пограничного числа, отделяющего числа двух классов, ибо таким числом могло бы быть лишь наибольшее из чисел класса А или наименьшее из чисел класса В. Мы создаем тогда новый символ, напр., $\sqrt{2}$, π , ...

определяемый тем условием, что он $>$ каждого числа класса A и $<$ каждого числа класса B , и этот новый элемент, вставляемый между рациональными числами, мы будем называть *иррациональным числом*.

Совокупность иррациональных чисел соответствует всем возможным иррациональным сечениям. Каждое иррациональное число определяется сечением (A, B) , которое ему соответствует, и впредь мы можем обозначать его одной буквой, как и рациональное число.

Если иррациональное число α содержится между двумя рациональными числами a и b , разность которых не превосходит положительной дроби ε , то эти числа называются *приближенными значениями* α по недостатку и по избытку с точностью до ε . Если определено иррациональное число α , то всегда можно найти сколь угодно близкие к нему рациональные приближенные значения, что вытекает из следующей теоремы:

Пусть иррациональное число α определено сечением (A, B) ; каково бы ни было положительное рациональное число ε , можно найти в классах A и B , соответственно, числа a и b , разность которых была бы равна ε .

Действительно, если a_1 есть число класса A , прогрессия

$$a_1, a_1 + \varepsilon, a_1 + 2\varepsilon, a_1 + 3\varepsilon, \dots,$$

безгранично возрастающая, содержит числа класса B ; пусть первым из них будет $a_1 + n\varepsilon = b$. Тогда предшествующее число $a = a_1 + (n - 1)\varepsilon$ будет принадлежать классу A . Эти два числа a и b удовлетворяют условиям теоремы.

3. Вещественные числа. Числа рациональные и иррациональные образуют совокупность *вещественных чисел*.

Для того, чтобы ее *расположить*, необходимо установить между ее элементами соотношения величины. Это достаточно сделать лишь для иррациональных чисел.

Пусть α — иррациональное число, определяемое сечением (A, B) ; иррациональное число α' будет равно α , если оно определяется тем же сечением, т. е. если оно больше всех чисел класса A и меньше всех чисел класса B ; но α' будет *отлично* от α , если существует рациональное число, содержащееся между ними. При этом $\alpha' > \alpha$, если $\alpha' >$ какого-либо числа из класса B , и $\alpha' < \alpha$, если $\alpha' <$ какого-либо числа из класса A *).

*) Легко видеть, что и для вещественных чисел из неравенств $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ всегда следует, что и $\alpha < \gamma$.

Следующая теорема доказывает, что совокупность вещественных чисел также обладает *плотностью*:

I. *Между двумя различными числами всегда можно вставить рациональное число, а следовательно и бесконечное множество их.*

Если оба числа иррациональны, то теорема совпадает с самим определением неравенства. Если одно из чисел иррационально и определяется сечением (A, B) , между тем, как другое рационально, последнее принадлежит либо классу A , либо классу B , но не может быть ни наибольшим в A , ни наименьшим в B , так что заключение остается в силе. Наконец, для случая, когда оба числа рациональны, мы преположили теорему известной (n^0 1, 2^o).

Совокупность вещественных чисел обладает одним свойством, которого не имеет совокупность рациональных чисел; это свойство выражается следующей теоремой:

II. *Если по какому-нибудь правилу произведено сечение, (A, B) совокупности вещественных чисел, т. е. если эти числа разделены на два класса таким образом, что каждое число первого класса $<$ каждого числа второго, то необходимо существует рациональное или иррациональное пограничное число m , определяющее сечение, так что каждое число, меньшее m , принадлежит классу A , каждое же число, большее m , принадлежит классу B .*

В самом деле, пусть m будет тем рациональным или иррациональным числом, которое служит границей для рациональных чисел, содержащихся, соответственно, в классе A и в классе B . Каждое рациональное число, большее m , принадлежит классу B , а меньшее m — классу A . Остается показать, что это заключение сохраняется и для иррационального числа.

Но это непосредственно очевидно, ибо если иррациональное число больше m , то оно больше бесконечного множества рациональных чисел, больших m и, следовательно, принадлежащих классу B , так что оно *a fortiori* принадлежит классу B ; иррациональное же число, меньшее m , меньше бесконечного множества рациональных чисел, меньших m , и вместе с ними содержится в классе A .

Предшествующие исследования не дают еще полного математического определения иррациональных чисел; к ним надлежит присоединить еще определения четырех основных арифметических действий.

