И. П. Гурский

# Функции и построение графиков

## Пособие для учителей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

**И. П. Гурский**

И11 Функции и построение графиков: Пособие для учителей / И. П. Гурский – М.: Книга по Требованию, 2013. – 216 с.

**ISBN 978-5-458-62225-7**

Книга содержит большое число задач, посвященных исследованию как элементарных, так и неэлементарных функций средствами элементарной математики с последующим построением графиков.Данное пособие предназначается для учителей математики средних школ, для учеников IX—X классов средних школ, для лиц, готовящихся к конкурсным экзаменам по математике при поступлении в высшие учебные заведения. Этим пособием могут пользоваться также студенты тех высших учебных заведений, где после изучения теории пределов и основ аналитической геометрии знание этих разделов закрепляется построением соответствующих графиков, как раз таких, какие приводятся в данном пособии.

**ISBN 978-5-458-62225-7**

## ВВЕДЕНИЕ

Если две величины, характеризующие какой-либо процесс, изменяются в ходе процесса так, что между изменением одной и другой из этих величин имеется определенная зависимость, то говорят, что между этими величинами существует функциональная связь или функциональная зависимость.

Та переменная величина, которая в данном процессе изменяется независимо от другой величины, называется аргументом. Та же переменная величина, значения которой определяются значениями аргумента, называется функцией.

Функциональная зависимость записывается символически так:

$$y = f(x)$$

и читается: $y$ есть функция от $x$ (игрек равняется эф от икс).

Здесь $x$ — аргумент, т. е. независимая переменная,

$y$ — функция, значение которой зависит от значения $x$.

Определение. *Переменная величина $y$ называется функцией от переменной величины $x$* (аргумента), *если каждому допустимому значению $x$ соответствует определенное значение $y$.*

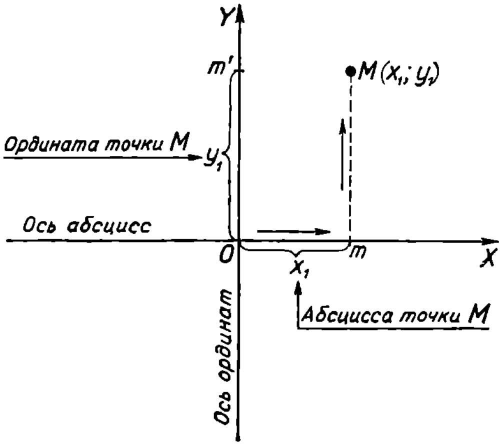
Всякая функциональная зависимость между двумя величинами может быть изображена плоскостным графиком. Для этого на плоскость наносятся оси координат; горизонтальная — ось абсцисс и вертикальная — ось ординат. По оси абсцисс откладываются в некотором масштабе различные значения аргумента $x$ — «абсциссы» различных точек графика, по оси ординат — соответствующие им значения функции $y$ — «ординаты» тех же точек графика. Каждая пара координат, абсцисса и ордината, дает одну точку графика.

На чертеже 1 построена точка $M$ с координатами $x_1$ и $y_1$. Эти координаты обычно записываются в скобках рядом и разделяются точкой с запятой. Точка обозначается: $M(x_1;\ y_1)$.

Примечание. Точку $M$ не следует искать на пересечении прямых $mM$ и $m'M$. Проще поступить так: отложить абсциссу $Om$, затем из точки $m$ отложить ординату $mM$. На чертеже 1 ход построения точки показан стрелками.

Мы здесь не будем рассматривать построение графиков по точкам, так как этот способ громоздкий, несмотря на свою кажущуюся простоту. К тому же он не всегда приводит к цели, вследствие того что без предварительного исследования функции могут быть пропущены наиболее интересные, характерные точки: вершины кривой, некоторые точки пересечения кривой с осями координат и т. д. Более того, самый характер кривой может быть искажен, притом тем сильнее, чем реже взяты точки; может оказаться невыявленной, например, симметрия кривой и т. д.

