

В. Я. Гебель

Начала алгебры и собрание задач

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В11 **В. Я. Гебель**
Начала алгебры и собрание задач / В. Я. Гебель – М.: Книга по Требованию, 2014. – 132 с.

ISBN 978-5-458-27766-2

Руководство предназначено для высших начальных и ремесленных училищ, торговых школ, вечерних и воскресных классов.

ISBN 978-5-458-27766-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

(какихъ все равно: верстъ, футовъ, метровъ и т. д.) Первый предметъ проходить въ каждую *единицу* времени (сутки, часъ, секунду) b , а второй c такихъ единицъ длины. Черезъ сколько единицъ времени они встрѣтятся? Рѣшеніе, очевидно, будетъ прежнее: черезъ $\frac{a}{b+c}$ единицъ времени.

II. Смѣшано 3 сорта чая: 2 фунта по 1,8 руб., 5 ф. по 2 р. и 6 ф. по 2,5 р. за фунтъ. Сколько стоитъ 1 фунтъ смѣси?

Отвѣтъ, какъ легко проверить, будетъ: $\frac{28,6}{13} = 2,2$ р.

Рѣшимъ эту задачу въ общемъ видѣ: Пусть чаю

1-го сорта будетъ a фунт. по m руб. за 1 фунтъ.

2-го " " b " " " " " " "

3-го " " c " " " " " " "

Стоимость всего чая 1-го сорта будетъ $a.m$ руб., 2-го сорта $b.n$ руб. и 3-го $c.p$ руб. Общая стоимость всего смѣшиваемого чая $= a.m + b.n + c.p$ руб. Раздѣливъ ее на число всѣхъ фунтовъ, т.-е. на $a + b + c$, получимъ искомую цѣну 1 фунта смѣси $= \frac{a.m + b.n + c.p}{a + b + c}$ руб. Подставивъ въ найденное выраженіе вмѣсто буквъ соотвѣтствующія имъ числа, найдемъ прежній отвѣтъ: $\frac{2.1,8 + 5.2 + 6.2,5}{2+5+6} = \frac{28,6}{13} = 2,2$ руб. Очевидно, что буквенное выраженіе представляетъ *общее рѣшеніе* всѣхъ такъ называемыхъ задачъ перваго рода на смѣшеніе.

III. Сколько рублей прибыли принесетъ капиталъ въ a рубл., отданный на t мѣсяцевъ по $p\%$ (годовыхъ)?

p рублей получаютъ со 100 р. за 12 мѣс.; съ 1-го рубля за то же время получимъ въ 100 разъ меньше, т.-е. $\frac{p}{100}$ руб., а съ a рубл. въ a разъ болѣе, т.-е. $\frac{p \cdot a}{100}$ руб. Прибыль за 1 мѣсяць будетъ въ 12 разъ меньше, т.-е. $\frac{p \cdot a}{100 \cdot 12}$, а за t мѣсяцевъ въ t разъ болѣе, т.-е. $\frac{p \cdot a \cdot t}{100 \cdot 12}$ рублей.

Найденное буквенное или *алгебраическое* выраженіе представляетъ *общее рѣшеніе* всѣхъ задачъ на нахожденіе прибыли или процентныхъ денегъ на данный капиталъ, находившійся въ обо-

рогѣ известное время. Полагая $a=3600$; $t=5$; $p=4$ и подставивъ эти числа вмѣсто буквъ, получимъ, что прибыль съ капитала 3600 р., отданнаго на 5 мѣс. по 4%, равна $\frac{5.3600.4}{100.12}=60$ р., что легко провѣрить непосредственнымъ разсужденіемъ.

Итакъ, алгебра имѣетъ цѣлью находить общія рѣшенія вопросовъ, относящихся къ числамъ, а также обобщать эти вопросы.

Кромѣ того, алгебра занимается тѣмъ, чтобы эти общія рѣшенія представлять въ наиболѣе простомъ и ясномъ видѣ, и потому учить, какъ преобразовывать одно буквенное выраженіе въ другое, тождественное съ нимъ, т.-е. въ такое, которое остается равнымъ первому при какихъ угодно числахъ ¹⁾.

