Н. Бурбаки

Функции действительного переменного

Элементарная теория

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.
Б91 Функции действительного переменного: Элементарная теория / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2012. – 422 с.

ISBN 978-5-458-31424-4

Перевод с французского Е. И. Стечкиной.

ISBN 978-5-458-31424-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ

Целью этой книги является элементарное изучение дифференциальных свойств функций *одного* действительного переменного; распространение этих свойств на функции многих действительных переменных, и тем более на функции, определенные в более общих пространствах, будет рассмотрено в последующих книгах.

Свойства, которые будут здесь доказаны, справедливы для *числовых* (конечных) функций одного действительного переменного; однако большинство из них может быть без дополнительных рассуждений перенесено на функции одного действительного переменного, принимающие значения в некотором *конечномерном векторном пространстве* над телом $\mathbf{R}$, и даже на более общий класс функций со значениями в *топологическом векторном пространстве* над телом $\mathbf{R}$ (см. ниже); поскольку такие функции часто встречаются в анализе, то мы будем формулировать все свойства именно для них, за исключением тех случаев, когда они справедливы лишь для числовых функций.

Понятие топологического векторного пространства, о котором только что говорилось, определено и подробно изучено в книге V настоящего трактата; однако *никакие* результаты оттуда нам не понадобятся, а будет нужно только несколько определений, которые мы для удобства читателей воспроизводим здесь.

Определение *векторного пространства* над *коммутативным* телом K (Алгебра, гл. II, § 1, n° 2) *) мы напоминать не будем.

---

*) В этой главе элементы (или *векторы*) какого-либо векторного пространства E будут обозначаться, как правило, строчными жирными буквами, а скаляры — строчными светлыми буквами; скаляр t в произведении вектора $\mathbf{x}$ на скаляр t мы в основном будем писать *справа*, так что это произведение будет иметь вид $\mathbf{x}t$; по

Топологическое векторное пространство E над *топологическим телом* K есть векторное пространство над телом K, наделенное топологией, в которой функции $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}t$ *непрерывны* соответственно на множествах $E\times E$ и $E\times K$; такая топология, в частности, согласуется со структурой аддитивной группы пространства E. Если E представляет собой полную топологическую группу, то говорят, что топологическое векторное пространство E является *полным*. Всякое *нормированное* векторное пространство над *упорядоченным телом* K (Общая топология, гл. IX, § 3, n° 3) *) есть топологическое векторное пространство над телом K.

Пусть E — векторное пространство (вне зависимости от того, наделено оно какой-нибудь топологией или нет) над телом $\mathbf{R}$ действительных чисел; если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — две произвольные точки из E, то *замкнутым отрезком* с концами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называется множество точек вида $\mathbf{x}t+\mathbf{y}(1-t)$, где t пробегает замкнутый интервал $[0, 1]$ прямой $\mathbf{R}$. Говорят, что подмножество A пространства E *выпукло*, если для любых двух точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ из A замкнутый отрезок с концами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ содержится в A. Например, линейное аффинное многообразие, замкнутый отрезок, а также параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ выпуклы (Общая топология, гл. VI, § 1, n° 3). Всякое пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Топологическое векторное пространство E над телом $\mathbf{R}$ *локально выпукло*, если начало координат (а значит, и любая точка пространства E) обладает фундаментальной системой *выпуклых* окрестностей. Всякое *нормированное* пространство E над телом $\mathbf{R}$ локально выпукло; в самом деле, шары $\|\mathbf{x}\|\leqslant r$ $(r>0)$ образуют фундаментальную систему окрестностей начала в E и каждый из них является выпуклым множеством, ибо

в некоторых случаях мы ради удобства будем использовать и левое обозначение $t\mathbf{x}$; мы будем также часто записывать произведение скаляра $\frac{1}{t}$ $(t\neq 0)$ на вектор $\mathbf{x}$ в виде $\frac{\mathbf{x}}{t}$.

