

В. Соколовский

Теория пластичности

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
В11

В11 **В. Соколовский**
Теория пластичности / В. Соколовский – М.: Книга по Требованию, 2013. – 608 с.

ISBN 978-5-458-36593-2

Издание третье, переработанное и дополненное.

ISBN 978-5-458-36593-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Большое внимание уделено постановке и решению ряда практических задач: о растяжении плоскости с отверстиями, о давлении штампов на полуплоскость и полосу, о сжатии и волочении полосы. Определение полей напряжений и скоростей, вообще говоря, приводит к комбинациям краевых задач для канонических систем уравнений, а иногда может быть достигнуто в замкнутой форме или в тригонометрических рядах.

Рассмотрен ряд задач, в которых поля напряжений не могут быть построены без полей скоростей, и приведен метод, позволяющий находить решения таких задач.

Главы XI и XII относятся к плоскому напряженному состоянию. Проведено подробное исследование уравнений пластического равновесия и преобразование их к каноническим системам для двух видов условий текучести. Показано, что эти уравнения в зависимости от характера напряженного состояния могут быть не только гиперболическими, но и эллиптическими.

Большое внимание уделено решению ряда задач о растяжении пластинки с отверстиями. Определение полей напряжений и скоростей также приводит к комбинациям краевых задач для соответствующих канонических систем уравнений, а иногда может быть получено в замкнутой форме.

Сравнение результатов решения соответствующих задач при плоском деформированном и плоском напряженном состояниях выявляет особенности этих состояний.

Главы XIII и XIV освещают плоское деформированное и плоское напряженное состояния при общем условии текучести и допущении о существовании потенциала текучести. Проведено подробное исследование уравнений пластического равновесия, выяснено, когда они являются гиперболическими и эллиптическими, а также даны различные приемы их преобразования.

Особое внимание обращено на специальное условие текучести, при котором основные уравнения пластического равновесия имеют замкнутые интегралы. При этом условии построены решения основных задач, рассмотренных ранее в весьма простой форме, что дало возможность сделать ряд интересных качественных выводов.

Главы XV и XVI посвящены течениям пластической или упрочняющейся масс и волочению тонкостенных труб. Решения некоторых задач имеют замкнутую форму, а решения других задач могут быть получены путем интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее простые решения имеют задачи о плоском и осесимметричном течениях пластической массы в сходящихся каналах, а также задачи о сжатии и об изгибе плоского клина из упрочняющегося материала.

Рассмотрены задачи об установившемся и неустановившемся течениях пластинок и тонкостенных оболочек с учетом изменения

их толщины. Разобраны задачи: о волочении тонкостенной трубы сквозь матрицы различных форм и о расширении кругового отверстия в жестко-пластической пластинке.

Главы XVII и XVIII содержат теории изгиба балок и пластинок, основанные на обычных геометрических гипотезах. Исследованы различные случаи изгиба балок, поперечное сечение которых обладает осями симметрии. Приведены основные уравнения упруго-пластического изгиба пластинок произвольной формы и дана теория изгиба пластинок из упрочняющегося материала.

Подробно рассмотрена задача об упруго-пластическом изгибе круговых и кольцевых пластинок для различных внешних нагрузок и контурных закреплений, в частности, изучено распространение пластических зон по толщине пластинки при возрастании внешней нагрузки.

Рассмотрены решения некоторых задач о жестко-пластическом изгибе круговых и кольцевых пластинок, требующие построения полей напряжений и скоростей. Особенно простой вид принимает решение задачи об изгибе круговых и кольцевых пластинок из упрочняющегося материала.

Все главы книги проиллюстрированы многочисленными примерами, которые должны облегчить чтение лицам, занимающимся техническими приложениями. Эти примеры снабжены графиками и таблицами, в которых обычно для краткости приведены лишь два десятичных знака или три значащих цифры, хотя вычисления проводились с большой точностью.

Цитированная литература для удобства сведена в отдельный список, который приложен в конце книги. Ссылки в тексте на этот список отмечены номерами, стоящими в квадратных скобках.

При составлении третьего издания книги учитывалось, что после выхода первого и второго изданий появился целый ряд интересных книг, относящихся к той же области.