§ 2. **Знаки.** Знаки дѣйствій въ алгебрѣ употребляются тѣ же, какъ и въ ариметикѣ, т.-е. $+$ (плюсъ) для сложенія, $-$ (минусъ) для вычитанія, точку $.$ для умноженія, которую, впрочемъ, почти всегда опускаютъ, и двѣ точки $:$ или горизонтальную черту для дѣленія. Такъ что

$a+b$	есть	сумма	двухъ	количествъ	a	и	b
$a-b$	"	разность	"	"	"	"	"
$a \cdot b$ или ab	"	произведение	"	"	"	"	"
$a : b$ " $\frac{a}{b}$	"	частное	"	"	"	"	"

Кромѣ того для обозначенія соотношеній между величинами употребляются: знакъ равенства $=$ и знакъ неравенства $>$, обращаемый отверстіемъ къ большей величинѣ, а остріемъ къ меньшей, напр., $a=b$ (a равно b); $m < n$ (m меньше n)

§ 3. **Коэффициентъ.** Произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей a, b, c, d , пишется такъ: $abcd$. Если, кромѣ буквенныхъ множителей, есть и численный (все равно, цѣлый или дробный), то онъ ставится обыкновенно впереди и называется *коэффициентомъ*. Такимъ образомъ,

произведеніе величинъ a, b, c, d , 4 пишутъ такъ: $4abcd$

" " " $m, n, \frac{3}{5}, p$ " " $\frac{3}{5}mnp$.

Числа 4 и $\frac{3}{5}$ суть коэффициенты. Очевидно, что $4abcd = abcd + abcd + abcd + abcd$ и точно такъ же $\frac{3}{5}mnp = \frac{mnp}{5} + \frac{mnp}{5} + \frac{mnp}{5}$.

¹⁾ Напр., $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b}$ и т. д.

Итакъ, коэффициентъ показываетъ, сколько разъ цѣлое алгебраическое выраженіе или извѣстная часть его берется *слагаемымъ*.

Если при алгебраическомъ выраженіи нѣтъ коэффициента, то должно подразумѣвать, что онъ $=1$, такъ какъ $a=1.a$; $bc=1.bc$ и такъ далѣе.

§ 4. Возвышеніе въ степень. Кромѣ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія количествъ въ алгебрѣ изучаются еще нѣкоторыя другія дѣйствія, изъ которыхъ мы рассмотримъ теперь два: возвышеніе количествъ въ степень и извлеченіе изъ нихъ корня.

Возвышеніе или возведеніе количества въ степень есть дѣйствіе, посредствомъ котораго данное количество повторяется множителемъ нѣсколько разъ. *Степенью* называется произведеніе одинаковыхъ множителей, а число, показывающее, сколько разъ количество берется *множителемъ*, называется *показателемъ* степени.

Такимъ образомъ $aa=a^2$ есть возвышеніе во 2-ю степень,

$$\begin{array}{ccccccc} aaa=a^3 & \text{н} & \text{н} & \text{н} & 3\text{-ю} & \text{н} \\ aaaa=a^4 & \text{н} & \text{н} & \text{н} & 4\text{-ю} & \text{н} \end{array}$$

Точно такъ же $3.3=3^2=9$; $3.3.3=3^3=27$; $3.3.3.3=3^4=81$; $2^5=32$; $10^3=1000$ и т. д.

Возвышеніе во 2-ю степень называется также возвышеніемъ *въ квадратъ*, а въ 3-ю степень — возвышеніемъ *въ кубъ*. Эти названія заимствованы изъ геометріи, такъ какъ возвышеніе во 2-ю степень числа, выражающаго длину стороны квадрата, даетъ числовую величину площади этого квадрата, а возвышеніе въ 3-ю степень числа, выражающаго длину ребра куба, даетъ числовую величину объема этого куба. Если при количествѣ не стоитъ показателя, то оно называется количествомъ 1-й степени, такъ какъ $a=a^1$; $bc=b^1c^1$; $3=3^1$ и т. д.