*) Напомним, что *нормой* в пространстве E называется числовая функция $\|\mathbf{x}\|$, определенная в E, принимающая конечные неотрицательные значения и такая, что соотношение $\|\mathbf{x}\|=0$ эквивалентно $\mathbf{x}=0$, что $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leqslant\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ и что $\|\mathbf{x}t\|=\|\mathbf{x}\|\,|t|$ для любого $t\in K$ (где $|t|$ — абсолютное значение t в K).

соотношения $\|\mathbf{x}\| \leqslant r$, $\|\mathbf{y}\| \leqslant r$ влекут за собой

$$\|\mathbf{x}t + \mathbf{y}(1-t)\| \leqslant \|\mathbf{x}\|t + \|\mathbf{y}\|(1-t) \leqslant r$$

для $0 \leqslant t \leqslant 1$. В частности, числовые пространства $\mathbf{R}^n$ локально выпуклы.

Наконец, *топологическая алгебра* A над *топологическим телом* (коммутативным) K есть алгебра над телом K, наделенная такой топологией, что функции $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{xy}$ и $\mathbf{x}t$ непрерывны соответственно на $A \times A$, $A \times A$ и $A \times K$; если же рассматривать A лишь как множество, наделенное топологией и структурой векторного пространства над телом K, то A есть топологическое векторное пространство. Всякая *нормированная алгебра* над *упорядоченным телом* K (Общая топология, гл. IX, § 3, n° 7) является топологической алгеброй над телом K.

ГЛАВА I
ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 1. Первая производная

Как уже говорилось во введении, в этой и в последующих главах мы будем изучать дифференциальные свойства функций, определенных на части тела $\mathbf{R}$ действительных чисел и принимающих значения в некотором *топологическом векторном пространстве* E над телом $\mathbf{R}$; для краткости мы будем такие функции называть *вектор-функциями одного действительного переменного*. Наиболее важным является случай $E=\mathbf{R}$ (конечные числовые функции действительного переменного). Если же $E=\mathbf{R}^n$, то рассмотрение одной вектор-функции со значениями в E сводится к одновременному рассмотрению n конечных числовых функций.

Многие определения и свойства, изложенные в главе I, переносятся на функции, определенные на части тела $\mathbf{C}$ комплексных чисел и принимающие значения в топологическом векторном пространстве над телом $\mathbf{C}$ (вектор-функции одного комплексного переменного). Некоторые из этих определений и свойств распространяются даже на функции, определенные на части произвольного коммутативного *топологического тела* K и принимающие значения в топологическом векторном пространстве над телом K.

По ходу дела мы будем указывать эти обобщения (см., например, замечание 2, § 1, n° 6), выделяя всюду случай функций одного комплексного переменного, который наряду со случаем функций одного действительного переменного является самым важным и будет более глубоко изучаться в одной из последующих книг.

1. Производная вектор-функции

Определение 1. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{f}$ *определена на интервале* $I\subset\mathbf{R}$, *не сводящемся к точке. Говорят, что* $\mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* $x_0\in I$, *если предел* $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in I,\, x\neq x_0}\dfrac{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0)}{x-x_0}$

существует (в векторном пространстве, в котором $\mathbf{f}$ *принимает свои значения); значение этого предела называется первой производной* (или просто *производной*) *функции* $\mathbf{f}$ *в точке* x_0 *и обозначается* $\mathbf{f}'(x_0)$ *или* $D\mathbf{f}(x_0)$.

Если $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке дифференцируемо и *сужение* функции $\mathbf{f}$ на любой не сводящийся к точке интервал $J \subset I$, содержащий x_0, и производная этого сужения равна $\mathbf{f}'(x_0)$. Обратно, пусть J — интервал, содержащийся в I и содержащий окрестность точки x_0 относительно I; если сужение функции $\mathbf{f}$ на J имеет в точке x_0 производную, то тем же свойством обладает и функция $\mathbf{f}$.

Эти свойства выражают, говоря, что понятие производной есть понятие *локальное*.