Во избежание подобных недочетов и для того чтобы основное внимание уделить выявлению характера изучаемой функцио-




Черт. 1.

нальной зависимости, построению графика должно предшествовать исследование общих свойств заданной функции, нахождение вычислением основных, характерных точек графика и исследование поведения кривых графика на разных участках между этими точками.

График строится по найденным характерным точкам и с учетом выявленных общих свойств функции и поведения кривых графика на различных участках. Для контроля правильности построения графика вычисляют дополнительно координаты одной или нескольких контрольных точек и наносят их на график. Контрольные точки служат также для уточнения кривых графика на отдельных участках.

ГЛАВА I

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЕЕ ГРАФИКА И ПОРЯДОК ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА

## *А. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ*

### § 1. ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ (ОПРЕДЕЛЕНИЯ) ФУНКЦИИ

Областью существования или областью определения функции называется совокупность всех значений аргумента, для которых функция определена (т. е. существует и имеет действительные значения). Например:

1) $y=\arcsin x$ — функция существует при

$$-1 \leqslant x \leqslant 1; \tag{1}$$

2) $y=\lg x$ — функция существует при

$$0 < x < \infty; \tag{2}$$

3) $y=\sqrt{x^2-9}$ — функция существует и имеет действительные значения при

$$\left.\begin{matrix} -\infty < x \leqslant -3 \\ \text{и} \\ 3 \leqslant x < \infty \end{matrix}\right\}. \tag{3}$$

Совокупность всех точек числовой оси, заключенных между двумя какими-нибудь точками этой оси, называется промежутком.

Крайние точки промежутка называются концами промежутка.

Промежуток с включением его концов называется замкнутым или закрытым промежутком, а также отрезком или сегментом.

Например, область существования функции $y=\arcsin x$ (пример 1) — замкнутый промежуток (сегмент, отрезок) от $-1$ до $+1$. Наряду с обозначением (1) для замкнутого промежутка употребляется и такое обозначение:

$$[-1, 1]. \tag{1a}$$

Промежуток без включения его концов называется открытым промежутком или интервалом.

Для функции $y=\lg x$ (пример 2) область существования — открытый промежуток (интервал) от 0 до $\infty$. Для открытого промежутка (интервала) наряду с обозначением (2) употребляется обозначение

$$(0,\ \infty). \tag{2a}$$

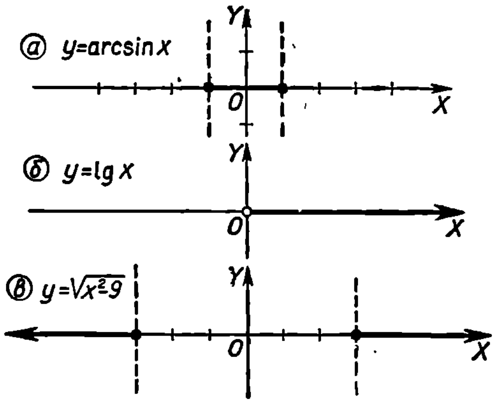
Если один конец присоединяется к промежутку, а другой нет, то такой промежуток, открытый с одной стороны и замкнутый с другой, называется **полуоткрытым** промежутком или **полуинтервалом**.

Для функции $y=\sqrt{x^2-9}$ (пример 3) область существования — два полуинтервала:

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,\ -3] \\ \text{и} \quad [3,\ \infty)\end{array}\right\}. \tag{3a}$$

Примечание. Из приведенных обозначений общепринятыми являются лишь понятия «промежуток». «отрезок» и «сегмент». Понятие «интервал» многими авторами применяется для обозначения всякого промежутка; тогда говорят: «открытый интервал», «закрытый интервал», «полуоткрытый интервал», так же как «закрытый, открытый и полуоткрытый промежутки».

