

Ю. Желтов

Механика нефтегазоносного пласта

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 66.0
ББК 35
Ю11

Ю11 **Ю. Желтов**
Механика нефтегазоносного пласта / Ю. Желтов – М.: Книга по Требованию, 2021. – 216 с.

ISBN 978-5-458-36137-8

ISBN 978-5-458-36137-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 1. ПОДОБИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Явления, наблюдаемые в природе или возникающие в результате деятельности человека, можно характеризовать количественно параметрами, определяющими их масштаб, координаты, время, скорость и т. д. Совокупность этих параметров отражает условия, в которых протекает данное явление. Основная задача научного исследования состоит в создании теории, подтвержденной экспериментальными фактами, позволяющей не только сравнивать явления, происходящие при различных параметрах, но и предсказывать их протекание в новых условиях.

Однако допустим, что теории данного явления пока нет и исследователь решил его моделировать в лабораторных условиях. Главные вопросы, которые возникнут у исследователя, будут состоять в том, как ему построить экспериментальную установку и как проводить опыты с тем, чтобы их результаты можно было применять к реальным натурным условиям. Можно, конечно, создать экспериментальную установку с полным соблюдением натуральных условий. Однако это не всегда возможно, например, когда создание экспериментальной установки является слишком трудоемким.

Таким образом, исследователь приходит к необходимости создавать установку меньших, чем в натуре, размеров. Но для обеспечения подобия явлений в модели и натуре далеко не всегда бывает достаточным соблюсти только геометрическое подобие. Предположим, что экспериментатор, не знакомый с теорией подобия, решил моделировать процесс движения воды в закрытом канале прямоугольного поперечного сечения (рис. 1). При этом ему требуется в качестве основной задачи определить, каков будет расход воды q , если заданы длина канала L , его высота h и ширина b , причем $b \gg h$, уровень воды в канале h . Пусть экспериментатор построил установку, все геометрические размеры которой в 10 раз меньше геометрических размеров канала в натуре. Во сколько же раз на экспериментальной установке уменьшится расход воды? Для ответа на этот вопрос экспериментатору, если он не пользуется методами

подобия или гидродинамической теорией, нужно построить целый ряд установок, отличающихся одна от другой своими параметрами. Допустим, что экспериментатор нашел в результате длительных опытов, что расход воды в канале определяется следующей зависимостью:

$$q = \frac{w^3 b \rho g h}{12 \mu L}, \quad (1.1)$$

где μ — вязкость воды; ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения. Только тогда он узнает, что при уменьшении геометрических размеров модели в 10 раз, при сохранении в модели и в натуре величины h/L , расход воды в эксперименте уменьшается в 10^4 раз по сравнению с натурой. При этом экспериментатора подстерегает также и другая неожиданность. Он или другие

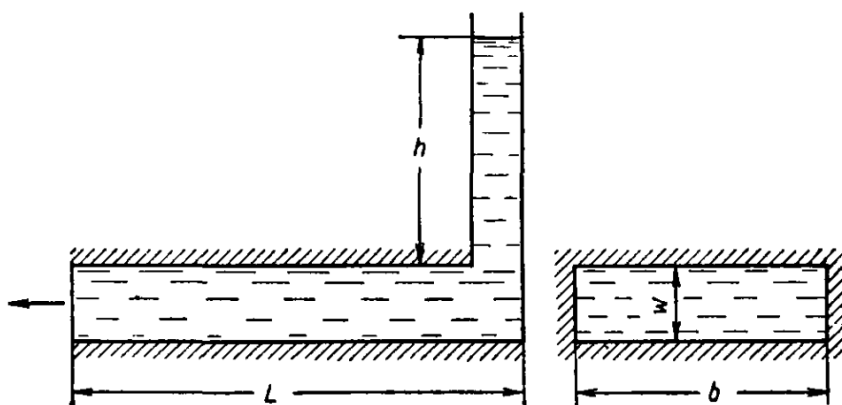


Рис. 1. Канал прямоугольного сечения

экспериментаторы найдут, как это и было на самом деле, что, например, при увеличении расхода воды экспериментальные данные «не укладываются» в зависимость (1.1). То же самое получается при больших w . Обнаруживается также, что в одних случаях течение воды в канале является спокойным, ламинарным, а в других сопровождается пульсациями скорости, т. е. является турбулентным.

