

А.С. Ингам

Распределение простых чисел

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А.С. Ингам**
Распределение простых чисел / А.С. Ингам – М.: Книга по Требованию, 2023. – 163 с.

ISBN 978-5-458-27085-4

Предметом настоящей монографии является теория распределения простых чисел в натуральном ряде. Глава, посвященная элементарной части теории, включена как в силу своего исторического интереса, так и вследствие самостоятельной ценности применяемых в ней методов. Однако в основном книга посвящена аналитической теории, основывающейся на дзета-функции Римана.

ISBN 978-5-458-27085-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

А. Е. ИНГАМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Д. А. РАЙКОВА

С ПРИЛОЖЕНИЕМ СТАТЬИ ПЕРЕВОДЧИКА
О МЕТОДЕ ЛАНДАУ-ИКЕАРА ДОКАЗАТЕЛЬ-
СТВА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ЗАКОНА РАС-
ПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И БИБЛИОГРАФИИ
МОСКВА — 1939 — ЛЕНИНГРАД

T 23-54
TKK 14

THE DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS

BY

A. E. INGHAM, M. A.

Fellow of King's College, Cambridge

Sometime Fellow of Trinity College, Cambridge

CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS 1932

Ред. А. И. Маркушевича. Оформление С. Л. Дыман.
Корректурa О. Н. Барашковой. Выпускающий Я. Я. Вигонт.

Сдана в набор 10/VIII 1935 г.	Подписана к печати 20/II 1936 г.
Формат 82×110 ¹ / ₃₂ .	Изд. № 53. Бум. л. 2 ¹ / ₂ . Тип. зн. в 1 бум. л. 174.50).
Уполн. Главлита № В—37061.	Тираж 5.000. Авт. л. 19,9. Заказ № 955.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предметом настоящей монографии является теория распределения простых чисел в натуральном ряде. Глава, посвященная элементарной части теории, включена как в силу своего исторического интереса, так и вследствие самостоятельной ценности применяемых в ней методов. Однако в основном книга посвящена аналитической теории, основывающейся на дзета-функции Римана. Таким образом эта книга примыкает к 26-му выпуску настоящей серии¹⁾ (Е. С. Titchmarsh, „The zeta-function of Riemann“), вышедшему в свет в 1930 г.; однако логическая последовательность обеих книг прямо противоположна хронологическому порядку их опубликования. Излагаемые здесь свойства дзета-функции можно отнести скорее к классической части теории; в своем большинстве они приведены Титчмаршем во введении без доказательства. В настоящей книге эти свойства обосновываются во всех деталях (за исключением нескольких изолированных ссылок на Титчмарша, не отражающихся на понимании остального текста), причем соответствующие ее части могут в свою очередь служить введением к более глубокому изучению дзета-функции в книге Титчмарша. Настоящая монография не обращается исключительно к специалистам, которые найдут исчерпывающее изложение предмета в известных книгах Ландау „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen“ и „Vorlesungen über Zahlentheorie“; ее цель — сделать предмет доступным более широкому кругу читателей.

Эта книга, равно как и книга Титчмарша, ведет свое начало от рукописи Бора-Литтльвуда, на которую ссылается Титчмарш в своем предисловии. Однако при подготовке к окончательному изданию пришлось ее заново пересмотреть с тем, чтобы привести в соответствие с положением проблемы на сегодняшний день и учесть все улучшения в технике доказательств, введенные со времени ее написания.

¹⁾ Книга Ингама является 30-м выпуском известной английской серии монографий „Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics“. *Ред.*

В этой работе мне оказали большую помощь записки лекций, любезно предоставленные в мое распоряжение проф. Литтльвудом. Что касается влияния двух упомянутых книг Ландау, то оно слишком очевидно для всех, знакомых с ними, чтобы стоило отмечать его в каждом отдельном случае. Настоящая монография была читана в корректурах проф. Бором и проф. Литтльвудом, авторами первоначальной рукописи, а также проф. Харди, д-ром Зигмундом, Р. М. Габриелем и О'Д. Александером, которым и выражаю здесь свою благодарность за ряд исправлений и улучшений. Проф. Винеру я обязан некоторыми ценными замечаниями в заключительных параграфах гл. II.

А. Е. Ингам.

ВВЕДЕНИЕ.

1. Целые положительные числа, отличные от единицы, распадаются на два класса: составные числа (4, 6, 8, 9, ...), разлагающиеся на меньшие множители, и простые числа (2, 3, 5, 7, 11, ...), на меньшие множители уже не разлагающиеся. Простые числа приобретают особую важность в силу „фундаментальной теоремы арифметики“, гласящей, что каждое составное число может быть представлено одним и только одним способом в виде произведения простых множителей. Уже на пороге развития математики как науки мы встречаемся с проблемой распределения простых чисел в натуральном ряде. Хотя последовательность простых чисел ведет себя чрезвычайно причудливо в деталях, тем не менее оказывается, что общее ее распределение в натуральном ряде подчинено некоторым простым закономерностям, которые могут быть точно сформулированы и подвергнуты математическому исследованию.