Так, например, книги А. А. Ильюшина, Л. М. Качанова, Р. Хилла, В. Прагера и Ф. Ходжа посвящены дальнейшему развитию теории пластичности, а книги Н. И. Безухова, А. Д. Томленова и С. И. Губкина содержат практические применения этой важной теории.

Поэтому автор имел возможность не касаться некоторых существенных вопросов теории пластичности и сосредоточить свое внимание лишь на тех вопросах, которые наиболее близки к его научным интересам.

В заключение автор приносит глубокую благодарность всем лицам, высказавшим свои замечания и соображения по первому и второму изданиям этой книги. Автор выражает также признательность С. И. Будыхо за помощь при подготовке рукописи к печати.

В. В. Соколовский

ВВЕДЕНИЕ

Деформация твердых тел состоит из упругой и остаточной частей. В зависимости от возможной величины последней можно говорить о пластичности или хрупкости тела.

Состояние тела, при котором остаточные деформации без заметного ослабления связей между частицами имеют большие величины (по сравнению с упругими), принято называть *пластическим*; состояние тела, при котором, наоборот, остаточные деформации перед наступлением разрушения малы (по сравнению с упругими), называется *хрупким*. Оба эти состояния могут при известных условиях проявляться у одного и того же тела и не являются свойствами, которые должны быть приписаны какому-нибудь материалу всегда. Так, например, мраморные цилиндры при осевом сжатии разрушаются как тела хрупкие, а при всестороннем сжатии проявляют пластические свойства. Основные механические свойства материала обнаруживаются уже из опытов на простое растяжение. Испытанию обычно подвергают цилиндрические образцы путем растяжения их с постоянной скоростью на разрывной машине. Значения истинных напряжений σ и деформаций ϵ изображаются некоторой кривой, так называемой, *диаграммой растяжения*.

Процесс *нагружения* протекает при постепенном возрастании осевой силы, растягивающей образец. До некоторой величины σ_e — *предела упругости* материал находится в упругом состоянии, а зависимость напряжения σ от деформации ϵ представляется прямой; после этого предела материал переходит в пластическое состояние, а та же зависимость изображается пологой кривой. Переход от одного состояния к другому, как это видно для мягкой стали на рис. 1 и 2, может быть постепенным или начаться с острого пика.

В начале пластического состояния напряжение обычно сохраняет постоянную величину σ_s — *предел текучести* и образует на кривой горизонтальный участок — *площадку текучести*; затем напряжение вновь монотонно возрастает до некоторой величины σ_0 — *предела прочности*, после чего происходит разрыв.

Иногда площадка текучести отсутствует вовсе, а зависимость σ от ϵ с начала нагружения, как это показано для отоженной меди на рис. 3, дается гладкой кривой.

Отношение поперечного сужения к продольному удлинению образца в пределах упругости постоянно, называется коэффициентом С. Пуассона и обозначается через ν . Объемная деформация,

определяющая относительное изменение плотности, может быть представлена в виде $(1-2\nu)\epsilon$.

То же отношение поперечного сужения к продольному удлинению образца за пределом упругости переменнo, но по мере роста

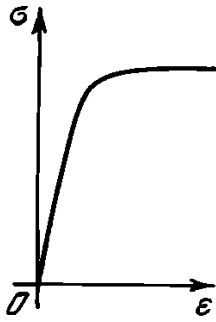


Рис. 1



Рис. 2

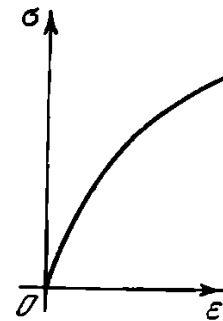


Рис. 3

деформации приближается к своему предельному значению $1/2$, так как даже при довольно больших пластических деформациях обычные опыты обнаруживают только весьма малое относительное изменение плотности.

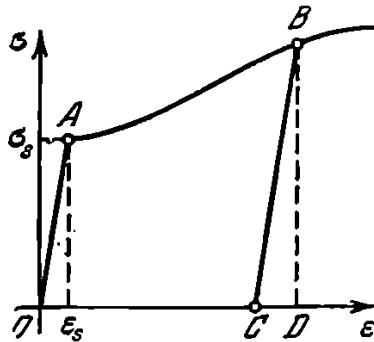


Рис. 4

Зависимость между истинным напряжением σ и деформацией ϵ , полученная экспериментальным путем, может быть представлена схематически в виде диаграммы растяжения, показанной на рис. 4.