Описанная выше картина движения была получена при изучении течения вязкой жидкости в трубе. Если экспериментально определять, скажем, перепад давления на некотором участке трубы, то при движении одной и той же жидкости на одном и том же участке той же самой трубы можно получать различные зависимости перепада давления от скорости. Так, при одних условиях будет существовать линейная связь между перепадом давления и средней скоростью (расходом) вязкой жидкости, при других же условиях эта связь будет иметь иной характер. При этом сам механизм движения также существенно изменяется — ламинарное движение становится турбулентным. Если изменять не только среднюю скорость движения, но и размер трубы и свойства жидкости, можно получать огромное число различных зависимостей перепада давления от того или иного параметра. Как же сопоставлять результаты этих опытов? В каких

случаях можно с уверенностью говорить, что опыты проводятся в сопоставимых условиях? Ответ на этот вопрос дают методы подобия, о которых и пойдет речь ниже.

Обратимся снова к примеру, приведенному в начале параграфа. Перепишем зависимость (1.1) в следующем виде:

$$\lambda = \frac{2gh}{v^2 L} = f(N), \quad v = \frac{q}{wb}, \quad N = \frac{v w \rho}{\mu} \quad (1.2)$$

Входящие в (1.2) величины λ и N — безразмерные, т. е. представляют собой просто числа. Таким образом, оказывается, что зависимость (1.2), описывающая процесс течения воды в закрытом канале, представляется в виде объективно существующей связи между числами λ и N , так что некоторому числу N соответствует вполне определенное число λ . Одно и то же число N может соответствовать опытам при различных значениях v , h/L , w , b , μ , ρ . Однако изменение этих параметров при условии $N = \text{const}$ не будет приводить к изменению λ . Таким образом, об опытах при одном и том же N можно говорить, что они проходят в сопоставимых условиях. Приведенный выше параметр N , как известно, называется числом Рейнольдса N_{Re} .

То же самое можно сказать и о процессе движения вязкой жидкости в круглой трубе, имеющей длину L и диаметр d . В этом случае гидравлическое сопротивление также характеризует безразмерная величина $\lambda = \frac{2d\Delta p}{Lv^2\rho}$ (Δp — перепад давления в трубе), зависящая от безразмерного параметра $N_{\text{Re}} = vd\rho/\mu$. Таким образом,

$$\lambda = \lambda(N_{\text{Re}}). \quad (1.3)$$

И в опытах по изучению движения вязкой жидкости в трубе можно изменять скорость, вязкость и плотность жидкости, а также диаметр трубы. Однако, если при этом N_{Re} остается неизменным, можно считать, что эти опыты ведутся в сопоставимых (подобных) условиях или что обеспечено подобие опытов.

Обработка экспериментальных данных по движению жидкостей в трубах показала, что эти данные «укладываются» в зависимости (1.3).

Если при изучении любого явления удастся построить зависимость характеристик этого явления от параметров, определяющих явление, в безразмерной форме, то для обеспечения подобия опытов, воспроизводящих изучаемое явление, необходимо выдержать постоянство в этих опытах безразмерных параметров, входящих в данную зависимость, называемых параметрами или критериями подобия. В этом и состоит основное требование теории подобия и моделирования.

Здесь нужно сказать о приближенном подобии. Если, например, известно, что в определенном диапазоне изменения безразмерного параметра изучаемая характеристика слабо от него зависит, то для подобия явлений не требуется в точности соблюдать равенство

безразмерных параметров в сравниваемых случаях. Достаточно, чтобы они укладывались в отрезке, соответствующем слабой зависимости изучаемой характеристики от безразмерного параметра. Таким образом, будет обеспечено приближенное подобие явлений.

Как же получить зависимость изучаемой характеристики явления от определяющих параметров в безразмерной форме? Для этого можно использовать два пути. Первый из них применяется в том случае, когда изучаемое явление настолько ново или сложно, что отсутствует его математическая модель.