При возвышеніи въ степень дроби, очевидно, слѣдуетъ возвысить въ степень отдѣльно ея числителя и знаменателя.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \text{ и т. д.}$$

§ 5. Извлеченіе корня. Извлеченіе корня есть дѣйствіе, въ которомъ по данной степени какого-либо количества находится это количество. Знакъ корня изображается $\sqrt{\quad}$. Подъ верхней чертой его пишется такъ называемое *подкоренное количество*, т.-е. данная степень искомаго количества, а надъ нимъ число, назы-

ваемое *показателемъ корня*, означающее, *какая степень* величины дана.

$\sqrt[2]{49}$ или $\sqrt{49}$ (показатель 2 обыкновенно не пишется) есть корень 2-й степени изъ 49. Подкоренное количество 49 есть 2-я степень (квадратъ) искомага числа. Найти это число и значить извлечь корень 2-й степени изъ 49. Искомое число, очевидно, есть 7, такъ какъ $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$.

$\sqrt[3]{64}$ есть корень 3-й степени изъ 64. Извлечь его, значить найти число, 3-я степень (кубъ) котораго равняется 64 (или иначе, которое, будучи повторено множителемъ 3 раза, дастъ 64). Искомое число = 4, такъ какъ $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$.

Извлечь $\sqrt[4]{81}$, значить найти число, 4-я степень котораго = 81, или, которое, будучи повторено множителемъ 4 раза, дастъ 81. Искомое число = 3, такъ какъ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Такимъ образомъ, корень даннаго количества есть число, которое, будучи повторено множителемъ извѣстное число разъ, равняется данному количеству.

Корень 2-й степени называется обыкновенно *квадратнымъ* корнемъ, а корень 3-й степени — *кубическимъ* корнемъ.

Итакъ: $\sqrt{49} = 7$, т.-е. квадратный корень изъ 49 равенъ 7.

$\sqrt[3]{64} = 4$ „ кубический „ „ 64 „ 4.

$\sqrt[4]{81} = 3$ „ корень 4-й степени „ 81 „ 3 и т.д.

Изъ ариметики извѣстно, что сложение и умножение представляютъ *прямые* дѣйствія, которымъ соотвѣтствуютъ *обратные* дѣйствія: вычитание и дѣленіе. Точно такъ же возвышеніе числа въ степень есть прямое дѣйствіе, а извлеченіе корня представляетъ обратное ему дѣйствіе. Въ самомъ дѣлѣ, при возвышеніи въ степень дается *первая* степень количества и требуется опредѣлить его 2-ю, 3-ю, 4-ю и т. д. степень, а при извлеченіи корня, наоборотъ, дается 2-я, 3-я, 4-я и т. д. степень количества и требуется опредѣлить его *первую* степень.

При извлеченіи корней изъ дробей слѣдуетъ извлекать корень отдѣльно изъ числителя и изъ знаменателя:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}, \text{ такъ какъ } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5},$$

$$\text{такъ какъ } \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125} \text{ и т. д.}$$

Примѣчаніе. Для практики полезно запомнить квадраты и кубы небольшихъ чиселъ. (См. приложение).

§ 6. **Одночлены и многочлены.** Алгебраическимъ выраженіемъ или *формулой*, какъ мы уже видѣли, называется соединеніе буквъ и чиселъ помощью знаковъ. Алгебраическія выраженія раздѣляются на *одночлены* и *многочлены*.

Одночленъ есть алгебраическое выраженіе, не содержащее знаковъ $+$ или $-$. Напр.,

$$a, 3a^2b^4, 0,7abc^3, \frac{5}{11}a\sqrt[3]{m^2n} \text{ — суть одночлены.}$$

Многочленъ есть соединеніе нѣсколькихъ одночленовъ знаками $+$ и $-$. Одночлены, входящіе въ составъ многочлена, называются *членами* его. Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, называется *двучленомъ*, изъ трехъ членовъ — *трехчленомъ* и т. д.

