

Берже М.

Геометрия

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б48

Берже М.
Б48 Геометрия: Том 1 / Берже М. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 560 с.

ISBN 978-5-458-30042-1

Книга известного французского математика охватывает широкий круг вопросов классической геометрии в современном изложении. В ней удачно сочетаются общие абстрактные идеи и многочисленные примеры конкретных приложений. Издание богато иллюстрировано. В русском переводе книга выходит в двух томах. В первый том (560 стр.) включены выпуски 1. Действие групп, аффинные и проективные пространства; 2. Евклидовы пространства, треугольники, окружности и сферы; 3. Выпуклые тела и полиэдры, правильные многогранники, площади и объемы.

ISBN 978-5-458-30042-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Посвящается
светлой памяти
профессора Н. Ефимова

К русскому изданию

Учебные книги русских математиков отличаются высокими качествами и широко известны. Они безупречны в методологическом отношении, а обилие примеров из самых разных областей знания, которыми они снабжены, хорошо их украшает.

Вот почему, представляя на суд русских читателей свою книгу, я испытываю некоторое волнение и опасения. Тем не менее я надеюсь, что эта книга что-то даст им — хотя бы поможет лучше представить, чем отличаются математические культуры наших стран. А если кому-нибудь понравится та или иная из представленных в книге точек зрения либо та или иная теорема, я буду счастлив. Я почувствую, что внес свой скромный вклад в развитие контактов между нашими народами, к которому все мы стремимся всей душой.

Пользуясь предоставленной мне благодаря этому изданию возможностью, я хочу почтить память старейшины клана геометров Николая Ефимова. В мае 1968 г. он был гостем университета Париж-VII и у всех, кто обсуждал с ним математические проблемы или просто дружески беседовал, общение с ним оставило глубокий след. Лично мне запомнилось, что он познакомил меня тогда с «Пиковой дамой» Чайковского. Мне хотелось бы выразить здесь свое глубокое уважение к этому замечательному человеку.

Я благодарен моему коллеге и другу И. Сабитову, переводчикам и издательству «Мир», взявшим на себя нелегкий труд по переводу и изданию моей «Геометрии».

Марсель Берже
Париж, 3 ноября 1983 г.

Предисловие редактора перевода

Французская математическая литература традиционно богата капитальными трудами по геометрии, написанными крупнейшими математиками своего времени, — тут можно вспомнить многократно переиздававшиеся книги и учебники Монжа, Лежандра, Дарбу, Адамара. Книги эти в свое время определяли характер преподавания геометрии в университетах, а как следствие влияли и на ее преподавание в школах. Предлагаемую вниманию читателей «Геометрию», написанную активно работающим французским математиком Марселем Берже, в известной степени также можно отнести к числу таких книг. Высокого мнения о ней был выдающийся геометр Николай Владимирович Ефимов, по инициативе которого осуществлено ее русское издание.

В настоящее время у многих вызывает обоснованное беспокойство чрезмерная формализация геометрии, отрыв ее методов, содержания и интерпретации от изначально наглядной ее сущности. В качестве реакции на такое беспокойство Берже в своей книге постоянно подчеркивает, что синтетические и наглядно-содержательные стороны геометрического материала должны вновь завоевать свои утраченные было позиции. Это проявляется и в обилии иллюстраций (не только чертежей, но и фотографий произведений искусства и архитектуры, рисунков из старинных книг и даже деталей машин), и в выборе обсуждаемых задач, а иногда и в тексте неявно, но ясно читается мысль о том, что эстетическая гармония и красота наглядного изображения теоремы также являются мерилом ценности рассматриваемого геометрического результата; эта же идея выражена в прекрасном отрывке из Лебега, приведенном в начале книги в качестве программного эпиграфа.

Автор задался целью создать учебное пособие по геометрии, материал которого был бы на стыке элементарной, аналитической и отчасти алгебраической геометрий, и в котором дебри алгебраического аппарата не затеняли бы наглядное содержание используемых методов и получаемых результатов — конечно, насколько это возможно. Кроме того — и это очень важно! — автор стремится подвести читателя к мысли, что весь этот материал не является «музейным экспонатом» математики

Предисловие редактора перевода

прошлых веков, а находится в активном развитии—и как непосредственный объект научных исследований, и как источник идей для постановок задач в более общих ситуациях.

Нет, по-видимому, никакого смысла пересказывать здесь содержание книги, для этого лучше просмотреть оглавление или прочитать предисловие автора; я предпочту высказать лишь некоторые общие впечатления. Прежде всего книгу отличает необычайно богатый выбор материала—с диапазоном от проективных пространств над произвольным полем до архитектурных и инженерных объектов—и чрезвычайно компактная манера изложения, несущая в себе энергию невидимой, но явно осязаемой пружины, которая иногда неожиданно распрямляется или при чтении, или в ходе самостоятельного восстановления деталей доказательств—все это после некоторой работы над книгой неизбежно приводит к ощущению, что и в такой, казалось бы, досконально изученной области, как элементарная и аналитическая геометрии, есть и глубины и просторы для научной и методической работы. Наверное, это и есть тот эффект, к которому стремился автор!

