

Б. Н. Юрьев

**Экспериментальная
аэродинамика**

**Часть 2. Индуктивное
сопротивление**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 656
ББК 39.1
Б11

Б. Н. Юрьев
Б11 Экспериментальная аэродинамика: Часть 2. Индуктивное сопротивление / Б. Н. Юрьев – М.: Книга по Требованию, 2013. – 276 с.

ISBN 978-5-458-37864-2

Книга представляет собой вторую часть курса "Экспериментальная аэrodинамика" и посвящена индуктивному сопротивлению крыльев. В ней дается вихревая теория крыла, являющаяся основой аэродинамического расчета самолета, приводятся теории моноплана и биплана и теория влияния крыла на хвостовое оперение. В книге даются также методы расчета моноплана, биплана и хвостового оперения.

В книге использован богатый экспериментальный материал советских и заграничных экспериментальных исследований.

В основном книга является учебником для авиационных вузов, однако указания по приложению теории к практическим расчетам делают этот учебник ценным руководством для конструкторских бюро самолетостроительных заводов.

ISBN 978-5-458-37864-2

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Основные обозначения

$Oxyz$ — оси поточные.

$Ox_1y_1z_1$ — оси связанные.

α — угол атаки крыла, отсчитываемый от центральной хорды.

α_a — угол атаки по аэродинамической хорде; когда оговорено, индекс a не ставится.

α' — текущий угол атаки сечения.

$\Delta\alpha$ — угол скоса потока.

$\Delta\alpha_{\text{г.о}}$ — угол скоса потока у горизонтального оперения.

α_i — истинный угол атаки.

$\varphi = \alpha' - \alpha$ — угол закрутки сечения крыла.

S — площадь крыла.

$\bar{S} = \frac{S}{(l/2)^2}$ — отвлеченная площадь крыла.

l — размах крыла.

b, b_0 и b_k — хорды текущая, центральная и концевая.

$b_{\text{ср}} = \frac{\bar{S}}{l} = \frac{\bar{S}}{2}$ — средняя хорда.

$\bar{b}, \bar{b}_0, \bar{b}_k, b_{\text{ср}}$ — хорды текущая, центральная, концевая и средняя, отнесенные к $l/2$.

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — отвленные координаты, отнесенные к $l/2$.

L — условная длина самолета — от центра тяжести до шарниров руля высоты.

$\lambda = \frac{l^2}{S} = \frac{l}{b_{\text{ср}}} = \frac{2}{b_{\text{ср}}} = \frac{4}{\bar{S}}$ — удлинение крыла.

λ_* — эффективное удлинение в присутствии фюзеляжа.

λ_s — удлинение эквивалентного крыла моноплана.

f — стрелка кривизны профиля.

$\bar{f} = \frac{f}{b}$ — относительная стрелка кривизны.

c — толщина профиля.

$\bar{c} = \frac{c}{b}$ — относительная толщина.

h — высота коробки крыльев.

α — вынос верхнего крыла по отношению к нижнему и наклон кривой c_y по α (см. далее).

c — консоль крыла.

V — скорость полета или потока вдали от тела.

W — результирующая скорость потока.

W_x, W_y, W_z — компоненты результирующей скорости потока.

v — индуктивная скорость.

v_x, v_y, v_z — компоненты индуктивной скорости.

v_{y_0} — средняя по размаху скорость скоса у моноплана.

$\bar{v}_x = \frac{v_x}{V}; \bar{v}_y = \frac{v_y}{V}; \bar{v}_z = \frac{v_z}{V}$ — отвленные индуктивные скорости.

$\bar{v}'_x = \frac{v_x}{|v_{y_0}|}; \bar{v}'_y = \frac{v_y}{|v_{y_0}|}; \bar{v}'_z = \frac{v_z}{|v_{y_0}|}$ — относительные индуктивные скорости.

R — результирующая аэродинамических сил.

X, Y, Z — компоненты полной силы в поточных осях.

M — полный аэродинамический момент.