Напр., $a + b$, $3m^2 - \frac{1}{2}ab$ суть двучлены; $a + b + c$,

$5m^2 - 0,2n^2 + \sqrt[3]{a}$ — трехчлены; $2a + b - 3c + b$ — четырехчленъ и т. д.

§ 7. **Измѣреніе многочлена и одночлена.** Сумма показателей всѣхъ буквъ цѣлаго одночлена называется *измѣреніемъ* его. Такимъ образомъ a , $3m$ — суть одночлены *перваго* измѣренія; $5a^2$, bc — *второго* измѣренія; $3ab^4$, $0,8cd^2m^2$ — *пятого* измѣренія и т. д.

Многочленъ, всѣ члены котораго одного измѣренія, называется *однороднымъ*. Измѣреніе каждаго изъ его членовъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и измѣреніе всего многочлена. Напр., выраженіе $a^3 - 3m^2b + 5cd^2 + 2abc$ есть однородный многочленъ 3-го измѣренія.

§ 8. **Выраженія цѣлыя, дробныя, раціональныя, ирраціональныя.** Алгебраическое выраженія, въ которое не входятъ буквенные дѣлители, называется *цѣлымъ*, въ противномъ случаѣ *дробнымъ* или *алгебраической дробью*. Напр., $7a^2b$, $m^2 + \frac{2}{3}bc$ — выраженія *цѣлыя*; $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{m+n}{m-n}$ — выраженія *дробныя*.

Выраженія, не содержащія корней, назыв. *раціональными*, а содержащія ихъ *ирраціональными* или *радикальными*. Напр., всѣ только что написанныя цѣлыя и дробныя выраженія вмѣстѣ съ тѣмъ и *раціональныя*.

$\sqrt{a}$, $3\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt{mn}$ — выраженія *ирраціональныя* или *радикальныя*.

§ 9. **Скобки.** Когда хотятъ показать, что слѣдуетъ произвести извѣстное дѣйствіе надъ двучленомъ, трехчленомъ и вообще

многочленомъ, то ихъ заключаютъ въ скобки. Скобки бываютъ трехъ родовъ: $(\quad)$ простыя, $[\quad]$ квадратныя и $\{\quad\}$ фигурныя. Чтобы уяснить значеніе скобокъ, сравнимъ нѣсколько буквенныхъ выраженій.

I. $(a-b)c$; $a-bc$ Въ первомъ случаѣ разность $a-b$ умножается на c , а во второмъ изъ a вычитается произведеніе bc .

II. $[(3a^2+7b)c-2m]:d$; $3a^2+7bc-2m:d$.

Въ первомъ случаѣ: 1) сумма $3a^2+7b$ множится на c ; 2) изъ этого произведенія вычитается $2m$ и 3) полученная разность дѣлится на d . Во второмъ случаѣ: изъ суммы $3a^2+7bc$ вычитается частное отъ дѣленія $2m$ на d .

III. $(a+b)(a-b)+(m+n)^2$; $a+ba-b+m+n^2$.

Въ 1-мъ случаѣ сумма двухъ количествъ a и b множится на ихъ разность и къ произведенію прибавляется пятая степень суммы количествъ m и n . Во второмъ случаѣ изъ суммы $a+ba$ вычитается b и къ полученной разности прибавляется количество m и пятая степень количества n .

Скобки не ставятся, когда порядокъ дѣйствій ясенъ самъ по себѣ. При этомъ необходимо замѣтить, что если алгебраическое выраженіе *не имѣетъ скобокъ*, то порядокъ дѣйствій при вычисленіи долженъ быть слѣдующій: *сперва производятъ возвышеніе въ степень и извлеченіе корня, затѣмъ умноженіе и дѣленіе и наконецъ сложеніе и вычитаніе.*

Напр., въ выраженіи $ab^3+c:d$ надо сперва количество b возвысить въ кубъ и затѣмъ умножить на a , потомъ полученное произведеніе сложить съ частнымъ отъ дѣленія c на d .

Точно такъ же въ выраженіи $m:\sqrt{n-ac^5}$ надо сперва m раздѣлить на квадратный корень изъ n и изъ частнаго вычесть произведеніе a на пятую степень c .