Книга содержит много новейших результатов, а также классических вопросов, которые в учебной литературе до сих пор не встречались. Материал ряда параграфов, особенно из четвертой части, по сравнению с ныне действующими программами может показаться несколько старомодным. Но не состоит ли искусство педагога-ученого, в частности, и в том, чтобы осветить уходящие в темноту забвения знания лучами новых идей и ввести их в новом одеянии в современный ему учебно-научный мир?

Такая многоплановость книги, несомненно, будет причиной неоднозначного к ней отношения со стороны читателей и неодинаковой доступности или, лучше сказать, популярности отдельных ее глав. Обращаясь к ней как к учебному пособию, нужно иметь в виду, что, во-первых, по нашим программам содержание книги ни в коей мере не соответствует никакому конкретному учебному предмету, а, во-вторых, она вовсе не предназначена для первоначального ознакомления с геометрией.

Тем не менее—это нужно подчеркнуть!—многие места книги, например вся глава 1, большая часть глав 8, 9 и 10, почти вся третья часть, главы 13 и 18—вполне доступны для первого знакомства с материалом. Хочется надеяться, что эта часть привлечет внимание учителей и школьников старших классов, интересующихся математикой. По-видимому, главное назначение книги—использование ее материала для специальных и факультативных курсов, семинаров и геометрических

кружков самого различного уровня—от университетов и пединститутов до средних школ.

...Гильберт сравнивал геометрию с прекрасным садом, в котором каждый может подобрать себе цветок по вкусу. Ныне сад геометрии разросся настолько, что даже специалистам стало трудно ориентироваться в его зарослях. Эта книга поможет составить более ясное представление о том, куда ведут и где сходятся сегодня многочисленные тропинки, берущие начало у самого входа в сад— в элементарной и аналитической геометрии. Особенно полезной книга будет тем, кто уже занимается или начал заниматься возделыванием своего участка геометрии—они почерпнут из нее целостный взгляд практически на всю ту классическую геометрию, в которой можно работать без дифференциального исчисления.

Распределение работы по переводу книги было таким: части 1 и 4 перевел Ю. Н. Сударев, часть 2—А. В. Пажитнов, часть 3—С. В. Чмутов, часть 5—В. В. Трофимов. К сожалению, осталось ощущение, что, несмотря на все старания, нам не удалось полностью передать живой и непринужденный язык оригинала. Как всегда после завершения большой работы, кажется, что если бы сейчас начать все сначала, то многое нужно бы сделать по-другому. Но теперь судить о нашей работе представляется читателям—а читателей этой книги, несомненно, будет немало, и многие из них откроют в ней для себя нечто новое—или в математическом содержании, или в методических установках.

И. Х. Сабитов

Предисловие

В основу этой книги легли, во-первых, специальный курс элементарной математики, который читался в университете Париж-VII в 1972/73 и 1973/74 гг., и, во-вторых, пятнадцатилетняя работа по подготовке устного экзамена для соискателей ученого звания «agrégé»¹⁾ по разделу «Геометрия».

В книге, а точнее в элементарной геометрии, как мы ее понимаем, преследуются такие цели:

Прежде всего повышенное внимание уделяется визуальному восприятию, чертежам и вообще «пластическому искусству».

Далее, для каждого вводимого понятия приводится, если это возможно, какая-нибудь тонкая теорема с занимательной и простой формулировкой, но с неочевидным или трудным доказательством.

Наконец, демонстрируется, что большая часть рассматриваемой в книге простой математики — не музейный экспонат, а неотъемлемая часть науки, которая разрабатывается и применяется в наши дни. Здесь, порой на очень элементарном уровне, возникают еще нерешенные проблемы.

Несколько слов о характерных чертах книги, определяемых этими целями. Начнем с того, что основные определения мы всюду старались сопроводить нетривиальными и по возможности новыми примерами.

Теперь о чертежах. В большинстве случаев, особенно в начале книги, каждое геометрическое рассуждение сопровождается чертежом. Именно так поступали авторы геометрических книг, вышедших лет пятьдесят назад. В современных книгах, увы, чертежей совсем или почти совсем нет. По-видимому, современные авторы рассчитывают на то, что читатель держит перед собой лист бумаги и карандаш и сам выполняет чертежи по мере чтения или по крайней мере держит их в голове. Однако наш опыт приема университетских экзаменов показывает, что ни того, ни другого не происходит. Имея это в виду, мы среди прочего стремились и к тому, чтобы читатели нашей книги, как в старые времена, систематически пользовались чертежами.