На графике промежутки существования функции обозначаются утолщением оси абсцисс (черт. 2), причем замкнутый конец промежутка обозначается точкой (черт. 2, *а* и 2, *в*), а открытый конец (не включенный в область существования) — кружком (черт. 2, *б*), стрелкой (черт. 2, *б* и 2, *в*) или совсем не обозначается.




Черт. 2.

Если отыскание области существования функции не является самостоятельной задачей, а служит для построения графика этой функции, то рекомендуется промежутки существования ограничивать на чертеже вертикальными штриховыми прямыми, как показано на чертеже 2, *а* и 2, *в*.

## Примеры

1. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Функция не существует, когда знаменатель равен нулю. Следовательно, в области существования функции должно выполняться условие: $x^2-1\neq 0$, откуда $x^2\neq 1$, или $x\neq\pm 1$.

Таким образом, область существования функции состоит из трех интервалов: $(-\infty, -1)$; $(-1, 1)$; $(1, \infty)$.

2. $y=\sqrt{1-x^2}$.

Функция не существует, когда подкоренное выражение отрицательно. Следовательно, имеем: $1-x^2\geqslant 0$, откуда $x^2\leqslant 1$, т. е. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Область существования функции — отрезок $[-1, 1]$.

3. $y=\sqrt{x-1}$.

Имеем: $x-1\geqslant 0$, откуда $x\geqslant 1$.

Область определения функции — полуинтервал $[1; \infty)$.

4. $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

В отличие от предыдущего примера подкоренное выражение не может равняться нулю. Имеем: $x-1>0$, откуда $x>1$.

Область существования функции — интервал $(1, \infty)$.

5. $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

Здесь должны быть рассмотрены следующие ограничения:

$$\begin{cases} 1)\ x+1\geqslant 0, & \text{откуда } x\geqslant -1; \\ 2)\ x-1\geqslant 0, & \text{откуда } x\geqslant 1; \\ 3)\ \sqrt{x+1}\neq\sqrt{x-1}, & \text{откуда } x+1\neq x-1, \text{ т. е. } 1\neq -1, \end{cases}$$

что выполняется всегда.

Следовательно, $x\geqslant 1$.

Область существования функции — полуинтервал $[1, \infty)$.

6. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}$.

Система ограничений:

$$\begin{cases} 1)\ x+1\geqslant 0, & \text{откуда } x\geqslant -1; \\ 2)\ x-2\geqslant 0, & \text{откуда } x\geqslant 2; \\ 3)\ \sqrt{x+1}\neq\sqrt{x-2}, & \text{что выполняется всегда.} \end{cases}$$

Получаем $x\geqslant 2$.

Область определения функции — полуинтервал $[2, \infty)$.

7. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Необходимо, чтобы

$$\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0 \text{ и } x+1\neq 0.$$

Получаем систему, включающую 2 неравенства и 1 уравнение:

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{x-1}{x+1}>0, \\ 2)\ \dfrac{x-1}{x+1}=0, \\ 3)\ x+1\neq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется в двух случаях:

$$1а \left\{\begin{matrix} x-1>0 \\ x+1>0 \end{matrix}\right\}, \text{ откуда } \left\{\begin{matrix} x>1 \\ x>-1 \end{matrix}\right\}, \text{ т. е. } x>1;$$

$$1б \left\{\begin{matrix} x-1<0 \\ x+1<0 \end{matrix}\right\}, \text{ откуда } \left\{\begin{matrix} x<1 \\ x<-1 \end{matrix}\right\}, \text{ т. е. } x<-1.$$

Из условия (3) следует: $x+1\neq 0$, т. е. $x\neq -1$.

Из уравнения (2) следует: $x-1=0$, т. е. $x=1$.

Таким образом, условия (1а) и (2) дают $x\geqslant 1$, а условия (1б) и (3) дают $x<-1$.