Горизонтальная черта при дѣленіи и извлеченіи корня замѣняетъ собою скобки. Напр., $(a^2+mn):(c-2d)$ пишутъ часто въ такомъ видѣ: $\frac{a^2+mn}{c-2d}$. Корень, напр., квадратный изъ a^2b+3c^4 рѣдко пишутъ въ видѣ $\sqrt{a^2b+3c^4}$, но почти всегда $\sqrt{a^2b+3c^4}$.

При возвышеніи въ степень одночлена, состоящаго болѣе, чѣмъ изъ 1-й буквы, слѣдуетъ также заключать его въ скобки.

Выраженія $(3a)^2, (ab)^3, \left(\frac{5}{7}\right)^4$, очевидно, различны отъ выраженій

$$3a^2, ab^3, \frac{5^4}{7}.$$

1) Объясните эти различія

Многочленъ, заключенный въ скобки, а также многочленъ, представляющій подкоренное количество ¹⁾, составляетъ какъ бы одно цѣлое и потому принимается за одночленъ. Напр., выраженія $(a+b-c)^3$, $\sqrt{m^2+n^3}$ и т. п. считаются одночленами.

§ 10. Численная величина. Численной величиной алгебраическаго выраженія называется число, которое получится, если вмѣсто буквъ подставимъ соотвѣтствующія имъ числа и произведемъ дѣйствія, указанные знаками. Такъ въ § 1 мы нашли числовыя значенія для выраженій: $\frac{a}{b+c}=4$ (при $a=240$; $b=25$; $c=35$); $\frac{pat}{100.12}=60$ (при $p=4$; $a=3600$; $t=5$) и т. д.

Найдемъ еще для примѣра численныя величины двухъ выраженій

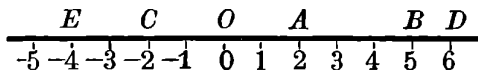
$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & \frac{3m \sqrt{a^2+b^3}}{4 \sqrt{m^2+b+\frac{1}{3}}}, \text{ при } a=1; b=2; m=\frac{2}{3}. \\ & \frac{3m \sqrt{a^2+b^3}}{4 \sqrt{m^2+b+\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{1^2+2^3}}{4 \sqrt{(\frac{2}{3})^2+2+\frac{1}{3}}} = \frac{2 \sqrt{1+8}}{4 \sqrt{\frac{4}{9}+2\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{9}}{2 \sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{3}{2 \cdot \frac{5}{3}} = 0,9. \\ 2^\circ. \quad & m:\sqrt{n}-ac^5 \text{ при } m=200; n=4; a=3; c=2. \\ & 200:\sqrt{4}-3.2^5=200:2-3.32=100-96=4. \end{aligned}$$

Отрицательныя числа.

§ 11. Для опредѣленія какой-либо величины необходимо прежде всего измѣрить ее, т. е. сравнить съ другой однородной съ нею величиной, принятой за единицу мѣры. Въ результатъ такого сравненія или измѣренія получается *арифметическое число* цѣлое или дробное, представляющее *размѣръ* данной величины.

Существуетъ, однако, много различныхъ величинъ, для опредѣленія которыхъ арифметическое число является *недостаточнымъ*.

Такъ, если возьмемъ нѣкоторую прямую линію и на ней опредѣленную точку O , то арифметическія числа, выражающія разстоянія другихъ точекъ $A, B, C, D, E, \dots$ лежащихъ на этой прямой, отъ точки O будутъ *недостаточны* для опредѣленія положенія этихъ точекъ.



¹⁾ Такъ какъ черта надъ знакомъ корня замѣняетъ скобки.

Дѣйствительно, такъ какъ разстоянія отъ точки O могутъ отсчитываться въ *двухъ противоположныхъ направленіяхъ*, а именно влѣво и вправо, то для опредѣленія положенія какой-нибудь точки A недостаточно сказать, что разстояніе ея отъ точки O равно, напр., 2 дюймамъ, но необходимо еще прибавить *вправо*, т.-е. указать ея направленіе. Точка C тоже находится на разстояніи 2 дюймовъ отъ точки O , но *влѣво*. То же самое можно сказать относительно положенія другихъ точекъ B , E , D ...