Этот путь следующий. После того как исследователь опытным путем или даже на основе своей интуиции установит параметры, от которых зависит изучаемая характеристика явления (определяющие параметры), необходимо выяснить, какие из определяющих параметров имеют независимую размерность, т. е. не могут быть выражены друг через друга. Это можно сделать либо путем простого сопоставления размерностей параметров, либо используя следующий способ. Пусть нужно определить зависимость или независимость размерностей таких параметров, как длина l , скорость v , и вязкость μ . Они имеют следующую размерность:

$$[l] = L, [v] = LT^{-1}, [\mu] = PL^{-2}T, \quad (1.4)$$

где L , T и P — соответственно размерности длины, времени и силы. Квадратные скобки означают размерность соответствующей величины.

Определим теперь, можно ли одну из величин, например l , выразить через v и μ . Имеем

$$[l] = L = [v]^x [\mu]^y = L^x T^{-x} P^y L^{-2y} T^y = L^{x-2y} P^y T^{y-x}. \quad (1.5)$$

Приравнявая размерности в левой и правой частях равенства (1.5), получаем систему уравнений:

$$x - 2y = 1; \quad y = 0; \quad y - x = 0. \quad (1.6)$$

Как можно легко видеть, система (1.6) является несовместной. В самом деле, из второго и третьего уравнений получается, что $x = y = 0$, что не соответствует результату, получаемому из первого и второго уравнений. Таким образом, параметры l , v и μ имеют независимую размерность.

Если же теперь, например, к указанным выше параметрам l , v и μ добавить еще и давление $[p] = PL^{-2}$, то этот параметр можно выразить через остальные. Так,

$$p = \frac{v\mu}{l}. \quad (1.7)$$

Следовательно, о всех четырех параметрах l , v , μ и p уже нельзя сказать, что они имеют независимую размерность. Ею будут обладать лишь три параметра: l , v и μ .

Итак, допустим в общем случае, что исследуемая характеристика явления a есть функция n определяющих параметров a_i , т. е. что

$$a = f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n). \quad (1.8)$$

При этом k параметров из n обладают независимой размерностью, причем

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \quad \dots, \quad [a_k] = A_k. \quad (1.9)$$

В выражении (1.9) символы A_1, A_2 и т. д. означают размерность соответствующих параметров a_1, a_2 и т. д. Размерность же остальных величин, входящих в зависимость (1.8), обозначим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} [a] &= A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k}; \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k}; \\ [a_n] &= A_1^{q_1} A_2^{q_2} \dots A_k^{q_k}, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

где m_i, p_i, q_i ($1 \leq i \leq k$) являются показателями степени при соответствующих размерностях.

В теории подобия существует П-теорема («пи-теорема»), которая гласит [102], что всякая зависимость вида (1.8) исследуемой характеристики явления от определяющих явление параметров может быть представлена в безразмерном виде:

$$\Pi = \Pi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (1.11)$$

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}};$$

$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}};$$

$$\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_k^{q_k}}.$$

В качестве примера применения П-теоремы подобия рассмотрим процесс вытеснения нефти водой из прямолинейного образца пористой среды. В этом процессе в образец, пористая среда которого первоначально была насыщена нефтью, закачивается вода, вытесняющая нефть. При этом в области $0 \leq x \leq l$ (рис. 2) существует совместное течение нефти и воды, а также действуют капиллярные силы. В области $l \leq x \leq L$ движется чистая нефть.

Предположим, что в этом процессе исследователь намерен определять перепад давления в области, куда проникла вода, вытесняющая нефть. Будем считать, что перепад давления Δp , отнесенный к длине l , зависит от расхода воды v , отнесенного к единице площади образца, параметра k , характеризующего свойства пористой среды пропускать жидкость (проницаемости пористой среды), вяз-

кости воды μ_1 , вязкости нефти μ_2 , поверхностного натяжения σ и угла смачивания θ . Следовательно,

$$\frac{\Delta p}{l} = f(v, k, \mu_1, \mu_2, \sigma, \theta). \quad (1.12)$$

Входящие в (1.12) параметры имеют следующую размерность:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Delta p}{l} \right] &= PL^{-3}; \quad [v] = LT^{-1}; \quad [k] = L^2; \\ [\mu] &= PL^{-2}T; \quad [\sigma] = PL^{-1}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

а θ — безразмерная величина.

