

Н. Бурбаки

**Функции действительного
переменного**

Элементарная теория

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Б91 **Бурбаки Н.**
Функции действительного переменного: Элементарная теория / Н. Бурбаки –
М.: Книга по Требованию, 2012. – 422 с.

ISBN 978-5-458-31424-4

Перевод с французского Е. И. Стечкиной.

ISBN 978-5-458-31424-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

5. Существование и единственность решений линейных и локально линейных уравнений	214
6. Непрерывность интегралов как функций от параметра	218
7. Зависимость от начальных условий	221
§ 2. Линейные дифференциальные уравнения	230
1. Существование интегралов линейного дифференциального уравнения	230
2. Линейность интегралов линейного дифференциального уравнения	231
3. Интегрирование линейного неоднородного уравнения	235
4. Фундаментальные системы интегралов системы скалярных линейных дифференциальных уравнений	237
5. Сопряженное уравнение	241
6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	243
7. Линейные уравнения n -го порядка	249
8. Линейные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами	251
9. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами	254
Исторический очерк	260
Библиография	262
Глава V. Локальное исследование функций	263
1. Сравнение функций на фильтрующемся множестве	263
1. Отношения сравнения: I. Слабые отношения	264
2. Отношения сравнения: II. Сильные отношения	268
3. Замена переменных	272
4. Отношения сравнения между строго положительными функциями	272
5. Обозначения	276
2. Асимптотические разложения	278
1. Шкала сравнения	278
2. Главные части и асимптотические разложения	280
3. Суммы и произведения асимптотических разложений	283
4. Композиция асимптотических разложений	284
5. Асимптотические разложения с переменными коэффициентами	287
§ 3. Асимптотические разложения функций действительного переменного	289
1. Интегрирование отношений сравнения: I. Слабые отношения	289
2. Приложение: логарифмические признаки сходимости интегралов	291
3. Интегрирование отношений сравнения: II. Сильные отношения	293

4. Дифференцирование отношений сравнения	296
5. Главная часть примитивной	298
6. Асимптотическое разложение примитивной	301
§ 4. Применение к рядам с положительными членами	306
1. Признаки сходимости рядов с положительными членами	306
2. Асимптотическое разложение частичных сумм ряда	309
3. Асимптотическое разложение частичных произведений бесконечного произведения	314
4. Приложение: признаки сходимости второго рода для рядов с положительными членами	316
П р и л о ж е н и е. Тело Харди. Функции (H)	322
1. Тело Харди	322
2. Расширение тела Харди	323
3. Сравнение функций из тела Харди	326
4. Функции (H)	329
5. Повторные показательные функции и повторные логарифмы	330
6. Функция, обратная к функции (H)	333
Г л а в а VI. Обобщенные разложения Тейлора. Формула суммирования Эйлера — Маклорена	344
§ 1. Обобщенные разложения Тейлора	344
1. Операторы композиции в алгебре многочленов	344
2. Многочлены Апшеля, соответствующие оператору композиции	349
3. Производящий ряд многочленов Апшеля	351
4. Многочлены Бернулли	352
5. Операторы композиции над функциями действительного переменного	353
6. Индикатриса оператора композиции	355
7. Формула суммирования Эйлера — Маклорена	360
§ 2. Эйлеровы разложения тригонометрических функций и числа Бернулли	362
1. Эйлерово разложение функции $\operatorname{ctg} z$	362
2. Эйлерово разложение функции $\sin z$	365
3. Приложение к числам Бернулли	367
§ 3. Оценка остатка в формуле Эйлера — Маклорена	371
1. Оценка остатка в формуле Эйлера — Маклорена	371
2. Приложение к асимптотическим разложениям	372
Исторический очерк (главы V и VI)	375
Библиография	380
Г л а в а VII. Гамма-функция	381
§ 1. Гамма-функция в действительной области	381
1. Определение гамма-функции	381