Область определения заданной функции состоит из одного открытого и одного полуоткрытого промежутков:

$$(-\infty;\ -1);\ [1;\ \infty).$$

8. $y=\sqrt{-x^2+5x-6}$.

Имеем: $-x^2+5x-6\geqslant 0$.

Решаем уравнение $-x^2+5x-6=0$, или, что то же самое, $x^2-5x+6=0$. Корни уравнения: $x_1=2$, $x_2=3$.

Так как коэффициент при 1-м члене квадратного трехчлена (стоящего под радикалом) отрицательный, то областью положительных значений трехчлена будет промежуток между корнями $x_1$ и $x_2$ уравнения. К области определения относятся также и корни $x_1$ и $x_2$, соответствующие нулевым значениям трехчлена. Следовательно, область определения функции представляет собой замкнутый промежуток [2; 3].

9. $y=\lg(-x^2+5x-6)$.

Область существования этой функции отличается от области существования предыдущей функции только тем, что в нее не входят концы промежутка, так как $-x^2+5x-6>0$.

Следовательно, область существования данной функции — интервал (2, 3).

**10.** $y=\lg\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}$.

Здесь должны быть введены следующие условия:

1) знаменатель не может принимать значение, равное нулю, т. е. $x^2 \neq 0$, откуда следует $x \neq 0$;

2) $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}>0$; а так как знаменатель — существенно положительная величина, то отсюда вытекает, что

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Решение этого неравенства приводится к решению двух систем:

$$1) \begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0 \end{cases} \text{ и } 2) \begin{cases} x-2<0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

Откуда $x_1>3$ и $x_2<2$.

Итак, имеем: $-\infty<x<0$; $0<x<2$; $3<x<\infty$.

Область определения функции состоит из трех интервалов:

$$(-\infty;\ 0);\ (0;\ 2);\ (3;\ \infty).$$

**11.** $y=\lg[x(x-3)(x+5)]$.

Выражение в квадратных скобках должно быть положительным, т. е. $x(x-3)(x+5)>0$.

Покажем два способа решения задачи.

1-й способ.

Неравенство выполняется, если

$$1) \begin{cases} x>0, \\ x-3>0, \\ x+5>0, \end{cases}$$

откуда получаем $x>3$,

либо

$$2) \left.\begin{cases} x>0, \\ x-3<0, \\ x+5<0, \end{cases}\right\} \text{— система противоречива,}$$

либо

3) $\begin{cases} x-3>0, \\ x<0, \\ x+5<0, \end{cases}$ — система противоречива,

либо, наконец,

4) $\begin{cases} x+5>0, \\ x<0, \\ x-3<0, \end{cases}$

откуда получаем: $-5<x<0$.

Учитывая условия (1) и (4), находим, что область существования заданной функции состоит из двух интервалов:

$$(-5;\ 0) \text{ и } (3;\ \infty).$$

2-й способ.

Корни $(0;\ 3;\ -5)$ многочлена, находящегося в левой части неравенства $x(x-3)(x+5)>0$, расположим в порядке возрастания: $-5;\ 0;\ 3$.

Построим интервалы: $(-\infty;\ -5)$; $(-5;\ 0)$; $(0;\ 3)$; $(3;\ \infty)$. Эти интервалы являются интервалами знакопостоянства многочлена $x(x-3)(x+5)$, так как границами смежных интервалов являются корни многочлена. При переходе из одного интервала в смежный с ним многочлен меняет знак.

В крайнем левом интервале, например при $x=-10$, многочлен $-10(-10-3)\cdot(-10+5)<0$. Следовательно, положительным многочлен будет во 2-м и 4-м интервалах.

Отсюда заключаем, что область существования заданной функции — два интервала: $(-5;\ 0)$ и $(3;\ \infty)$.

Из сравнения обоих способов решения неравенств, у которых левая часть состоит из произведения нескольких двучленов, легко видеть, что уже при трех двучленах 2-й способ предпочтительнее. Этот способ называется способом интервалов.