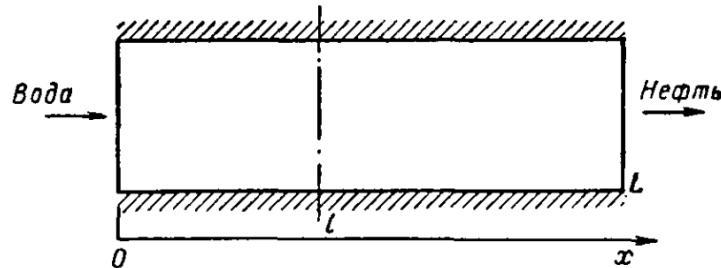


Рис. 2. Вытеснение нефти водой из пласта

Начиная анализ размерностей параметров (1.12), можно увидеть, что параметры v , k и μ_1 имеют независимую размерность, т. е., например, v никак нельзя выразить через k и μ_1 , поскольку в размерность μ_1 входит размерность силы, которая не входит ни в v , ни в k . Поверхностное натяжение σ имеет размерность, зависимую от параметров v и μ_1 , так как $[\sigma] = [v\mu_1]$. Угол смачивания θ , как величину безразмерную, не будем включать в анализ размерности, отнеся его заранее в число безразмерных параметров.

В таком случае, используя обозначения, данные в формулах (1.10) и (1.11), имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= v, \quad a_2 = k, \quad a_3 = \mu_1, \quad a_{k+1} = \mu_2, \\ a_n &= \sigma, \quad A_1 = LT^{-1}, \quad A_2 = L^2, \\ A_3 &= PL^{-2}T. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Delta p}{l} \right] &= PL^{-3} = L^{m_1} T^{-m_1} L^{2m_2} P^{m_3} L^{-2m_3} T^{m_3} = \\ &= L^{m_1+2m_2-2m_3} P^{m_3} T^{m_3-m_1}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Приравнивая размерности в левой и правой частях равенства (1.15), получаем

$$m_1 = m_3 = 1, \quad m_2 = -1. \quad (1.16)$$

Аналогично имеем

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = 1, \quad q_1 = q_3 = 1, \quad q_2 = 0. \quad (1.17)$$

Теперь уже можно использовать непосредственно П-теорему подобия. Имеем

$$\Pi = \frac{\Delta p}{\nu k^{-1} \mu_1}, \quad \Pi_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \Pi_{n-k} = \frac{\sigma}{\nu \mu_1}. \quad (1.18)$$

Окончательно получаем

$$\Pi = \Pi \left(\frac{\sigma}{\nu \mu_1}, \frac{\mu_2}{\mu_1}, \theta \right) \quad (1.19)$$

Другой путь получения безразмерных параметров подобия используется в тех случаях, когда имеется математическая формулировка изучаемого явления — есть математическая модель и формулировка начальных и граничных условий. После приведения уравнений, описывающих явление, а также начальных и граничных условий к безразмерной форме получится, что в математическую формулировку входят безразмерные параметры. Если рассматривать процессы, протекающие в двух различных случаях, характеризующихся разными условиями, но так, что безразмерные параметры, входящие в уравнения, начальные и граничные условия, приведенные к безразмерной форме, остаются одними и теми же, то математическое описание процессов в двух указанных случаях будет в точности одним и тем же и, следовательно, процессы будут подобными.

Конечно, математическая формулировка явления обычно оказывается возможной при его достаточно глубокой изученности.

Использование методов подобия весьма плодотворно не только при экспериментальном исследовании явлений, но и при получении математических решений задач. Применение методов подобия в задачах механики подробно изложено в известной книге Л. И. Седова [102].

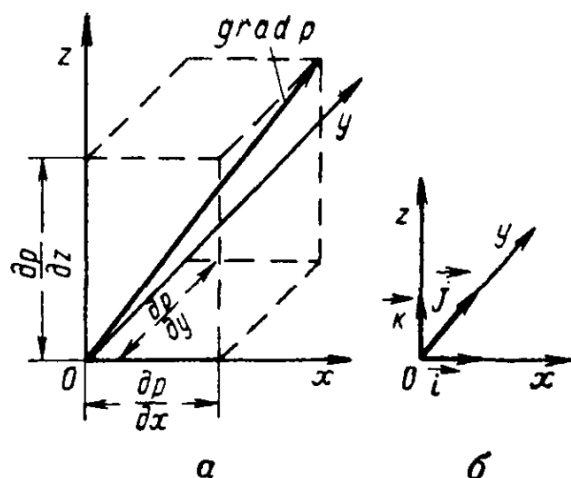
§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Чтобы облегчить чтение книги, в этом параграфе кратко излагаются основы векторного и тензорного исчисления, а также теории поля.

