

Н. И. Лобачевский

**Способ уверяться в
изчезании бесконечных строк
и приближаться к значению
функций от весьма больших
чисел**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. И. Лобачевский**
Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел / Н. И. Лобачевский – М.: Книга по Требованию, 2021. – 134 с.

ISBN 978-5-458-56973-6

ISBN 978-5-458-56973-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

оставалось справедливо для произвольнаго m и какъ бы ε ни было мало; по

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G r. a_m = g_a$$

Между тѣмъ полагая

$$a_m = \log. m$$

находимъ

$$v. n. (a_{r+m} - a_r) = \log. (1 + \frac{m}{r})$$

Здѣсь можемъ взять r такъ велико, чтобы $\log. (1 + \frac{m}{r})$ для всякаго m былъ уже меньше какого нибудь даннаго числа ε , тогда какъ $\log. m = \infty$ для $m = \infty$.

Кажется надобно дать преимущество тому способу, коимъ я придумалъ и примѣнилъ къ двумъ случаямъ (Алгебра или вычисленіе конечныхъ 1834 года; стр. 337. О тригонометрическихъ спирокахъ, въ Ученыхъ Запискахъ Казанскаго Университета за 1834 годъ), и коимъ не только подаетъ средство судить объ исчезаніи бесконечной спироки, но вмѣстѣ назначаетъ самыя границы приближенія. Здѣсь намѣренъ я говорить объ этомъ способѣ гораздо пространнѣе.

Пусть $f(i)$ положительное число представляеть какую нибудь функцію цѣлаго i , а вмѣстѣ всякой членъ въ безконечной строку

$$S = \sum_1^{\infty} f(i) \quad (1)$$

которая происходитъ, когда складываемъ значенія $f(i)$, ставя на мѣсто i по порядку числа 1, 2, 3.. и т. д. до безконечности.

Функцію $f(i)$ можемъ снова предполагать значеніемъ безконечной строки

$$f(i) = \sum l 2^{a-l} \quad \begin{cases} l = 0 \\ l = \infty \end{cases} \quad (2)$$

которая происходитъ съ разложеніемъ по степенямъ отъ 2, такъ что здѣсь a постоянное для всѣхъ членовъ, l или нуль или цѣлое положительное число, $l=1$ для $l=0$, пошомъ или $l=0$, или $l=1$ для всякаго другаго l . Ставя такое значеніе (2) функціи $f(i)$ въ уравненіе (1), должны получить

$$S = \sum L 2^{a-l} \quad \begin{cases} l = 0 \\ l = \infty \end{cases}$$

съ цѣлыми положительными числами L . Пусть теперь μ такое цѣлое, для котораго

$$f(\mu) \geq 2^{\alpha-\lambda} \qquad f(\mu+1) \leq 2^{\alpha-\lambda} \qquad (3)$$

Послѣ чего $L \leq \mu$, а слѣдовательно

$$S < \Sigma \mu 2^{\alpha-\lambda} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases} \qquad (4)$$

Условіа (3) служатъ къ опредѣленію границы, за которую μ не переходитъ, и которая будучи поставлена въ уравненіе (4), назначаетъ вмѣстѣ границу для значенія самой строки, по крайней мѣрѣ всякой разъ, когда въ этомъ видѣ суммованіе возможно. Такого рода способъ яснѣе будетъ виденъ на примѣрахъ.

Пусть

$$f(i) = \frac{1}{i^2}$$

съ постояннымъ числомъ n для всѣхъ членовъ въ строкахъ. Надобно теперь полагать

$$\mu^n < 2^{\lambda-\alpha}$$

и слѣдовательно

$$\mu < 2^{\frac{\lambda - \alpha}{n}}$$

Основываясь далѣе на неравенствѣ (4), получимъ

$$S < \Sigma 2^{(1 - \frac{1}{n})} (\alpha - \lambda) \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

Откуда для $n > 1$

$$S < \frac{2^{\alpha - \frac{1}{n}\alpha}}{1 - 2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

такъ что въ этомъ случаѣ безконечная строка

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$$

изчезаетъ всегда, какъ бы разность $n - 1$ ни была мала.

Пусть еще

$$f(i) = \frac{1}{i^n (i^n - p)}$$

съ постоянными положительными числами n, p . Надобно полагать

$$\mu^{2n} - p \mu^n = 2^{\lambda-a} - \delta$$

гдѣ $\delta \approx 0$. Находимъ

$$(\mu^n - \frac{1}{2}p)^2 = (2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} + \frac{1}{2}p)^2 - p 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} - \delta$$

и слѣдовательно

$$\mu^n < p + 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}$$

Если λ число такъ большое, что

$$p 2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)} < 1$$

то для $n \geq 1$

$$1 + p 2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)} \leq 1 + p^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{2n}(a-\lambda)}$$

имѣетъ сильнѣе

$$1 + p 2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)} < \{ 1 + p^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{2n}(a-\lambda)} \}^n$$

Послѣ чего

$$\mu < p^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{1}{2n}}(\lambda - a)$$

а ставя такую границу значений μ въ неравенство (4), получимъ

$$S < \Sigma p^{\frac{1}{n}} 2^{a-\lambda} + \Sigma 2^{(1-\frac{1}{2n})(a-\lambda)} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