2. Свойства гамма-функции	384
3. Эйлеровы интегралы	387
§ 2. Гамма-функция в комплексной области	395
1. Продолжение гамма-функции на \mathbb{C}	395
2. Формула дополнения и формула умножения Лежандра — Гаусса	397
3. Разложение Стирлинга	401
Исторический очерк	407
Библиография	409
Указатель обозначений	410
Указатель терминов	412
Словарь	418

ВВЕДЕНИЕ

Целью этой книги является элементарное изучение дифференциальных свойств функций *одного* действительного переменного; распространение этих свойств на функции многих действительных переменных, и тем более на функции, определенные в более общих пространствах, будет рассмотрено в последующих книгах.

Свойства, которые будут здесь доказаны, справедливы для *числовых* (конечных) функций одного действительного переменного; однако большинство из них может быть без дополнительных рассуждений перенесено на функции одного действительного переменного, принимающие значения в некотором *конечномерном векторном пространстве* над телом \mathbf{R} , и даже на более общий класс функций со значениями в *топологическом векторном пространстве* над телом \mathbf{R} (см. ниже); поскольку такие функции часто встречаются в анализе, то мы будем формулировать все свойства именно для них, за исключением тех случаев, когда они справедливы лишь для числовых функций.

Понятие топологического векторного пространства, о котором только что говорилось, определено и подробно изучено в книге V настоящего трактата; однако *никакие* результаты оттуда нам не понадобятся, а будет нужно только несколько определений, которые мы для удобства читателей воспроизводим здесь.

Определение *векторного пространства* над *коммутативным* телом K (Алгебра, гл. II, § 1, п° 2) *) мы напоминать не будем.

*) В этой главе элементы (или *векторы*) какого-либо векторного пространства E будут обозначаться, как правило, строчными жирными буквами, а скаляры — строчными светлыми буквами; скаляр t в произведении вектора x на скаляр t мы в основном будем писать *справа*, так что это произведение будет иметь вид $x t$; по

Топологическое векторное пространство E над *топологическим телом* K есть векторное пространство над телом K , наделенное топологией, в которой функции $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ и $t\mathbf{x}$ непрерывны соответственно на множествах $E \times E$ и $E \times K$; такая топология, в частности, согласуется со структурой аддитивной группы пространства E . Если E представляет собой полную топологическую группу, то говорят, что топологическое векторное пространство E является *полным*. Всякое *нормированное* векторное пространство над *упорядоченным телом* K (Общая топология, гл. IX, § 3, п° 3)*) есть топологическое векторное пространство над телом K .

Пусть E — векторное пространство (вне зависимости от того, наделено оно какой-нибудь топологией или нет) над телом \mathbf{R} действительных чисел; если \mathbf{x} , \mathbf{y} — две произвольные точки из E , то *замкнутым отрезком* с концами \mathbf{x} и \mathbf{y} называется множество точек вида $t\mathbf{x} + \mathbf{y}(1-t)$, где t пробегает замкнутый интервал $[0, 1]$ прямой \mathbf{R} . Говорят, что подмножество A пространства E *выпукло*, если для любых двух точек \mathbf{x} , \mathbf{y} из A замкнутый отрезок с концами \mathbf{x} и \mathbf{y} содержится в A . Например, линейное аффинное многообразие, замкнутый отрезок, а также параллелепипед в \mathbf{R}^n выпуклы (Общая топология, гл. VI, § 1, п° 3). Всякое пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Топологическое векторное пространство E над телом \mathbf{R} *локально выпукло*, если начало координат (а значит, и любая точка пространства E) обладает фундаментальной системой *выпуклых* окрестностей. Всякое *нормированное* пространство E над телом \mathbf{R} локально выпукло; в самом деле, шары $\|\mathbf{x}\| \leq r$ ($r > 0$) образуют фундаментальную систему окрестностей начала в E и каждый из них является выпуклым множеством, ибо

в некоторых случаях мы ради удобства будем использовать и левое обозначение $t\mathbf{x}$; мы будем также часто записывать произведение скаляра $\frac{1}{t}$ ($t \neq 0$) на вектор \mathbf{x} в виде $\frac{\mathbf{x}}{t}$.