Сначала при $\epsilon \leq \epsilon_s$, согласно закону Р. Гука, напряжение пропорционально деформации

$$\sigma = E\epsilon$$

и изображается на диаграмме растяжения отрезком прямой OA с угловым коэффициентом E — модулем упругости; далее при $\epsilon \geq \epsilon_s$ напряжение выражается некоторой функцией от деформации

$$\sigma = \sigma(\epsilon)$$

и представляется на той же диаграмме в виде кривой AB с угловым коэффициентом $d\sigma/d\epsilon$, во много раз меньшим, чем E .

Зависимость между σ и ϵ за пределом упругости часто может быть выражена, исключая малый интервал резкого изменения $d\sigma/d\epsilon$, линейной функцией

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s),$$

а кривая на диаграмме растяжения заменена наклонной прямой с угловым коэффициентом E_1 — модулем упрочнения. Последний обычно во много раз меньше модуля упругости E . За предел текуче-

сти при этом принимается напряжение, соответствующее точке пересечения двух прямых.

Нелинейная, с начала нагружения, зависимость между σ и ϵ , изображаемая на диаграмме растяжения в виде гладкой, монотонно возрастающей кривой, обычно может быть с достаточной степенью точности аппроксимирована степенной функцией

$$\sigma = k\epsilon^n,$$

содержащей две постоянные k и n .

Деформацию ϵ можно считать состоящей из двух частей — упругой (отмеченной буквой e) и пластической (отмеченной буквой p) и представлять ее в виде суммы

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p.$$

Упругая деформация определяется соотношением

$$\epsilon_e = \frac{1}{E} \sigma,$$

а пластическая находится как разность

$$\epsilon_p = \epsilon - \frac{1}{E} \sigma.$$

Процесс *разгрузки* протекает при постепенном уменьшении осевой силы, растягивающей образец. Он определяется законом Р. Гука, в котором деформация отсчитывается от нового состояния

$$\sigma = E\epsilon_e = E(\epsilon - \epsilon_p).$$

Остаточная деформация ϵ_r в образце при полном снятии осевой силы равна пластической деформации

$$\epsilon_r = \epsilon_p,$$

тогда как упругая деформация нередко может быть отброшена.

Зависимость между σ и ϵ в течение всего процесса линейна

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p),$$

а на диаграмме растяжения изображается прямой BC с угловым коэффициентом E .

Эти простейшие свойства материалов, наблюдаемые при простом растяжении, могут быть перенесены и на сложное напряженное состояние тел, возникающее под действием произвольных нагрузок.

Глава I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. Тензор и девиатор напряжения

Напряженное состояние в какой-нибудь точке P в прямолинейных прямоугольных координатах x , y и z может быть определено симметричным тензором напряжения, в котором σ_x , σ_y и σ_z — нормальные, а $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ касательные компоненты напряжения.

Хотя такая форма записи и уместна для решения конкретных задач, но для обсуждения общих соотношений теории напряжений более удобна другая форма записи, в которой координаты обозначены через x_1 , x_2 и x_3 , а общая координата — через x_i .

Аналогичным образом, нормальные компоненты напряжения обозначены через σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} , а касательные компоненты — через σ_{23} , σ_{31} и σ_{12} . Общая компонента тензора напряжения обозначена через $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, а отдельная компонента получается путем замены индексов i и j на значения 1, 2 и 3. Напряжение в точке P , в целях краткости, может быть задано при помощи σ_{ij} .

Далее будет применяться правило сокращенной записи, которое приводит к существенным упрощениям. Согласно этому правилу повторение одного индекса в каком-нибудь члене указывает на то, что по этому индексу должно быть проведено суммирование для значений 1, 2 и 3. Аналогичным образом, повторение двух индексов обозначает, что суммирование должно быть проведено по этим двум индексам для тех же значений 1, 2 и 3. Неповторяющиеся индексы называются *свободными*, а повторяющиеся индексы — *подставными*. Очевидно, что подставной индекс может быть заменен любым другим, который, конечно, не встречается в рассматриваемом члене. Свободный индекс также принимает значения 1, 2 и 3.