4. Симметричные вещественные числа. Для рационального числа мы называем симметричным ему то же число с измененным знаком. Определение можно обобщить и на случай иррационального числа. Пусть α — иррациональное число, определяемое сечением (A, B) ; обозначим через $-B$ класс, составленный из чисел, симметричных числам класса B , а через $-A$ класс чисел, симметричных числам класса A : так как каждое рациональное число является симметричным для некоторого рационального числа, и каждое число класса $-B <$ каждого числа класса $-A$, то сечение $(-B, -A)$ определяет иррациональное число, которое мы обозначим через $-\alpha$ и будем называть симметричным относительно α . Согласно этому определению, мы имеем также $-(-\alpha) = \alpha$.

5. Положительные и отрицательные числа. Абсолютная величина. Положительными числами являются те, которые > 0 и, следовательно, $>$ бесконечного множества положительных же рациональных чисел. Отрицательными числами называются числа, которые < 0 и, таким образом, $<$ бесконечного множества отрицательных рациональных чисел. Число, симметричное отрицательному числу, будет положительным. То из двух чисел α и $-\alpha$, которое является положительным, называется абсолютной величиной α и обозначается через $|\alpha|$.

6. Обратные вещественные числа. Пусть число α отлично от нуля; если оно рационально, обратным ему будет число $\frac{1}{\alpha}$, или $1 : \alpha$. Предположим α иррациональным, тогда α делит все рациональные числа одинакового с ним знака на два класса A и B , знания которых, очевидно, достаточно для его определения. Обозначим через B^{-1} класс чисел, обратных числам класса B , а через A^{-1} — класс чисел, обратных числам A . Так как каждое рациональное число, отличное от нуля, является обратным для некоторого рационального же числа, сечение (B^{-1}, A^{-1}) всех рациональных чисел одного знака с α на два класса определяет иррациональное число того же знака, которое мы обозначим через $\frac{1}{\alpha}$, или $1 : \alpha$ и будем называть обратным числу α .

7. Сложение. Пусть α и α' два каких-нибудь вещественных числа. Обозначим через a и a' , b и b' рациональные числа, удовлетворяющие условиям

$$a < \alpha < b, \quad a' < \alpha' < b'.$$

Все числа вида $a + a' <$ чисел вида $b + b'$. Сверх того, можно предположить ($n^\circ 2$) значения a и b настолько близкими к α ,

значения же a' и b' настолько близкими к a' , чтобы разности $b - a$, $b' - a'$, а следовательно и $(b + b') - (a + a')$, были сколь угодно малы.

Докажем, что существует одно и только одно вещественное число α'' , которое $>$ каждого числа вида $a + a'$ и $<$ каждого числа вида $b + b'$, и для которого обе эти суммы служат приближенными значениями по недостатку и по избытку с произвольной степенью точности. Это число α'' называется *суммой* чисел a и a' и обозначается через $\alpha + \alpha'$.

Действительно, рассмотрим сечение (A, B) со совокупности вещественных чисел, где B содержит числа, превосходящие все числа вида $a + a'$, а A все остальные числа. В частности, все числа вида $a + a'$ принадлежат классу A, все же числа вида $b + b'$ классу B. Так как среди чисел вида $a + a'$ нет наибольшего, равно как среди чисел вида $b + b'$ нет наименьшего, то пограничное число α'' двух классов A и B будет больше первых и меньше последних чисел. Остается только показать, что число, обладающее этим свойством, единственно. С этой целью заметим, что если бы существовали два постоянных числа, всегда больших чисел $a + a'$ и меньших чисел $b + b'$, можно было бы найти два рациональных числа r и r' , содержащихся между этими постоянными числами и обладающих тем же свойством. Но это невозможно, так как разность $(b + b') - (a + a')$ можно предположить меньшей, чем $r' - r$.

Это определение (закрывающее, как частный случай, определение сложения рациональных чисел) позволяет непосредственно удостовериться в том, что и для вещественных вообще (как рациональных, так и иррациональных) чисел сохраняются переместительное и сочетательное свойства сложения, выражаемые равенствами

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha' &= \alpha' + \alpha, \\ (\alpha + \alpha') + \alpha'' &= \alpha + (\alpha' + \alpha''),\end{aligned}$$

равно как и свойства

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad \alpha + (-\alpha) = 0,$$

и, наконец, что абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин всех слагаемых.

8. Умножение. Пусть α и α' два положительных числа; обозначим через a и b , a' и b' произвольные рациональные положительные числа, подчиненные неравенствам

$$a < \alpha < b, \quad a' < \alpha' < b'.$$