Замечания. * 1) В кинематике (если $\mathbf{f}(t)$ означает положение движущейся точки в пространстве $\mathbf{R}^3$ в момент t) выражение $\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0}$ называется *средней скоростью* движения между моментами t_0 и t, а его предел $\mathbf{f}'(t_0)$ — *мгновенной скоростью* (или просто *скоростью*) в момент t_0 (если этот предел существует). *

2) Если функция $\mathbf{f}$ определена на I и дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in I$, то в этой точке она *непрерывна относительно* I.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{f}$ — *вектор-функция, определенная на интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *и пусть* x_0 — *такая точка из* I, *что интервал* $I \cap [x_0, +\infty[$ (соответственно $I \cap]-\infty, x_0]$) *не сводится к точке. Говорят, что* $\mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* x_0 *справа* (соответственно *слева*), *если сужение функции* $\mathbf{f}$ *на интервал* $I \cap [x_0, +\infty[$ (соответственно $I \cap]-\infty, x_0]$) *дифференцируемо в точке* x_0; *значение производной этого сужения в точке* x_0 *называется правой* (соответственно *левой*) *производной функции* $\mathbf{f}$ *в точке* x_0 *и обозначается* $\mathbf{f}'_d(x_0)$ (соответственно $\mathbf{f}'_g(x_0)$).

Пусть $\mathbf{f}$ — вектор-функция, определенная на I, x_0 — *внутренняя* точка этого интервала, и пусть $\mathbf{f}$ непрерывна в этой точке; из определений 1 и 2 вытекает, что для того, чтобы функция $\mathbf{f}$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она обладала в этой точке как правой, так и левой производной и чтобы эти производные были *равны*; тогда $\mathbf{f}'(x_0) = \mathbf{f}'_d(x_0) = \mathbf{f}'_g(x_0)$.

Примеры. 1) *Постоянная* функция в каждой точке имеет производную, равную нулю.

2) Линейная функция $x \to \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ в каждой точке имеет производную, равную $\mathbf{a}$, то есть *постоянную*.

3) Числовая функция $\frac{1}{x}$ (определенная для $x \neq 0$) дифференцируема в любой точке $x_0 \neq 0$, так как $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) / (x - x_0) = -\frac{1}{xx_0}$, а поскольку функция $\frac{1}{x}$ в точке x_0 непрерывна, то предел предыдущего выражения равен $-\frac{1}{x_0^2}$.

4) Числовая функция $|x|$, определенная на $\mathbf{R}$, имеет в точке $x = 0$ правую производную, равную $+1$, а левую — равную -1; значит, в этой точке она не дифференцируема.

5) Числовая функция, равная нулю при $x = 0$ и равная $x \sin \frac{1}{x}$ для $x \neq 0$, определена и непрерывна на $\mathbf{R}$, однако в точке $x = 0$ не имеет ни правой, ни левой производной. Можно указать примеры функций, непрерывных на некотором интервале и не имеющих производной *ни в какой* точке этого интервала (упражнения 2 и 3).

Определение 3. — *Говорят, что вектор-функция* $\mathbf{f}$, *определенная на некотором интервале* $I \subset \mathbf{R}$, *дифференцируема* (соответственно *дифференцируема справа, дифференцируема слева*) *на* I, *если она дифференцируема* (соответственно *дифференцируема справа, дифференцируема слева*) *в каждой точке этого интервала; функция* $x \to \mathbf{f}'(x)$ (соответственно $x \to \mathbf{f}'_d(x)$, $x \to \mathbf{f}'_g(x)$), *определенная на* I, *называется производной функцией или* (сокращенно) *производной* (соответственно *правой производной, левой производной*) *функции* $\mathbf{f}$ *и обозначается* $\mathbf{f}'$, $D\mathbf{f}$ *или* $\frac{d}{dx}\mathbf{f}$ (соответственно $\mathbf{f}'_d$, $\mathbf{f}'_g$).

Замечание. Если функция дифференцируема на интервале, то ее производная не обязана быть непрерывной в каждой точке этого интервала (ср. упражнение 5); * например, функция, равная нулю при $x = 0$ и равная $x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, всюду имеет производную, но эта производная в точке $x = 0$ разрывна. *