Векторами называются величины, имеющие как размеры, так и направление в пространстве. Классическими примерами векторных величин являются сила, скорость и ускорение. Давление же и температура являются примерами скалярных величин, не имеющих направления. Скалярные величины можно изображать в виде чисел. Векторные же величины изображаются отрезками, имеющими направление в пространстве.

Длина вектора $\vec{a}$ называется модулем вектора и обозначается символом a или $|\vec{a}|$. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными только в том случае, когда равны длины векторов (модули) и совпадают их направления. Сложение и вычитание векторов производятся по правилам параллелограмма или параллелепипеда.

Пусть в каждой точке пространства существует некоторая скалярная величина, например давление p . Тогда говорят, что имеется скалярное поле — поле давления. Возьмем некоторую точку O , находящуюся в начале декартовых координат x, y, z (рис. 3, а). Скалярная величина p изменяется с изменением координат, так что „скорость“ изменения p в направлении оси Ox будет равна производной от $p = p(x, y, z)$ по координате x , т. е. dp/dx . Соответственно в направлениях y и z будем иметь производные dp/dy и dp/dz . Единичные векторы, т. е. векторы, модули которых равны единице, направленные по осям x, y и z (рис. 3, б), обозначаются $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$. Таким образом, если принять, что в направлениях x, y и z имеются



векторы, модули которых равны $dp/dx, dp/dy$ и dp/dz , то сами векторы можно обозначить соответственно $(dp/dx)\vec{i}, (dp/dy)\vec{j}$ и $(dp/dz)\vec{k}$.

Одной из основных характеристик поля является градиент, сокращенно обозначаемый символом grad , для которого имеем следующее выражение:

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.1)$$

Рис. 3. Градиент и его проекции на оси x, y, z

Градиент, как видно из (2.1), равен сумме векторов, направленных по осям координат, и сам является векторной величиной. Его направление для данного поля строго определенное.

Производная скалярной величины по любому направлению n , не совпадающему с направлением градиента, выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\partial p}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial p}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial p}{\partial z} \cos \gamma, \\ \cos \alpha &= \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cos \beta = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \cos \gamma = \frac{\partial z}{\partial n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если принять, что в направлении n имеется единичный вектор, проекции которого на соответствующие оси координат выражаются как

$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \cos \beta, \quad n_z = \cos \gamma, \quad (2.3)$$

то на основе (2.2) и (2.3) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \text{grad } p \cdot \vec{n}. \quad (2.4)$$

В правой части формулы (2.4) представлено скалярное произведение двух векторов $\text{grad } p$ и $\vec{n}$. Скалярное произведение векторов, как известно, равно произведению модулей векторов на косинус угла между ними. Таким образом, производная скалярной величины p по направлению n является скалярной величиной. Чтобы несколько более подробно пояснить формулу (2.4), представим ее в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}) = \\ &= \frac{\partial p}{\partial x} n_x \cos(\vec{i}, \vec{i}) + \frac{\partial p}{\partial y} n_x \cos(\vec{j}, \vec{i}) + \frac{\partial p}{\partial z} n_x \cos(\vec{k}, \vec{i}) + \\ &+ \frac{\partial p}{\partial x} n_y \cos(\vec{i}, \vec{j}) + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \cos(\vec{j}, \vec{i}) + \frac{\partial p}{\partial z} n_y \cos(\vec{k}, \vec{j}) + \\ &+ \frac{\partial p}{\partial x} n_z \cos(\vec{i}, \vec{k}) + \frac{\partial p}{\partial y} n_z \cos(\vec{j}, \vec{k}) + \frac{\partial p}{\partial z} n_z \cos(\vec{k}, \vec{k}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В выражениях (2.5) имеются в виду косинусы углов между соответствующими направлениями $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Поскольку косинусы углов между совпадающими линиями равны единице, а между взаимно перпендикулярными — нулю, то в правой части выражения (2.5) остаются только три члена, т. е. получаем

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y + \frac{\partial p}{\partial z} n_z. \quad (2.6)$$

Если подставить в выражение (2.6) выражения из (2.3), то и получим формулу (2.2).