Итакъ, для опредѣленія положенія точекъ на прямой относительно выбранной постоянной точки O , необходимо знать не только *размѣры* ихъ разстояній отъ этой точки, но и *направленія* этихъ разстояній. Одно направленіе (напр., вправо) принято считать *положительнымъ*, а другое ему противоположное (напр., влѣво) — *отрицательнымъ*. Точно такъ же и числа, выражающія разстоянія по одному направленію, называются *положительными* и обозначаются знаком $+$, а числа, выражающія разстоянія по противоположному направленію, называются *отрицательными* и обозначаются знаком $-$.

Такимъ образомъ разстояніе OA обозначается черезъ $+2$, а разстояніе OC черезъ -2 ; разстояніе OB обозначается черезъ $+5$, а разстояніе OE черезъ -4 и т. д.

Существуетъ очень много величинъ, которыя, подобно указаннымъ въ предыдущемъ примѣрѣ, могутъ принимать *два* значенія, противоположныя по *смыслу* или по *направленію*. Напримѣръ: прибыль и убытокъ, имущество и долгъ, выигрышъ и проигрышъ. Величину времени, считая его отъ извѣстнаго даннаго момента, можно понимать въ двухъ противоположныхъ значеніяхъ или направленіяхъ (будущее и прошедшее время). Точно такъ же путь движенія можно отсчитывать отъ даннаго мѣста въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ (впередъ и назадъ, вправо и влѣво, вверхъ и внизъ). Градусы термометра выше нуля (называемаго *точкой замерзанія воды*) называются градусами *тепла*, а ниже нуля — градусами *холода*.

Одни значенія этихъ величинъ принято называть *положительными* (прибыль, имущество, выигрышъ, будущее время, направленіе движенія впередъ, вправо, вверхъ, градусы тепла), а противоположныя имъ значенія — *отрицательными* (убытокъ, долгъ, проигрышъ, прошедшее время, направленіе назадъ, влѣво, внизъ, градусы холода).

Первыя величины обозначаются положительными числами, а вторыя отрицательными.

§ 12. Необходимость введенія отрицательныхъ чиселъ и правилъ дѣйствій надъ ними заставила расширить понятіе числа, вслѣдствіе чего было введено понятіе объ **алгебраическомъ числѣ или количествѣ**, которое показывало бы не только *размѣръ* (какъ ариѳметическое число), но и *направленіе* величины. *Алгебраическое число или количество* можетъ быть какъ *положительнымъ*, при чемъ передъ нимъ ставятъ или подразумеваютъ знакъ $+$ (плюсъ), такъ и *отрицательнымъ*, при чемъ передъ нимъ всегда ставятъ знакъ $-$ (минусъ) ¹⁾.

Границей, отдѣляющей положительные числа отъ отрицательныхъ, служитъ *нуль*, который не имѣетъ никакого знака.

Совершенно очевидно, что *два равныя* величины, изъ которыхъ одна *положительная*, а другая *отрицательная*, *взаимно уничтожаются*. Напр., 10 руб. имущества и 10 руб. долга, $(+10$ и $-10)$, 5 шаговъ впередъ и 5 шаговъ назадъ $(+5$ и $-5)$ и т. п. взаимно уничтожаются.

§ 13. Введеніе понятія объ отрицательныхъ числахъ составляетъ существенное отличіе и преимущество алгебры сравнительно съ ариѳметикой. При помощи этого понятія значительно обобщаются, какъ рѣшенія вопросовъ, такъ и самые вопросы. Рѣшимъ для примѣра двѣ задачи.

1. Нѣкоторый товаръ былъ купленъ за b рублей, а проданъ за a рублей. Какъ велика полученная прибыль? Отвѣтъ будетъ $a - b$ рублей, независимо отъ того, каковы численныя величины a и b . Разсмотримъ 3 возможные здѣсь случая:

1) $a > b$; 2) $a = b$; 3) $a < b$.