*) Напомним, что *нормой* в пространстве E называется числовая функция $\|\mathbf{x}\|$, определенная в E , принимающая конечные неотрицательные значения и такая, что соотношение $\|\mathbf{x}\| = 0$ эквивалентно $\mathbf{x} = 0$, что $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ и что $\|t\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| |t|$ для любого $t \in K$ (где $|t|$ — абсолютное значение t в K).

соотношения $\|x\| \leq r$, $\|y\| \leq r$ влекут за собой

$$\|xt + y(1-t)\| \leq \|x\|t + \|y\|(1-t) \leq r$$

для $0 \leq t \leq 1$. В частности, числовые пространства \mathbf{R}^n локально выпуклы.

Наконец, *топологическая алгебра* A над *топологическим телом* (коммутативным) K есть алгебра над телом K , наделенная такой топологией, что функции $x + y$, xy и xt непрерывны соответственно на $A \times A$, $A \times A$ и $A \times K$; если же рассматривать A лишь как множество, наделенное топологией и структурой векторного пространства над телом K , то A есть топологическое векторное пространство. Всякая *нормированная алгебра* над *упорядоченным телом* K (Общая топология, гл. IX, § 3, п° 7) является топологической алгеброй над телом K .

ГЛАВА I

ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 1. Первая производная

Как уже говорилось во введении, в этой и в последующих главах мы будем изучать дифференциальные свойства функций, определенных на части тела \mathbf{R} действительных чисел и принимающих значения в некотором *топологическом векторном пространстве* E над телом \mathbf{R} ; для краткости мы будем такие функции называть *вектор-функциями одного действительного переменного*. Наиболее важным является случай $E = \mathbf{R}$ (конечные числовые функции действительного переменного). Если же $E = \mathbf{R}^n$, то рассмотрение одной вектор-функции со значениями в E сводится к одновременному рассмотрению n конечных числовых функций.

Многие определения и свойства, изложенные в главе I, переносятся на функции, определенные на части тела \mathbf{C} комплексных чисел и принимающие значения в топологическом векторном пространстве над телом \mathbf{C} (вектор-функции одного комплексного переменного). Некоторые из этих определений и свойств распространяются даже на функции, определенные на части произвольного коммутативного *топологического тела* K и принимающие значения в топологическом векторном пространстве над телом K .

По ходу дела мы будем указывать эти обобщения (см., например, замечание 2, § 1, n° 6), выделяя всюду случай функций одного комплексного переменного, который наряду со случаем функций одного действительного переменного является самым важным и будет более глубоко изучаться в одной из последующих книг.

1. Производная вектор-функции

Определение 1. Пусть вектор-функция \mathbf{f} определена на интервале $I \subset \mathbf{R}$, не сводящемся к точке. Говорят, что \mathbf{f} дифференцируема в точке $x_0 \in I$, если предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, x \in I, x \neq x_0}} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}$$

существует (в векторном пространстве, в котором \mathbf{f} принимает свои значения); значение этого предела называется первой производной (или просто производной) функции \mathbf{f} в точке x_0 и обозначается $\mathbf{f}'(x_0)$ или $D\mathbf{f}(x_0)$.

Если \mathbf{f} дифференцируема в точке x_0 , то в этой точке дифференцируемо и сужение функции \mathbf{f} на любой не сводящийся к точке интервал $J \subset I$, содержащий x_0 , и производная этого сужения равна $\mathbf{f}'(x_0)$. Обратно, пусть J — интервал, содержащийся в I и содержащий окрестность точки x_0 относительно I ; если сужение функции \mathbf{f} на J имеет в точке x_0 производную, то тем же свойством обладает и функция \mathbf{f} .