M_x, M_y, M_z — компоненты полного аэродинамического момента в поточных осях,
 $c_x, c_y, c_z, c_{tx}, c_{ty}, c_{tz}$ — поточные аэродинамические коэффициенты (новые),
отнесенные к скоростному напору.

$c'_x, c'_y, c'_z, c'_{tx}, c'_{ty}, c'_{tz}$ — текущие аэродинамические коэффициенты для
сечения крыла, лежащего на абсциссе z .

$\alpha = \frac{dc_y}{dx} =$ наклон кривой $c_y = f(\alpha)$ для всего крыла в целом.

$a_0 = \frac{dc'_y}{dx_i}$ — наклон кривой $c_y = f(\alpha)$ для крыла бесконечного размаха или для
сечения.

A_n, B_m, C_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье разных функций.

ρ — массовая плотность воздуха.

$q = \frac{\rho V^2}{2}$ — скоростной напор потока.

σ — площадь вредной эквивалентной пластиинки. Прандтлевский коэффициент
индукции биплана.

1,28 — условный коэффициент лобового сопротивления для пластиинки.

$\epsilon, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}$ — коэффициенты индукции и взаимной индукции крыльев.

μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты взаимной индукции для горизонтальной скорости.

$\mu = \frac{l_2}{l_1}$ — отношение размахов крыльев в биплане.

$\gamma_l = \frac{h}{l_1 + l_2}$ — относительная высота коробки биплана.

π — отношение индуктивного сопротивления данной коробки к индуктивному
сопротивлению моноплана того же размаха.

Индексы 1, 2, 3 — номер крыла, считая сверху.

(—) — черта над буквой обозначает отвлеченную величину.

(') — штрих сверху употребляется в разных смыслах; при аэродинамических
коэффициентах обозначает местные для данного сечения значения.

ф. к. г. о — в индексе обозначают, что величины относятся к фюзеляжу, концу
крыла и горизонтальному оперению.

Глава I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВИХРЕЙ

§ 1. ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ

Напомним вкратце основные положения теории вихрей, проходимые в курсе теоретической аэродинамики. Крайне важным во всей аэродинамике является понятие о циркуляции скорости по любому замкнутому контуру. Если взять в текущей жидкости какой-нибудь замкнутый контур ABC (фиг. 1), то можно, разбив контур на малые элементы длиной ds , написать выражение:

$$d\Gamma = V_s ds,$$

где $V_s = V \cos \varphi$ — проекция скорости жидкости на касательную к этому элементу; величина $d\Gamma$ называется течением скорости вдоль элемента ds .

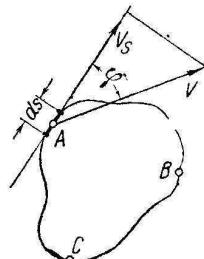
Делая круговой обход этого контура и подсчитывая течение скорости по всему замкнутому контуру, получим циркуляцию скорости:

$$\Gamma = \oint V_s ds; \quad (1)$$

знак \oint обозначает интеграл по замкнутому контуру.

Циркуляция может быть отрицательной, положительной и равной нулю. В геометрическом смысле она является скаляром, а не вектором. Выражение циркуляции формально напоминает выражение работы силы, однако физический смысл циркуляции совсем другой. Ее размерность такова: $[m]^2 [сек.]^{-1}$.

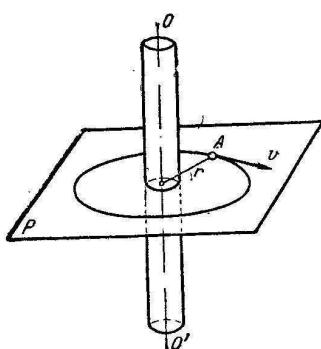
При помощи циркуляции определяется, завихрено ли течение жидкости или нет. Если циркуляция по любому замкнутому контуру в какой-нибудь области течения жидкости равна нулю, то это означает, что движение жидкости в этой области не завихрено; наоборот, если Γ не равна нулю, то движение будет вихревым.



Фиг. 1. Циркуляция скорости.

