А. Я. Хинчин

Основные законы теории вероятностей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
А11

А. Я. Хинчин
А11 Основные законы теории вероятностей / А. Я. Хинчин – М.: Книга по Требованию, 2014. – 84 с.

ISBN 978-5-458-28929-0

До самых последних лет в Европе господствовал взгляд на теорию вероятностей как на науку, хотя во многих отношениях важную и полезную, но в то же время в чисто математическом отношении вряд ли способную поставить нам сколько-нибудь интересные общие проблемы. Этим объясняется то, что большая часть посвященной теории вероятностей литературы занимается отдельными, весьма частного характера задачами, как это всегда было свойственно всякой дисциплине, покуда она не выковывала своего метода и не создавала целостной теории. В сущности только в России взгляд на теорию вероятностей как на серьезную математическую дисциплину установился уже в середине прошлого столетия; в Германии только сейчас начинают приходить к этому взгляду, и этим объясняется то, что немецкие работы последних лет так пестрят цитатами из русских авторов.В основу предлагаемой монографии положен специальный курс, читанный мною в 1926 г. в Московском университете. Основною задачею этого курса было пробудить чисто математический интерес к основным и наиболее общим проблемам теории вероятностей, показать заложенные в этих проблемах возможности и вместе с тем возможно рельефнее подчеркнуть то, что часто у нас забывают: что теория вероятностей имеет целостный метод, глубоко связанный с методами современной теории функций, и что поэтому большая часть новых идей современного математического анализа и в теории вероятностей находит себе глубокое и плодотворное применение.

ISBN 978-5-458-28929-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ.

Во всей этой книге является основным понятие ***ряда случайных величин***

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Величину x_n мы называем случайной величиной, если ее значение зависит от случая. Случайная величина является определенной (данной, заданной), если известны все те значения

$$x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}, \ldots,\ x_n^{(i)}, \ldots,$$

которые она может принимать, и если, сверх того, известна для каждого i вероятность $p_n^{(i)}$ равенства

$$x_n = x_n^{(i)}.$$

Ясно, что

$$\sum_i p_n^{(i)} = 1.$$

Ряд значений, принимаемых данной случайной величиной, может быть конечным или бесконечным. В последнем случае он может оказаться либо счетным, либо несчетным; несчетный ряд значений, конечно, нашей схемой обозначений не охватывается, да и рядом может быть назван только условно. В этой книге мы почти всегда предполагаем этот ряд конечным или счетным; разумеется, это делается только в целях единства математического аппарата; хорошо известно, что исследование случая несчетного ряда не вносит (по крайней мере, в большинстве случаев) никаких принципиальных затруднений, но требует замены всех встречающихся сумм интегралами. Правда, мы имеем аналитический аппарат (интеграл Stieltjes'a), способный охватить оба основных случая (дискретного и континуального распределения). Но автору, естественно, не хотелось затруднять читателя техническими осложнениями, вводя мало привычный ему аналитический аппарат и тем самым отвлекая его внимание и силы от принципиальной стороны дела, которая должна стоять на первом месте.

Величину

$$\sum_i x_n^{(i)} p_n^{(i)} = a_n$$

называют *математическим ожиданием* случайной величины x_n.

Величину

$$\sum_i [x_n^{(i)} - a_n]^k p_n^{(i)},$$

мы будем называть *моментом* порядка k случайной величины x_n, предполагая при этом k целым положительным числом. Очевидно, что для всякой случайной величины момент первого порядка равен нулю. Момент второго порядка, играющий особо важную роль, мы для величины x_n будем обозначать через b_n.

Величину

$$d_n^{(\delta)} = \sum_i |x_n^{(i)} - a_n|^\delta p_n^{(i)}$$

мы условимся называть *абсолютным моментом* порядка δ величины x_n; при этом δ предполагается произвольным положительным числом.

Ясно, что

$$d_n^{(2)} = b_n.$$

Во всех указанных случаях суммирование производится по всем значениям индекса i. Если при этом некоторые из встречающихся сумм оказываются бесконечными рядами, то все такие ряды предполагаются абсолютно сходящимися.

Вероятность какого-либо соотношения мы будем обозначать буквою W, помещая за нею в скобках то соотношение, о котором идет речь. Например, вероятность соотношения

$$|x_n| > a$$

мы обозначаем через

$$W\{|x_n| > a\}.$$

Указанные здесь обозначения мы сохраняем на протяжении всей книги.

I. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Важнейшие и вместе с тем наиболее разработанные области проблем, касающихся рядов случайных величин, связаны с оценкою разности

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

между суммою n первых величин ряда и суммою их математических ожиданий. В ряду этих проблем одно из первых мест занимает оценка вероятности неравенств

$$z_1 \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} b_i} < \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) < z_2 \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} b_i}, \tag{1}$$

где b_i, как всегда, означает момент второго порядка величины x_i, а z_1 и z_2 — какие угодно действительные числа, подчиненные условию $z_1 < z_2$. Дело в том, что вероятность эта во многих случаях приближенно выражается очень простым и независящим от n интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-x^2}\, dx,$$

причем приближение безгранично усиливается при безграничном увеличении числа n взятых случайных величин. В дальнейшем мы будем обозначать упомянутую вероятность через P_n (не забывая, что она зависит вместе с тем от z_1 и z_2), и положим

$$\Delta_n = P_n - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-x^2}\, dx.$$

Утверждение, состоящее в том, что

$$\Delta_n \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

составляет содержание теоремы Лапласа, иногда называемой *предельной теоремой теории вероятностей.*

История этой теоремы в кратких чертах такова: Лапласом был указан частный случай ее, когда все величины данного ряда имеют одинаковое и притом весьма простое определение: x_n может равняться нулю или единице с соответствующими вероятностями q и $p = 1 - q$, независящими от n. Далее, Чебышев пытался распространить теорему на более широкий класс случаев; он предполагал, что теорема Лапласа имеет место всякий раз, когда всевозможные значения всех величин x_n остаются по абсолютному значению меньше некоторого положительного числа. Доказательство не было им доведено до конца, но созданный им метод оказался весьма ценным. Воспользовавшись этим методом, Марков доказал теорему Лапласа для весьма широкого класса случаев, причем обнаружилось, что в тех широких предположениях, с какими подходил к этой теореме Чебышев, она оказалась неверной. Далее, Ляпунов, идя совершенно новым путем, показал справедливость теоремы в предположениях еще более общих, нежели это удалось Маркову. Эти условия Ляпунова являются вместе с тем наиболее широкими, известными до настоящего времени. Вот в чем они состоят: для того чтобы к данному ряду применялась теорема Лапласа, достаточно, чтобы, при подходяще выбранном положительном числе δ, выражение

$$\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} d_i^{(2+\delta)}\right\}^2}{\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i\right\}^{2+\delta}}$$

стремилось к нулю когда n безгранично возрастает.

В дальнейшем мы воспроизведем доказательство Ляпунова, перечислив и доказав предварительно нужные для этого вспомогательные предложения, чтобы придать всему изложению большую полноту и доступность.

После появления работ Ляпунова Маркову удалось остроумным усилением метода Чебышева применить этот метод к доказательству теоремы Лапласа в условиях Ляпунова; таким образом мы имеем в настоящее время два совершенно различных метода для доказательства теоремы Ляпунова. Мы в дальнейшем избираем метод, принадлежащий самому Ляпунову, на том основании, что этот метод позволяет установить *равномерное* относительно z_1 и z_2 стремление к нулю величины Δ_n, и вместе с тем дает весьма точную оценку порядка малости этой величины; и то и другое имеет весьма существенное значение в применениях теоремы Лапласа, в чем мы будем иметь случай убедитьcя в следующей главе.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

Лемма 1. *Если* $x>0$, *то*

$$1-e^{-x}<x.$$

Доказательство. Функция $x-(1-e^{-x})$ при $x>0$ имеет положительную производную, вследствие чего значения ее при $x>0$ превышают ее значение при $x=0$, которое равно нулю.