¹⁾ Специальное учное звание для преподавателей (во Франции). — *Прим. ред.*

Еще одна особенность книги состоит в обилии всевозможных примечаний, так сказать, из области «общей культуры»: исторических ссылок и особенно ссылок на недавние работы, в которых, иногда на более высоком уровне, используются встретившиеся здесь математические объекты. Тем самым читателю дается возможность почувствовать, что элементарная математика является частью живого древа математики всех прошлых и будущих времен. Это подкрепляется и серьезной библиографией.

В книге много внутренних ссылок, в том числе на материал, который излагался на предыдущих страницах: мы полагаем, что лишь немногие будут читать ее подряд, от корки до корки, большинство же будет искать в ней тот или иной результат, изложение той или иной темы. Мы рассчитываем на то, что читателя, перелистывающего нашу книгу, вдруг захватит какой-нибудь рисунок, чертеж или теорема, и он захочет вернуться назад, чтобы глубже ознакомиться с вопросом. При таком чтении по диагонали ссылки на предыдущий материал очень полезны. Той же цели служат указатели в конце книги, причем предметный указатель весьма полон и в нем указаны все места, где встречается данное понятие, а не только место, где оно упомянуто впервые.

Содержание книги мы детально анализировать не будем, упомянем лишь ряд результатов, которые редко встречаются в современных французских работах (разве что иногда приводятся в виде упражнений): основная теорема аффинной геометрии; группы замощений; классификация правильных многогранников в произвольной размерности; теорема Коши о неизгибаемости выпуклых многогранников; многоугольный бильярд; теорема Понселе о многоугольниках, вписанных в коническое сечение; окружности Вилларсо на торе и паратаксия; параллелизм Клиффорда, изопериметрическое неравенство в произвольной размерности; теоремы Хелли и Красносельского, простота ортогональной группы, теоремы Витта и Картана—Дьедонне, полное изложение сферической, эллиптической и гиперболической геометрий.

Использовать книгу, по нашему мнению, можно разными способами. Она поможет преподавателям в выборе тем для заданий учащимся и снабдит их обширной библиографией, а кроме того, может послужить основой ряда университетских курсов, например курса евклидовой геометрии первого цикла на базе гл. 8 и 9 или курса первого цикла по выбору студента на базе гл. 18 и 19, посвященного изучению сферы и гиперболической геометрии; для студентов второго цикла, специализирующихся по геометрии, можно на основе материала гл. 11 и 12 или его части прочитать курс, посвященный выпуклости, или курс, посвященный сфере во всех ее аспектах (гл. 18). Наконец,

книга будет очень полезной тем преподавателям математики, кто готовится к экзаменам на соискание ученой степени ¹⁾.

В целом можно сказать, что книга адресована, среди прочих читателей, студентам первого и второго цикла университетов, изучающим какой-нибудь из упомянутых выше разделов геометрии, а также моим коллегам, преподающим в выпускных классах лицеев и подготовительных классах в высшую школу.

Укажем, наконец, на одну важную особенность книги: большая часть упражнений сильно отличается от обычно принятых. Поскольку уже сама книга представляет собой огромное собрание всевозможных упражнений и приложений, предлагаемые в ней упражнения большей частью трудны или даже очень трудны. В частности, иногда читателю нужно самому выяснять, что именно требуется доказать. Он должен проявлять известную зрелость, идти на риск и развивать оригинальность мышления.

Вне всякого сомнения, этот труд увидел бы свет в гораздо менее совершенном виде, если бы у меня не было возможности получать в течение многих лет помощь от всех математиков, с которыми я общался во время работы, — и от студентов, и от коллег. В частности, я много почерпнул, слушая пробные уроки соискателей — эти уроки помогли мне сравнить различные подходы и выбрать лучшие. Я часто надоедал коллегам, обращаясь к ним за советом или за точными ссылками. Я получил такую большую помощь и от столь многих лиц, что не в состоянии привести здесь все имена, боясь кого-нибудь забыть. Поэтому я обращаюсь к ним всем и прошу принять мою самую искреннюю благодарность.

Я от всего сердца благодарю издательства «СЕДИК» и «Фернан Натан» за то, что они с энтузиазмом и в тяжелые времена решились опубликовать этот мой труд.

М. Берже

Автор и издатели благодарят НЦНИ за финансовую поддержку.

¹⁾ В оригинале речь идет о «candidats au CAPES et à l'Agrégation de Mathématiques». — *Прим. ред.*

«Это было в 1897 г., я учился тогда на третьем курсе Нормальной школы и наш руководитель практикума по начертательной геометрии Жозеф Карон, имя которого я называю здесь с большим удовольствием, предложил нам очень трудное задание. Нужно было построить пересечение двух торов, расположенных таким образом, что для нахождения точек пересечения приходилось использовать сечения этих торов некоторыми сферами, касающимися каждого из них.