§ 2. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ВИХРЕВОЙ ШНУР

Наиболее простым случаем завихрения является прямолинейный вихревой шнур (фиг. 2). В нем жидкость завихрена равномерно.



Фиг. 2. Прямолинейный вихревой шнур.

Ближайшее исследование показывает, что такой шнур просто вращается, как твердое тело, около своей оси OO' . Снаружи жидкость может быть и не завихрена. Однако в последнем случае, как показывает подробное изучение, жидкость не будет находиться в покое, а придет в особое циклическое движение, причем частицы ее хотя и будут бегать по круговым траекториям, однако не будут иметь угловой скорости вращения. Далее в гидродинамике доказывается, что циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему вихревой шнур, равна постоянной величине.

Таким образом силу вихря можно измерить имеющейся вокруг него циркуляцией.

§ 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ВИХРИ. ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И СТОКСА

В общем случае вихри имеют криволинейную форму. В этом случае вокруг вихря возникает сложное движение жидкости, а сам вихрь может при этом все время изменять свою форму, как бы „извиваться змеей“. Несмотря на сложность таких движений жидкости они все же подчинены сравнительно простым законам, найденным впервые Гельмгольцем. Эти законы или теоремы Гельмгольца формулируются обычно таким образом:

1) циркуляция скорости вокруг вихревого шнура по всей его длине остается величиной постоянной, т. е. вихрь не может внезапно окончиться;

2) вихревой шнур все время остается вихревым шнуром (теорема о неуничтожаемости вихрей);

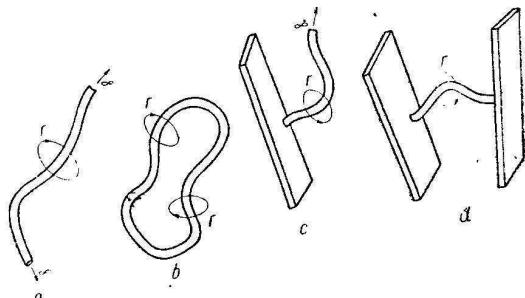
3) циркуляция скорости вокруг движущегося в жидкости вихря во все время его движения постоянна.

Из этих теорем следует, что вихревой шнур должен или простираться обоими концами в бесконечность (фиг. 3, a), или замыкаться сам на себя, образуя вихревое кольцо (b), или опираться одним концом (c), или двумя концами (d) на границы жидкости, т. е. на твердое тело, или на ее свободную поверхность. Эти теоремы доказываются в курсах гидродинамики и находят весьма широкое применение в теории индуктивного сопротивления крыльев.

Иногда случается, что через воображаемый в жидкости контур проходит не один, а несколько вихревых шнуров. Тогда применима знаменитая теорема Стокса — циркуляция скорости

по контуру равна алгебраической сумме циркуляций отдельных вихрей, проходящих через него. Эта теорема позволяет находить скорости в потоке, обусловленные наличием вихрей. Обычно в таких случаях говорят, что вихри вызывают в окружающей жидкости скорости.

Это выражение не следует понимать буквально, так как в идеальной жидкости нет трения и вихрь не может закрутить поток вокруг себя. Правильнее говорить, что вихри и скорости в окружающей их жидкости взаимно обусловлены. В дальнейшем мы будем называть скорости, вызванные вихрями, индуктивными скоростями и будем их обозначать малой буквой v .



Фиг. 3. Возможные формы вихрей.

§ 4. СКОРОСТИ ОКОЛО ВИХРЕЙ. ТЕОРЕМА БИО-САВАРА

В случае прямолинейного шнура скорость, вызванная им в какой-нибудь точке A , может быть легко найдена путем следующего простого рассуждения. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную к оси вихря, и начертим на ней окружность (фиг. 2), проходящую через эту точку, с центром, лежащим на оси вихря. В силу симметрии и вследствие отсутствия в потоке источников и стоков заключаем, что скорость во всех точках этой окружности будет одинаковой и направленной по касательным, т. е. всюду $v_s = v = \text{const}$. Отсюда циркуляция скорости по этой окружности будет такой:

$$\Gamma = \oint v_s ds = v \oint ds = v 2\pi r,$$

где r — радиус окружности. Сила вихрей задается циркуляцией. Зная циркуляцию Γ , находим:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (2)$$