12. $y=\sqrt{16-x^2}+2^{\frac{\sqrt{x}}{x-3}}$.

Имеем систему:

$\begin{cases} 16-x^2\geqslant 0, & (1) \\ x\geqslant 0, & (2) \\ x\neq 3. & (3) \end{cases}$

Из неравенства (1) имеем: $x^2\leqslant 16$, откуда

$$|x|\leqslant 4, \text{ т. е. } -4\leqslant x\leqslant 4.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} x \geqslant -4, \\ x \geqslant 0, \end{matrix}\right\} x \geqslant 0; \\ x \leqslant 4, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Область определения функции — два полуинтервала:

$$[0;\ 3) \text{ и } (3;\ 4].$$

**13.** $y=\sqrt{3^{2x-2}+9^x-10}$.

Имеем:

$$3^{2x-2}+9^x-10 \geqslant 0,$$

$$9^x \cdot \frac{1}{9}+9^x-10 \geqslant 0,$$

$$9^x \cdot \frac{10}{9}-10 \geqslant 0,$$

$$9^x \cdot \frac{10}{9} \geqslant 10,$$

$$9^x \geqslant 9,$$

$$x \geqslant 1.$$

Область определения функции — полуинтервал $[1;\ \infty)$.

**14.** $y=\dfrac{2x^3-\log(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}$.

Одновременно должны выполняться следующие два условия:

1) выражение под знаком логарифма должно быть положительно: $x+5>0$, откуда $x>-5$;

2) подкоренное выражение знаменателя — число неотрицательное: $8-x^3 \geqslant 0$; а так как вместе с тем знаменатель не может быть равен нулю $(\sqrt{8-x^3} \neq 0)$, то оба эти условия вместе выражаются неравенством $8-x^3>0$, откуда получаем: $x^3<8$, т. е. $x<2$.

Условия (1) и (2) совместно дают

$$-5<x<2.$$

Следовательно, область существования функции — интервал $(-5;\ 2)$.

**15.** $y=\sqrt{\sin x+\cos x}$.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$\sin x+\cos x \geqslant 0.$$

Преобразуем это выражение:

$$\sin x+\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$$

$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. Следовательно,

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>0,$$

откуда

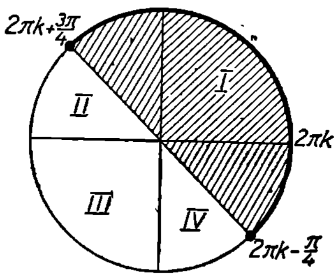
$$2\pi k-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}-x\leqslant 2\pi k+\frac{\pi}{2},$$

или: $2\pi k-\frac{3\pi}{4}\leqslant -x\leqslant 2\pi k+\frac{\pi}{4}$,

или: $-2\pi k-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant -2\pi k+\frac{3\pi}{4}$,

а так как $k$ — любое целое число (положительное и отрицательное), то можно записать:

$$2\pi k-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2\pi k+\frac{3\pi}{4}.$$




Черт. 3.

Область существования функции представляет собой бесконечное множество отрезков (черт. 3):

$$\left[2\pi k-\frac{\pi}{4};\ 2\pi k+\frac{3\pi}{4}\right],$$

где $k$ — любое целое число.

16. $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$.

Здесь знаменатель не может равняться нулю: $1-\cos x\neq 0$, откуда $\cos x\neq 1$, т. е. $x\neq 2\pi k$.

Область существования — бесконечное множество интервалов: $(2\pi k;\ 2(k+1)\pi)$, где $k$ — любое целое число.

17. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

Прежде всего заметим, что знаменатель не равен нулю ни при каких вещественных значениях $x$.

Далее,

так как $\frac{2x}{1+x^2}$ представляет собой $\sin y$, то

$$-1\leqslant\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 1.$$