Жозеф Карон преподавал начертательную геометрию в парижских лицеях; кроме того, он руководил практикумом по начертательной геометрии в Сорбонне и в Нормальной школе. Он написал учебники по различным разделам начертательной геометрии (в качестве реакции на программы, которые он сурово осуждал). Он опубликовал в «Бюллетене французского математического общества» статью, посвященную построению поверхности третьего порядка, содержащей 27 вещественных прямых, — поверхности, модель которой заняла свое место в геометрической коллекции Парижского университета. Особенно он содействовал пробуждению любви к геометрии у своих многочисленных учеников, и это было в эпоху, когда выдающиеся ученые, наделенные большими геометрическими талантами, прилагали все усилия к тому, чтобы ни в коем случае не выдать ясные и простые идеи, которыми они руководствовались, а напротив, стремились представить свои элегантные результаты как следствие некой общей абстрактной теории, не имевшей зачастую никаких других приложений, кроме этих частных случаев. Геометрия превращалась у них в изучение алгебраических и дифференциальных уравнений; таким образом, она теряла все свое очарование, присущее ей как тонкому ремеслу и даже, можно сказать, почти пластическому искусству».

А. Лебег

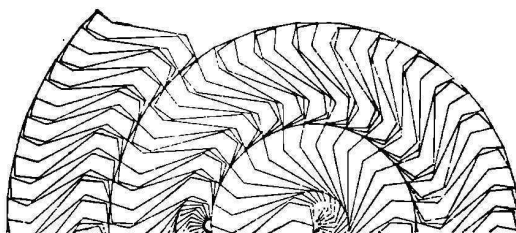
(цитируется по [154], с. 209—210)

Часть 1

Действие групп, аффинные и проективные пространства

*Посвящается
Одди*

- Глава 0. Общие понятия и обозначения
- Глава 1. Группы, действующие на множестве: терминология, примеры, приложения
- Глава 2. Аффинные пространства
- Глава 3. Универсальное пространство. Приложения
- Глава 4. Проективные пространства
- Глава 5. Аффинно-проективные связи; приложения
- Глава 6. Проективные прямые: двойное отношение, гомографии, инволюции
- Глава 7. Комплексификация



Глава 0 Общие понятия и обозначения

0.1 МНОЖЕСТВА

Если A и B —два подмножества множества E , то мы пользуемся обозначением

$$A \setminus B = \{x \in E: x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если $f: E \rightarrow F$ —некоторое отображение и $A \subseteq E$, то через $f|A$ или $f|_A$ обозначается *сужение* f на A .

Через Id_X обозначается тождественное отображение множества X на себя.

Если $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ —некоторое упорядоченное конечное множество, то через $\{x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n\}$ мы обозначаем это же множество без элемента x_i .

Через $\#X$ обозначается *мощность* (кардинальное число) множества X .

0.2 АЛГЕБРА

Через $\mathbf{N}$ обозначается множество неотрицательных целых чисел, через $\mathbf{Z}$ —кольцо целых чисел, через $\mathbf{R}$ —поле вещественных чисел. Через $\mathbf{C}$ и $\mathbf{H}$ мы обозначаем соответственно поле комплексных чисел и тело кватернионов (см. § 8.9). Символом $\mathbf{R}_+$ (соответственно $\mathbf{R}_-$) обозначается множество неотрицательных (неположительных) вещественных чисел, а через $\mathbf{R}_+^*$ (соответственно $\mathbf{R}_-^*$) то же множество без нуля. Если K —некоторое поле, то через K^* обозначается это же поле без нуля.

Далее, через $\text{Hom}(\cdot; \cdot)$, $\text{Isom}(\cdot; \cdot)$ обозначаются соответственно множество гомоморфизмов и изоморфизмов некоторого множества, наделенного какой-нибудь алгебраической структурой, в другое множество, наделенное той же структурой. Однако в случае векторных пространств множество линейных отображений из E в F мы будем обозначать не $\text{Hom}(E; F)$, а $L(E; F)$. При этом подразумевается, что, когда мы рассматриваем *два* векторных пространства, эти пространства чаще всего построены над одним и тем же полем¹⁾. *Линейная группа* векторного пространства E —это $\text{Isom}(E; E) = \text{GL}(E)$. Если E —векторное про-

¹⁾ В оригинале речь идет о векторных пространствах над телами, но практически всюду тела предполагаются коммутативными, т. е. полями. Поэтому мы предпочли использовать всюду термин «поле», употребляя термин «тело» лишь в тех случаях, когда нет коммутативности.—Прим. ред.