И такъ для $n \geq 1$

$$S < p^{\frac{1}{n}} 2^{a+1} + \frac{2^{a-\frac{1}{n}a}}{1 - 2^{\frac{1}{2n}-1}}$$

Еслижъ $n < 1$, однакожъ $> \frac{1}{2}$, то предполагая снова

$$p 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} < 1$$

пишемъ

$$\begin{aligned} \mu &< \{ p + 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} \} \{ p + 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} \}^{\frac{1}{n}-1} \\ &< \{ p + 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} \} \{ p^{\frac{1-n}{n}} + 2^{\frac{1-n}{2n}(\lambda-a)} \} \\ &< p^{\frac{1}{n}} + p^{\frac{1}{n}-1} 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} + p 2^{\frac{1-n}{2n}(\lambda-a)} + 2^{\frac{1}{2n}(\lambda-a)} \end{aligned}$$

Попомъ, смотря на неравенство (4),

$$\begin{aligned} S &< p^{\frac{1}{n}} \Sigma 2^{a-\lambda} + p^{\frac{1}{n}-1} \Sigma 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} \\ &+ p \Sigma 2^{\frac{1-n}{2n}(\lambda-a)} + \Sigma 2^{(1-\frac{1}{2n})(a-\lambda)} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Наконецъ отсюда

$$S < p^{\frac{1}{2}} 2^{a+1} + p^{\frac{1}{2}-1} 2^{\frac{1}{2}a} (2 + \sqrt{2}) \\ + \frac{p 2^{\frac{3n-1}{2n}} a}{1 - 2^{\frac{1-3n}{2n}}} - \frac{2^{(1-\frac{1}{2n})a}}{1 - 2^{\frac{1}{2n}-1}}$$

Итакъ безконечная строка

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n (i^n - p)}$$

исчезаетъ для всякаго $n > \frac{1}{2}$, какъ бы разность $2n - 1$ мала ни была.

Если нужно доказывать это послѣднее предположеніе, не заботясь о степени приближенія, то довольно замѣтить, что для

$$p < 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}$$

необходимо

$$\mu^n < 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)+1}$$

Откуда

$$\mu < 2^{\frac{\lambda-a+2}{2n}}$$

ПОПОМЪ

$$S < 2^{\frac{1}{n}} \sum 2^{(a-\lambda)(1-\frac{1}{n})} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

и слѣдовательно для $n > \frac{1}{2}$

$$S < \frac{2^{\frac{1}{n} + a(1-\frac{1}{n})}}{1 - 2^{\frac{1}{n} - 1}}$$

Обратимся къ самымъ основаніямъ нашего способа. Здѣсь изъ двухъ условій (5) довольно которагонибудь одного для назначенія границы числамъ μ , тогда какъ другое замѣняется неравенствомъ (4). Къ тому данная строка (1) необходимо предполагается уменьшеніе $f(i)$ съ возрастаніемъ i , слѣдовательно граница для μ можетъ только выходить изъ перваго условія (3), именно

$$f(\mu) > 2^{a-\lambda} \quad (5)$$

которое дозволяется впрочемъ соединять и со вторымъ

$$f(\mu + 1) < 2^{a-\lambda}$$

лишь бы въ этомъ соединеніи не уничтожался показатель λ , въ зависимости съ которымъ должна быть назначаема граница числамъ μ . Если $f(\mu)$ алгебраическая функція, то граница можетъ быть отыскана для μ , также какъ это дѣлается для положительныхъ корней въ уравненіи, по способу всѣмъ извѣстному.

Что касается до числа α , такъ его можемъ опредѣлять или неравенствомъ

$$f(r+1) < 2^\alpha$$

или лучше спрогимъ уравненіемъ

$$f(r) = 2^{\alpha+1} \quad (6)$$

разумѣя подъ r число, которое принадлежитъ первому изъ тѣхъ членовъ, откуда строка начинается и исчезаетъ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ

$$S < \sum_1^r f(i) + \Sigma(\mu - r) 2^{\alpha-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

Пусть примѣръ

$$f(i) = n_e^{\omega i} x^i.$$

гдѣ n , x произвольныя числа, и гдѣ

$$n_c^{\infty i} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad . \quad . \quad . \quad i}$$

по принятому мной означенію для членовъ въ стро-
кѣ, которая представляетъ степень отъ суммы
($1+x$) съ показателемъ n (Алгебра или вычисле-
ніе конечныхъ). Вообще буква c внизу, по примѣру
Г. Бартельса (*Vorlesungen über Math. Analys.*),
будетъ означать дѣленіе на произведеніе цѣлыхъ, отъ
единицы по порядку до того числа, какой вверху
показатель.

Теперь надобно полагать

$$n_c^{\infty \mu} x^{\mu} > 2^{\alpha - \lambda}$$

и первую часть этого неравенства принимать всегда
положительной. Если къ тому x положительное,
 $n+1 \geq 0$, μ такъ велико, что находимъ $r < \mu$, для
котораго

$$\frac{n-r}{r+1} \leq 1$$

то

$$n_c^{\infty \mu} x^{\mu} \leq n_c^{\infty r} x^{\mu}$$