Компоненты тензоров σ_{ij} и σ'_{ij} для двух произвольных ортогональных систем осей координат x_i и x'_i связаны уравнениями

$$\sigma'_{kl} = n_{ik}n_{jl}\sigma_{ij},$$

в которых n_{ij} — направляющие косинусы углов между осями x_i

и осями x'_j . Они удовлетворяют хорошо известным соотношениям

$$n_{ik}n_{jk} = \delta_{ij},$$

содержащим *дельта-символ*:

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i = j), \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Справедливы также и следующие соотношения:

$$\delta'_{kl} = n_{ik}n_{jl}\delta_{ij} = n_{ik}n_{il} = \delta_{kl}.$$

Компоненты по осям координат x_i вектора напряжения, действующего на площадке с нормалью n , определяются известными формулами

$$p_{ni} = n_k \sigma_{ki},$$

в которых n_i — направляющие косинусы нормали n по отношению к осям x_i .

Нормальная компонента того же вектора напряжения выражается так:

$$\sigma_n = n_i n_j \sigma_{ij},$$

а касательная компонента дается в следующем виде:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = p_{ni} p_{ni}.$$

Важную роль в теории напряжений играют *инварианты*, т. е. выражения, составленные из компонент тензора напряжения σ_{ij} и остающиеся неизменными при поворотах осей координат.

Существует три основных независимых инварианта тензора напряжения. *Линейный* инвариант есть сумма нормальных компонент напряжения

$$A_1 = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

квадратичный инвариант выражается следующим образом:

$$A_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}\sigma_{ji} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) = - (\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)$$

и, наконец, *кубический* инвариант будет

$$A_3 = \frac{1}{6} (2\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - 3\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{kk} + \sigma_{ii}\sigma_{jj}\sigma_{kk}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Таким образом, основные инварианты представляют собой целые рациональные и притом симметричные функции от компонент σ_{ij} .

Главные нормальные компоненты тензора напряжения σ_i определяются из характеристического кубического уравнения

$$\sigma_i^3 = A_1\sigma_i^2 + A_2\sigma_i + A_3, \quad (1.01)$$

коэффициентами которого служат основные инварианты тензора напряжения. Можно установить, что это уравнение имеет три действительных корня.

Значения направляющих косинусов главных осей определяются системой уравнений

$$(\sigma_{kl} - \sigma_i \delta_{kl}) n_k = 0 \quad (1.02)$$

и соотношением

$$n_k n_k = 1.$$

Нетрудно видеть, что однородные симметричные функции

$$\begin{aligned} I_1 = \sigma_{ii} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ 2I_2 = \sigma_{ij} \sigma_{ji} &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \\ 3I_3 = \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} &= \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3 \end{aligned}$$

также являются инвариантами тензора напряжения. Они представляют собой некоторые комбинации инвариантов A_1 , A_2 и A_3 , а именно:

$$I_1 = A_1, \quad I_2 = A_2 + \frac{1}{2} A_1^2, \quad I_3 = A_3 + A_1 A_2 + \frac{1}{3} A_1^3.$$

Тензор напряжения удобно представлять в виде суммы девиатора напряжения и шарового тензора, так что

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk}.$$

Общая компонента девиатора напряжения обозначена через $s_{ij} = s_{ji}$, а отдельная компонента следует из нее путем замены индексов i и j на значения 1, 2 и 3. Напряжение в точке P может быть задано при помощи s_{ij} и σ .

Очевидно, что нормальные компоненты ($i = j$) тензора и девиатора напряжений отличаются на среднее нормальное напряжение, так что

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma,$$

а касательные компоненты ($i \neq j$) совпадают

$$s_{ij} = \sigma_{ij}.$$

Основные инварианты девиатора напряжения могут быть составлены по аналогии с инвариантами тензора напряжения. *Линейный* инвариант равен нулю

$$B_1 = s_{ii} = s_1 + s_2 + s_3 = 0;$$

квадратичный инвариант имеет следующий вид:

$$B_2 = \frac{1}{2} (s_{ij} s_{ji} - s_{ii} s_{jj}) = -(s_2 s_3 + s_3 s_1 + s_1 s_2)$$

и, наконец, *кубический* инвариант будет

$$B_3 = \frac{1}{6} (2s_{ij} s_{jk} s_{ki} - 3s_{ij} s_{ji} s_{kk} + s_{ii} s_{jj} s_{kk}) = s_1 s_2 s_3.$$

Итак, основные инварианты являются целыми рациональными и симметричными функциями от компонент s_{ij} .