Лемма 2. *Пусть* $0<\delta\leqq 1$, *и* z — *любое действительное число; тогда*

$$1)\quad \cos z<1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2^\delta}|z|^{2+\delta},$$

$$2)\quad |\sin z-z|<\frac{1}{2}|z|^{2+\delta},$$

$$3)\quad \cos z>1-\frac{1}{2}z^2.$$

Доказательство. Обозначая через θ и θ' числа, заключенные между нулем и единицею, имеем:

$$1)\quad \cos z=1-\frac{z^2}{2}\cos(\theta z)=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{2}(1-\cos\theta z)=$$
$$=1-\frac{z^2}{2}+z^2\sin^2\frac{\theta z}{2},$$

откуда

$$\cos z<1-\frac{z^2}{2}+z^2\min\left\{1,\left|\frac{z}{2}\right|\right\}\leqq 1-\frac{z^2}{2}+z^2\left|\frac{z}{2}\right|^\delta,$$

ч. т. д.

$$2)\quad \sin z=z-\frac{1}{2}z^2\sin\theta' z,$$

откуда

$$|\sin z-z|<\frac{1}{2}z^2\min(1,|z|)\leqq z^2|z|^\delta,$$

ч. т. д.

$$3)\ \frac{1}{2}z^2 = 2\left(\frac{z}{2}\right)^2 > 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z,$$

откуда

$$\cos z > 1 - \frac{1}{2}z^2,$$

ч. т. д.

Лемма 3. *Для всякого действительного числа a*

$$\Phi(a) = \int_0^\infty \frac{\sin 2at}{t} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \int_0^a e^{-x^2} dx.$$

Доказательство. Легко убедиться, что при вычислении производной $\Phi'(a)$ мы можем производить диференцирование под знаком интеграла. Обозначая, вообще, через $R(u)$ действительную часть комплексного числа u, мы будем иметь:

$$\Phi'(a) = 2\int_0^\infty \cos 2at\, e^{-t^2} dt = 2R\left\{e^{-a^2}\int_0^\infty e^{-(t-ai)^2} dt\right\}.$$

Положим

$$J = \int_0^\infty e^{-(t-ai)^2} dt.$$

Здесь интеграция производится вдоль действительной оси, но, применяя теорему Коши, мы без труда убеждаемся, что интеграцию можно вести сперва от нуля до ai по мнимой оси, а затем от ai до $\infty + ai$ параллельно действительной оси. Таким образом

$$J = \int_0^{ai} + \int_{ai}^{\infty + ai} = J_1 + J_2.$$

Полагая в первом интеграле $t = ui$, а во втором $t = v + ai$, мы получаем:

$$J_1 = \int_0^{ai} e^{-(t-ai)^2} dt = i\int_0^a e^{(u-a)^2} du = iK,$$

где K — действительное число; далее,

$$J_2 = \int_{ai}^{\infty + ai} e^{-(t-ai)^2}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-v^2}\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак,

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + iK,$$

$$R(J) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\Phi'(a) = \sqrt{\pi}\, e^{-a^2},$$

а, значит,

$$\Phi(a) = \sqrt{\pi} \int_0^a c^{-x^2}\, dx,$$

ибо $\Phi(0) = 0$.

Лемма 4. *Если $\varkappa$ — число положительное, а s и h — какие угодно действительные числа, то*

$$\int_{-\frac{h+s}{2\varkappa}}^{\frac{h-s}{2\varkappa}} e^{-x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin ht}{t} \cos st\, e^{-\varkappa^2 t^2}\, dt.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin ht}{t} \cos st\, e^{-\varkappa^2 t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [\sin(s+h)\, t - \sin(s-h)\, t]\, e^{-\varkappa^2 t^2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (I_1 - I_2);$$

здесь же на основании леммы 3,

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin(s+h)\, t}{t} e^{-\varkappa^2 t^2}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{s+h}{\varkappa} t}{t} e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^{\frac{s+h}{2\varkappa}} e^{-x^2}\, dx,$$

$$-I_2=-\int_0^\infty \frac{\sin(s-h)t}{t}e^{-x^2t^2}\,dt=\sqrt{\pi}\int_{\frac{s-h}{2x}}^{0} e^{-x^2}\,dx,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}(I_1-I_2)=\int_{\frac{s-h}{2x}}^{\frac{s+h}{2x}} e^{-x^2}\,dx=\int_{-\frac{s+h}{2x}}^{\frac{h-s}{2x}} e^{-x^2}\,dx,$$

где последнее равенство мы получаем, делая замену x на $-x$; этим лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть δ — любое положительное число, и*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,$$

два ряда неотрицательных чисел; тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k \leqq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^{2+\delta} b_k\right\}^{\frac{2}{2+\delta}} \cdot \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}^{\frac{\delta}{2+\delta}}.$$

Доказательство. Прежде всего мы можем считать все числа b_k положительными, так как, если бы какое-нибудь из них оказалось нулем, мы могли бы просто вовсе его не рассматривать, что не изменило бы утверждения; в случае же, когда все b_k суть нули, лемма тривиальна.