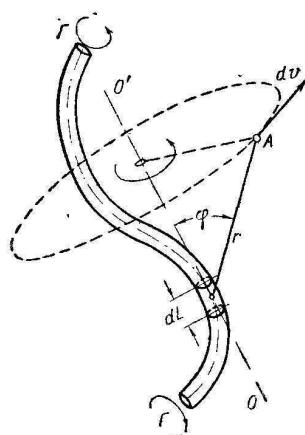
Эта скорость направлена в ту сторону, в которую вращается вихревой шнур: Нередко в приложениях приходится вычислять скорость, вызванную половиной шнура, т. е. отрезком вихря, идущим от плоскости P вверх или вниз в бесконечность (фиг. 2). Действие такого вихря на точку A оказывается в два раза меньшим, чем в случае целого шнура (см. далее), и вызванная им скорость вычисляется по формуле:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi r}. \quad (3)$$

В случае криволинейного вихря скорость приходится вычислять сначала для бесконечно-малого элемента длины шнура dL

и затем интегрировать по всей его длине. Как доказывается в теоретической аэродинамике, скорость $d\mathbf{v}$, вызванная элементом криволинейного шнура, выражается формулой Био-Савара, имеющей вид:

$$d\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin \varphi dL. \quad (4)$$



Фиг. 4. К теореме Био-Савара.

элементов по его длине. Направление скорости $d\mathbf{v}$ легко найти: оно совпадает с той скоростью, с какой вращалась бы точка A около оси OO' , будучи скрепленной с элементом dL .

§ 5. ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ ВИХРЕЙ

Формулу Био-Савара следует применять ко всему пространству, занятому жидкостью. Следовательно, при криволинейном вихре или при наличии нескольких прямолинейных вихрей одни из элементов вихря будут вызывать скорости у других элементов и таким образом вихри придут в сложное движение. Теорема Био-Савара показывает, что скорости, вызываемые отдельными элементами, а следовательно, и вихрями, просто суммируются геометрически.

Отсюда получается очень важный для приложений принцип независимости действия вихрей, или принцип наложения, который можно сформулировать таким образом: при наличии в жидкости нескольких вихрей скорость от каждого вихря в любой точке может быть найдена так, как будто других вихрей не существует; геометрическое сложение найденных таким образом скоростей дает истинную скорость в этой точке.

Если при этом, как это постоянно имеет место в теории индукций, на систему вихрей набегает еще поступательный поток со скоростью V , то эту скорость следует геометрически сложить со скоростями, полученными от вихрей.

§ 6. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ВИХРЕВОЙ ОТРЕЗОК

Как увидим далее, вихри, сбегающие с крыла, имеют прямолинейную форму. Пользуясь принципом независимости действия вихрей, их можно разбивать на прямолинейные отрезки.

Возникает вопрос о величине скорости, вызванной таким отрезком.

Пусть мы имеем отрезок вихря BC . Найдем скорость, вызванную им в точке A (фиг. 5). Проведем оси координат, как показано на чертеже. Пусть точка A лежит на расстоянии y_1 от оси вихря, а концы вихря, т. е. точки B и C , лежат на расстояниях x_1 и x_2 от основания перпендикуляра O , опущенного из точки A на ось вихря (начала координат). Все элементы, лежащие на отрезке BC , будут действовать на точку A , вызывая в ней скорости по формуле Био-Савара:

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin \varphi dL. \quad (5)$$

Возьмем текущий элемент bc и применим к нему формулу Био-Савара.

Заметим сначала, что соединив концы этого элемента с точкой A , мы получим расстояния Ab и Ac , в пределе совпадающие и тогда равные r . Описав из точки A дугу радиусом r , получим бесконечно-малый треугольник abc , причем $\angle acb$ в пределе равен φ .