Если $a > b$, напр., $a = 15$ р.; $b = 12$ р.; прибыль $= a - b = 15 - 12 = 3$ р. (прибыль *положительная*);

если $a = b$, напр., $a = 15$ р., $b = 15$ р., прибыль $= a - b = 15 - 15 = 0$ р. (прибыль *нулевая*, т.-е. нѣтъ прибыли);

если $a < b$, напр., $a = 15$ р., $b = 19$ р., прибыль $= a - b = 15 - 19$.

Третій случай представляетъ невозможную въ ариѳметикѣ задачу, такъ какъ изъ меньшаго числа (15) приходится вычитать большее (19). Однако совершенно ясно, что въ этомъ случаѣ получится не прибыль, а убытокъ въ 4 рубля. Обозначая убытокъ

¹⁾ Алгебраическія числа называются также *относительными*, такъ какъ они характеризуютъ отношеніе выражаемыхъ ими количествъ къ одному или противоположному роду величинъ или повліій, называемыхъ нами *положительными* и *отрицательными*.

отрицательнымъ числомъ, можемъ написать: $15 - 19 = -4$, т.-е. въ этомъ случаѣ слѣдуетъ изъ большаго числа вычесть меньшее и передъ полученной разностью поставить знакъ — (минусъ).

Точно такъ же $10,5 - 26,7 = -16,2$; $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{7}{12}$ и т. п.

Поэтому иногда говорятъ, что *отрицательное число есть условная разность, полученная при вычитаніи большаго числа изъ меньшаго* ¹⁾.

II. Тѣло подвинулось отъ точки *O*, лежащей на горизонтальной прямой *AB*, направо на *c* футовъ и затѣмъ *нальво* на *d* футовъ. Въ какомъ разстояніи тѣло находится теперь отъ точки *O*?)

Отвѣтъ. На разстояніи *c—d* футовъ.

При $c > d$, напр., $c = 5$ ф.; $d = 3$ ф.; $c - d = 5 - 3 = 2$ ф., т.-е. тѣло находится на 2 ф. *вправо* отъ точки *O*.

При $c = d$, напр., $c = 5$ ф., $d = 5$ ф., $c - d = 5 - 5 = 0$ ф., т.-е. тѣло возвратилось въ точку *O*.

При $c < d$, напр., $c = 5$ ф., $d = 8$ ф., $c - d = 5 - 8 = -3$ ф., т.-е. тѣло находится на 3 ф. *альво* отъ точки *O*.

Очевидно, если бы не было введено въ алгебру понятія объ отрицательныхъ количествахъ, то нельзя было бы пользоваться выведенными рѣшеніями $a - b$, $c - d$ и т. д. во всѣхъ трехъ случаяхъ, а только въ первыхъ двухъ, какъ въ ариметикѣ. Но это значило бы почти все равно, что отказаться отъ составленія общихъ рѣшеній вопросовъ, такъ какъ при употребленіи буквъ очень часто бываетъ неизвѣстно, какая изъ нихъ означаетъ большее количество и какая меньшее, и, слѣдовательно, всякое выраженіе, содержащее разность, надо было бы ограничивать разными условіями, чтобы изъ меньшаго не пришлось вычитать большаго.

§ 14. **Абсолютной величиной** какого-либо количества называется число единицъ и частей единицы, заключающееся въ этомъ ко-

¹⁾ Полученіе отрицательнаго числа $9 - 12 = -3$ можно объяснить слѣдующимъ образомъ: отнимемъ отъ уменьшаемаго все, что можно отъ него отнять, т.-е. 9 единицъ. Остались, слѣдовательно, *невычитанными* 3 единицы. Эти 3 единицы мы и напомнимъ со знакомъ минусъ для указанія невыполненнаго вычитанія. Такимъ образомъ $9 - 12 = -3$.

Разность -3 сохраняетъ общее свойство разностей, т. е., если приложить ее къ *вычитаемому*, то получится уменьшаемое. Дѣйствительно, $12 + (-3) = 9 + 3 + (-3) = 9$.

²⁾ Учащимся очень рекомендуется сдѣлать чертежъ этой задачи.