Эти свойства выражают, говоря, что понятие производной есть понятие *локальное*.

Замечания. * 1) В кинематике (если $\mathbf{f}(t)$ означает положение движущейся точки в пространстве \mathbb{R}^3 в момент t) выражение $\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$ называется *средней скоростью* движения между моментами t_0 и t , а его предел $\mathbf{f}'(t_0)$ — *мгновенной скоростью* (или просто *скоростью*) в момент t_0 (если этот предел существует). *

2) Если функция \mathbf{f} определена на I и дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in I$, то в этой точке она *непрерывна относительно I* .

Определение 2. Пусть \mathbf{f} — вектор-функция, определенная на интервале $I \subset \mathbb{R}$, и пусть x_0 — такая точка из I , что интервал $I \cap]x_0, +\infty[$ (соответственно $I \cap]-\infty, x_0[$) не сводится к точке. Говорят, что \mathbf{f} дифференцируема в точке x_0 справа (соответственно слева), если сужение функции \mathbf{f} на интервал $I \cap]x_0, +\infty[$ (соответственно $I \cap]-\infty, x_0[$) дифференцируемо в точке x_0 ; значение производной этого сужения в точке x_0 называется правой (соответственно левой) производной функции \mathbf{f} в точке x_0 и обозначается $\mathbf{f}'_d(x_0)$ (соответственно $\mathbf{f}'_z(x_0)$).

Пусть \mathbf{f} — вектор-функция, определенная на I , x_0 — внутренняя точка этого интервала, и пусть \mathbf{f} непрерывна в этой точке; из определений 1 и 2 вытекает, что для того, чтобы функция \mathbf{f} была дифференцируема в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она обладала в этой точке как правой, так и левой

производной и чтобы эти производные были равны; тогда $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Примеры. 1) *Постоянная* функция в каждой точке имеет производную, равную нулю.

2) *Линейная* функция $x \rightarrow ax + b$ в каждой точке имеет производную, равную a , то есть *постоянную*.

3) Числовая функция $\frac{1}{x}$ (определенная для $x \neq 0$) дифференцируема в любой точке $x_0 \neq 0$, так как $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) / (x - x_0) = -\frac{1}{xx_0}$, а поскольку функция $\frac{1}{x}$ в точке x_0 непрерывна, то предел предыдущего выражения равен $-\frac{1}{x_0^2}$.

4) Числовая функция $|x|$, определенная на \mathbf{R} , имеет в точке $x=0$ правую производную, равную $+1$, а левую — равную -1 ; значит, в этой точке она не дифференцируема.

5) Числовая функция, равная нулю при $x=0$ и равная $x \sin \frac{1}{x}$ для $x \neq 0$, определена и непрерывна на \mathbf{R} , однако в точке $x=0$ не имеет ни правой, ни левой производной. Можно указать примеры функций, непрерывных на некотором интервале и не имеющих производной ни в какой точке этого интервала (упражнение 2 п 3).

Определение 3. — Говорят, что вектор-функция f , определенная на некотором интервале $I \subset \mathbf{R}$, дифференцируема (соответственно дифференцируема справа, дифференцируема слева) на I , если она дифференцируема (соответственно дифференцируема справа, дифференцируема слева) в каждой точке этого интервала; функция $x \rightarrow f'(x)$ (соответственно $x \rightarrow f'_d(x)$, $x \rightarrow f'_g(x)$), определенная на I , называется производной функцией или (сокращенно) производной (соответственно правой производной, левой производной) функции f и обозначается f' , Df или $\frac{d}{dx} f$ (соответственно f'_d , f'_g).

Замечание. Если функция дифференцируема на интервале, то ее производная не обязана быть непрерывной в каждой точке этого интервала (ср. упражнение 5); * например, функция, равная нулю при $x = 0$ и равная $x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, всюду имеет производную, но эта производная в точке $x=0$ разрывна.*