Легко видеть, что

$$\overline{ab} = r d\varphi \quad \text{и} \quad dL = \frac{\overline{ab}}{\sin \varphi} = \frac{r d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Далее

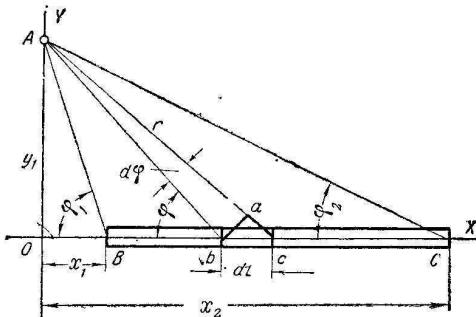
$$r = \frac{y_1}{\sin \varphi}$$

и, следовательно,

$$dL = \frac{y_1}{\sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (6)$$

Подставляя найденные величины в формулу Био-Савара, получаем:

$$dv = \frac{\Gamma \sin^2 \varphi}{4\pi y_1^2} \sin \varphi \frac{y_1 d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{\Gamma}{4\pi y_1} \sin \varphi d\varphi. \quad (7)$$



Фиг. 5. Действие вихревого отрезка.

Для получения полной скорости интегрируем действие всех элементов шнура в пределах углов от φ_1 до φ_2 и получаем:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi y_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi y_1} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1). \quad (8)$$

Формула эта и решает поставленную задачу. Легко убедиться, что она дает правильный ответ и для прямолинейного шнура и для полушенура. В первом случае мы должны подставить в нее $\varphi_1 = 180^\circ$ и $\varphi_2 = 0^\circ$; тогда получим:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi y_1},$$

во втором случае, подставив $\varphi_1 = 90^\circ$ и $\varphi_2 = 0^\circ$, получим:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi y_1},$$

т.е. эти формулы совпадают с уже полученными формулами (2) и (3).

Основную формулу (8) удобно для приложений освободить от тригонометрических выражений, для чего достаточно заместить, что

$$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{y_1^2 + x_2^2}};$$

подставив эти выражения в формулу (8), получим:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi y_1} \left(\frac{x_2}{\sqrt{y_1^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}} \right). \quad (9)$$

Величину x_1 следует брать со знаком минус, когда концы шнура лежат по разные стороны от основания перпендикуляра, опущенного из точки *A* на ось вихря.

Если один конец шнура уходит в бесконечность ($x_2 = \infty$), а другой лежит на конечном расстоянии x_1 от начала координат, то формула (9) принимает вид:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi y_1} \left(1 - \frac{x_1}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}} \right). \quad (10)$$

Глава II

ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО

§ 7. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО ДЛЯ КРЫЛА БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Теорема Н. Е. Жуковского заняла в настоящее время исключительное положение в прикладной аэродинамике. Доказана она была проф. Н. Е. Жуковским еще в 1906 г., но до 1910 г. оставалась незамеченной. Лишь после развития теории крыльев бесконечного размаха — теории, в создании которой русские ученые играли

руководящую роль, эта теорема получила мировое признание. Особенно ее роль возросла после разработки теории индуктивного сопротивления крыльев.

Теорема эта относится к плоскопараллельному потоку. Пусть в таком потоке, текущем вдали с постоянной скоростью V , находится крылообразный цилиндр, перпендикулярный к потоку и имеющий бесконечную длину (фиг. 6). Если выделить двумя сечениями, перпендикулярными к размаху крыла, отрезок крыла длиной l , то на него в общем случае будет действовать подъемная сила Y , которая определяется по теореме Жуковского: подъемная сила Y , действующая на выделенный отрезок l крыла бесконечного размаха, равна циркуляции скорости, умноженной на плотность жидкости, на скорость невозмущенного потока и на длину отрезка l , т. е.

$$Y = \Gamma_0 V l. \quad (11)$$

Для того чтобы найти направление подъемной силы, надо взять вектор невозмущенной скорости V и повернуть его на прямой угол в сторону, противоположную циркуляции скорости.