Главные нормальные компоненты девиатора напряжения s_i находятся из характеристического кубического уравнения

$$s_i^3 = B_2 s_i + B_3,$$

представленного в нормальной форме. Коэффициенты этого кубического уравнения суть основные инварианты девиатора напряжения.

Значения направляющих косинусов главных осей даются системой уравнений

$$(s_{kl} - s_i \delta_{kl}) n_k = 0$$

и соотношением

$$n_k n_k = 1,$$

так что главные оси девиатора и тензора совпадают.

Легко видеть, что однородные симметричные функции

$$2J_2 = s_{ij} s_{ji} = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad 3J_3 = s_{ij} s_{jk} s_{ki} = s_1^3 + s_2^3 + s_3^3,$$

также служат инвариантами девиатора напряжения.

Они совпадают с инвариантами B_2 и B_3 , так что

$$J_2 = B_2, \quad J_3 = B_3.$$

В дальнейшем будет широко применяться среднее нормальное напряжение σ и так называемая *интенсивность девиатора напряжения* τ , определение которой должно быть дано.

Среднее нормальное напряжение σ выражается через первый инвариант I_1 тензора напряжения следующим образом:

$$3\sigma = \sigma_{ii} = I_1, \quad (1.03)$$

а интенсивность девиатора напряжения τ — через второй инвариант J_2 девиатора напряжения так:

$$\tau^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = J_2. \quad (1.04)$$

Компоненты напряжения σ_{ij} могут быть выражены через три главных компоненты напряжения σ_i по известным формулам преобразования

$$\sigma_{ij} = n_{i1} n_{j1} \sigma_1 + n_{i2} n_{j2} \sigma_2 + n_{i3} n_{j3} \sigma_3 \quad (1.05)$$

Через n_{ij} обозначены направляющие косинусы углов между осями x_i и главными осями j . Они связаны между собой такими равенствами

$$n_{ik} n_{jh} = \delta_{ij}$$

Формулы преобразования остаются в силе, если заменить компоненты напряжения σ_{ij} на s_{ij} , а главные нормальные напряжения σ_i на s_i , так что

$$s_{ij} = n_{i1}n_{j1}s_1 + n_{i2}n_{j2}s_2 + n_{i3}n_{j3}s_3. \quad (1.06)$$

Действительно, подставляя в формулу (1.05) компоненты

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij} \quad \text{и} \quad \sigma_i = s_i + \sigma,$$

без всякого труда получим

$$s_{ij} + \sigma\delta_{ij} = n_{i1}n_{j1}(s_1 + \sigma) + n_{i2}n_{j2}(s_2 + \sigma) + n_{i3}n_{j3}(s_3 + \sigma),$$

откуда сразу же следует формула (1.06).

Предыдущие уравнения были написаны для прямолинейных прямоугольных координат x_i . Однако они остаются справедливыми и для любых криволинейных ортогональных координат, которые также могут быть обозначены через x_i .

Компоненты напряжения в статике сплошных сред должны удовлетворять трем линейным дифференциальным уравнениям равновесия, которые при отсутствии объемных сил однородны. Именно в таком виде они и будут применяться в дальнейшем.

В прямолинейной прямоугольной системе координат x_i дифференциальные уравнения равновесия могут быть выражены в виде

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (1.07)$$

а в обычной форме записи в той же прямолинейной прямоугольной системе координат xyz дифференциальные уравнения равновесия будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.08)$$

Обратим внимание, что дифференциальные уравнения равновесия (1.07) и (1.08) выражены в компонентах тензора напряжения. Однако они могут быть представлены также в компонентах девятора напряжения, если подставить

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}.$$

Это относится и к дифференциальным уравнениям равновесия, которые встречаются далее.

При обсуждении основных положений теории напряжений и при выводе основных уравнений естественно применять прямолинейные прямоугольные координаты. Однако при решении отдельных задач