Рассмотрим теперь векторное поле, когда в какой-то точке пространства $M(x, y, z)$ имеется вектор $\vec{a}(M)$. В другой точке пространства M_1 величина вектора будет иная, чем в точке M , так что в точке M_1 , например, будем иметь вектор $\vec{a}_1(M_1)$. Если взять некоторую произвольную поверхность S в векторном поле (рис. 4), то к каждому малому элементу этой поверхности будет относиться вектор $\vec{a}$. В общем случае направления n нормали к элементу поверхности dS и вектора $\vec{a}$, конечно, не будут совпадать. Элементарным потоком вектора $d\vec{f}$ через поверхность dS называется скалярная величина

$$df = |a| \cos(n, a) dS. \quad (2.7)$$

Можно перпендикулярно к элементарной площадке dS направить вектор $\vec{dS}$, модуль которого равен величине площади dS . Тогда

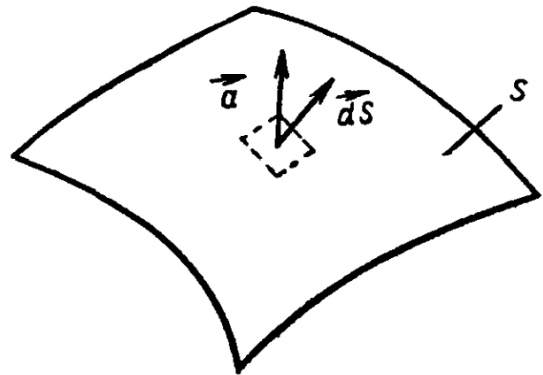


Рис. 4. Элемент поверхности dS

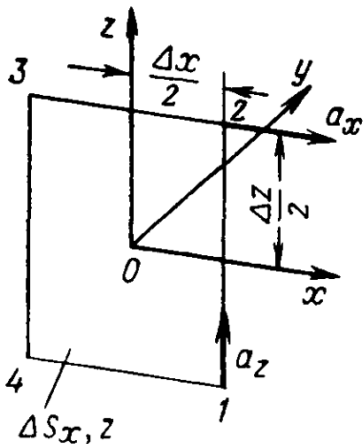
на основе (2.7) df будет равен скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{dS}$, т. е.

$$df = \vec{a} \cdot \vec{dS}. \quad (2.8)$$

Полный поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S равен сумме элементарных потоков или, в пределе, интегралу

$$F = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{dS}. \quad (2.9)$$

Поток вектора, определенный формулой (2.9), является скалярным потоком. Пусть теперь имеем некоторый объем V в векторном



поле, ограниченный замкнутой поверхностью S . Составим отношение полного потока F , определяемого формулой (2.9), к объему V . При стремлении объема V к нулю уменьшается и поток вектора F через поверхность S . Однако отношение F/V даже при $V \rightarrow 0$ может оказаться величиной, отличной от нуля. Это отношение называется дивергенцией (расхождением) векторного поля $\vec{a}(M)$ и обозначается как $\text{div } a$. По определению,

Рис. 5. Элементарная площадка $\Delta S_{x,z}$

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{F}{V}. \quad (2.10)$$

В теории поля доказывается, что

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (2.11)$$

где a_x , a_y и a_z — проекции вектора $\vec{a}$ на оси x , y и z .

Как видно, дивергенция векторного поля — величина скалярная. Пусть имеем векторное поле градиента некоторой скалярной величины, например опять давления p . Дифференциальный оператор, соответствующий дивергенции векторного поля градиента, называется лапласианом и обозначается обычно символом Δ (дельта). Для приведенного выше примера градиента давления p имеем

$$\Delta p = \text{div grad } p. \quad (2.12)$$

Иногда для дифференциальных операторов grad и div используют символ ∇ (набла). Тогда оператор ∇ , называемый гамильтонианом, от скалярной величины p будет означать градиент давления $\nabla p = \text{grad } p$, а от векторной величины — дивергенцию. Двукратное