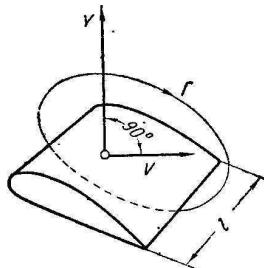
Лобовое сопротивление крыла бесконечного размаха равно нулю, т. е.

$$X = 0.$$

Мы эту теорему вывели в первой части курса экспериментальной аэродинамики. Подробно она излагается во всех курсах гидродинамики.

Н. Е. Жуковский показал, что крыло в гидродинамическом смысле эквивалентно вихрю, так как и вокруг крыла и вокруг вихря существует циркуляция скорости. Это позволяет заменять крыло пучком вихрей, идущих внутри его контура. Такие вихри, которыми можно заменить крыло, были названы Н. Е. Жуковским присоединенными вихрями. Если уничтожить крыло и заменить его простыми вихрями, то набегающий поток воздуха унесет их с собой. Присоединенные же вихри несмотря на набегающий поток стоят неподвижно, поэтому их в большинстве стран называют также связанными вихрями.

Очевидно, что на связанные вихри при набегании потока по теореме Жуковского будет действовать подъемная сила, и для того, чтобы они стояли неподвижно, на них должна действовать сила, обратная подъемной (у самолета — вес). Эта сила и удерживает вихри на месте и делает их связанными. Таким образом удерживать вихри бесконечной длины приходится не лобовой силой, которая равна нулю, а поперечной к потоку, и направленной обратно развивающей вихрями подъемной силе.



Фиг. 6. К теореме Н. Е. Жуковского.

§ 8. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО ДЛЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА.

В 1910 г. целый ряд исследователей заинтересовался вопросом, что получается у крыла не бесконечного размаха, а конечного.

Если у крыла размах равен l , то заменив это крыло присоединенными вихрями, мы получим явное противоречие первой теореме Гельмгольца: вихревой пучок оканчивается теперь внезапно, в точках, где находились торцы крыла. Вихри эти не могут окончиться внезапно и должны выйти за пределы размаха l . Но там они, не будучи связанными, так как на них не действует вес самолета, будут подхвачены общим течением

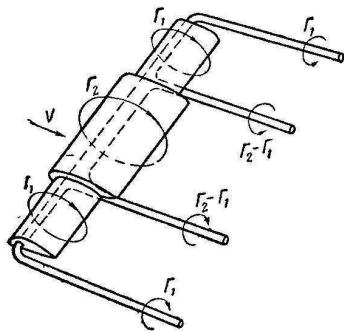
воздуха и вытянутся в так называемые вихревые усы, идущие в бесконечность (фиг. 7). Следовательно, крыло конечного размаха можно заменить системой П-образных вихрей или, еще проще, одним вихрем П-образной формы. У такого вихря циркуляция скорости Γ будет всюду одна и та же.

Опыты прекрасно подтверждают эту схему. Достаточно ввести в поток у концов крыла

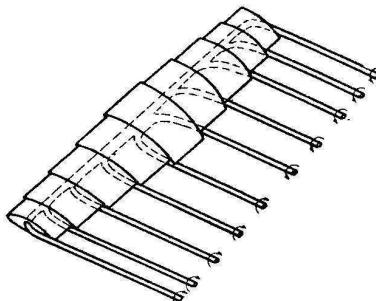
Фиг. 7. Крыло с П-образными вихрями.

шелковинку, чтобы обнаружить эти вихри. В стороне от концов крыла такая шелковинка просто указывает направление потока, у концов же крыла при попадании ее внутрь вихревого шнуря она начинает быстро вращаться, описывая конус.

Описанная схема П-образных вихрей является простейшей и в чистом виде, как увидим далее, не существует. Ее можно обобщить



Фиг. 8. Крыло с уступами.



Фиг. 9. Многоступенчатое крыло.

на крылья более сложной формы. Так например, если крыло имеет уступы, как на фиг. 8, то подъемная сила будет распределена по размаху неравномерно, — обычно она бывает боль-