1) Пусть сначала $n=2$; надо показать, что

$$a_1^2 b_1+a_2^2 b_2-(a_2^{2+\delta} b_1+a_2^{2+\delta} b_2)^{\frac{2}{2+\delta}}(b_1+b_2)^{\frac{\delta}{2+\delta}}\leqq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=a_1^2 b_1+x b_2-\left(a_1^{2+\delta} b_1+x^{1+\frac{\delta}{2}} b_2\right)^{\frac{2}{2+\delta}}(b_1+b_2)^{\frac{\delta}{2+\delta}}$$

при $x\geqslant 0$. Легко находим

$$f'(x)=b_2\left\{1-\left[\frac{b_1+b_2}{\left(\frac{a_1^2}{x}\right)^{1+\frac{\delta}{2}}(b_1+b_2)}\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\right\},$$

откуда видно, что $f'(x)<0$ при $x>a_1^2$ и $f'(x)>0$ при $x<a_1^2$ таким образом функция $f(x)$ имеет абсолютный максимум при $x=a_1^2$; так как $f(a_1^2)=0$, то требуемое доказано.

2) Пусть теперь утверждение доказано для случая n слагаемых; покажем, что оно будет справедливым и для $n+1$ слагаемых.

В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\, b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k + a_{n+1}^2 b_{n+1} = \left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}\right\} \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1}^2 b_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}\right\}^{\frac{2+\delta}{2}} \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1}^{2+\delta} b_{n+1}\right]^{\frac{2}{2+\delta}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left\{\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2+\delta} b_k\right)^{\frac{2}{2+\delta}} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}\right\}^{\frac{2+\delta}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k + a_{n+1}^{2+\delta} b_{n+1}\right]^{\frac{2}{2+\delta}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} =$$

$$= \left[\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^{2+\delta} b_k\right\} + a_{n+1}^{2+\delta} b_{n+1}\right]^{\frac{2}{2+\delta}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n+1} a_k^{2+\delta} b_k\right]^{\frac{2}{2+\delta}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}},$$

ч. т. д.

Следствие. *Обозначая соответственно через $d^{(2)}$ и $d^{(2+\delta)}$ абсолютные моменты порядков 2 и $2+\delta$ какой-либо случайной величины, мы будем иметь*

$$\{d^{(2)}\}^{2+\delta} \leqslant \{d^{(2+\delta)}\}^2,$$

где δ — любое положительное число.

Это непосредственно вытекает из леммы 5, если за числа a_i принять различные возможные величины абсолютного значения разности между данной случайной величиной и ее математическим ожиданием, а за числа b_l — соответствующие вероятности (при этом $\sum b_k = 1$).

Лемма 6. *Пусть δ — положительное число, x, y и a — какие угодно действительные числа; тогда*

$$|x-y|^{2+\delta} \leqslant 2^{1+\delta}\{|x-a|^{2+\delta}+|y-a|^{2+\delta}\}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(c+x)^{2+\delta}}{2^{1+\delta}[c^{2+\delta}+x^{2+\delta}]},$$

где $c>0$, при $x>0$. Легко убедиться, что $f'(x)>0$, при $x<c$ и $f'(x)<0$ при $x>c$, так что на рассматриваемом участке функция имеет абсолютный максимум $f(c)=1$ при $x=c$. Отсюда

$$(c+x)^{2+\delta} \leqslant 2^{1+\delta}[c^{2+\delta}+x^{2+\delta}] \quad (c>0,\ x>0),$$

а, следовательно,

$$|x-y|^{2+\delta} \leqslant \{|x-a|+|y-a|\}^{2+\delta} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1+\delta}\{|x-a|^{2+\delta}+|y-a|^{2+\delta}\},$$

ч. т. д.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА.

В дальнейшем мы будем обозначать через δ положительное число, не превышающее единицы. В основу наших рассуждений мы кладем ряд случайных величин

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

принимаем все указанные во введении обозначения и полагаем еще для краткости

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)=S,$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=B,$$

$$\sum_{k=1}^{n}d_k^{(2+\delta)}=D.$$

Предстоящее нам доказательство будет весьма громоздким, а потому для удобства читателя мы считаем полезным разбить его на отдельные пункты.