Мы будем обозначать через $\pi(x)$ число простых чисел, превышающих x ; наша проблема сводится, таким образом, к исследованию функции $\pi(x)$. Уже первый взгляд на таблицу простых чисел показывает, что, как бы мы далеко ни отодвигали ее границу, простым числам не видно конца, хоть они и начинают встречаться в среднем все реже в более удаленных ее частях. Это наводит нас на две теоремы, которые могут служить отправным пунктом всего дальнейшего исследования. В терминах функции $\pi(x)$ эти теоремы гласят, что, при безграничном увеличении x , $\pi(x)$ стремится к бесконечности, а отношение $\frac{\pi(x)}{x}$ — к нулю.

2. Первая теорема, утверждающая существование бесконечного множества простых чисел, была доказана уже Евклидом („Начала“, кн. 9, предложение 20). В основных чертах его доказательство таково: пусть P — произведение любого конечного числа простых чисел и пусть $Q = P + 1$. Числа P и Q не могут иметь общих множителей, ибо их общий множитель должен был бы делить разность $Q - P = 1$, что, очевидно, невозможно. Но Q как целое число, превышающее единицу, должно делиться на какое-либо простое число. Следовательно,

существует по крайней мере одно простое число, отличное от простых чисел, составляющих P . Если бы поэтому имелось только конечное число простых чисел, то мы могли бы взять за P их произведение, и противоречие было бы налицо. Это рассуждение дает даже несколько больше. Оно показывает, что $Q_n = p_1 p_2 \dots p_n + 1$, где p_n есть n -е простое число ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...), делится на некоторое p_m с индексом $m > n$, так что $p_{n+1} \leq p_m \leq Q_n$, а отсюда по индукции получаем оценку:

$$p_n < 2^{2^n}. \quad (1)$$

3. В 1737 г. Эйлер доказал существование бесконечного множества простых чисел новым методом, обнаруживающим, кроме того, что

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \text{ расходится.} \quad (2)$$

Эйлерово доказательство базируется на применении формального тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad (3)$$

где произведения распространены на все простые числа. Вклад Эйлера в теорию распределения простых чисел имел основоположное значение; открытое им тождество, которое можно рассматривать как аналитический эквивалент упомянутой выше фундаментальной теоремы арифметики, образует базис почти всей современной аналитической теории чисел.

Теоремы (1) и (2) сходятся между собою в том, что обе несколько уточняют (хотя и разными способами) теорему о бесконечности множества простых чисел.

4. Вопрос об убывании частоты простых чисел служил предметом многочисленных бесплодных попыток и спекуляций, прежде чем были получены сколько-нибудь определенные результаты. Проблема приобрела гораздо более точный вид с опубликованием Лежандром в 1808 г. (после менее определенной формулировки в 1798 г.) замечательной эмпирической формулы для приближенного представления функции $\pi(x)$. Лежандр выставил утверждение, что, для больших значений x , $\pi(x)$ приближенно равно

$$\frac{x}{\ln x - B}, \quad (4)$$

где B — некоторое постоянное число ¹⁾, — теорема, названная Абелем (в одном письме, написанном в 1823 г.) „самой замечательной во всей математике“. Сходная, хотя и не тождественная формула была предложена, независимо от Лежандра, Гауссом. Метод Гаусса, состоящий в подсчете числа простых чисел, падающих последовательно на каждую тысячу чисел натурального ряда, наводит на предположение, что средняя плотность распределения („число простых чисел на единицу интервала“) для больших значений x приближенно выражается функцией $\frac{1}{\ln x}$, и, значит

$$\int_2^x \frac{du}{\ln u} \quad (5)$$

дает приближенное выражение для $\pi(x)$. Свои соображения Гаусс сообщил Энке в 1849 г., впервые они были опубликованы в 1863 г. Однако по некоторым данным они восходят еще к 1791 г., когда Гауссу было всего четырнадцать лет ²⁾. В промежутке между этими датами пригодность интеграла (5) для приближенного выражения функции $\pi(x)$ была замечена независимо друг от друга различными авторами ³⁾.

В целях удобства обозначений этот интеграл обычно заменяют „интегральным логарифмом“:

$$\operatorname{li} x = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^x \right) \frac{du}{\ln u},$$

от которого он отличается на постоянную $\operatorname{li} 2 = 1,04\dots$

Ни Гаусс, ни Лежандр не формулировали достаточно явно требований к точности своих эмпирических формул за пределами таблиц, использованных для их построения, однако мы можем принять, что они, во всяком случае, стремились достичь „асимптотической эквивалентности“ $\pi(x)$ и аппроксимирующей функции $f(x)$, т. е. чтобы при безграничном увеличении x отношение $\frac{\pi(x)}{f(x)}$ стремилось к единице. Нетрудно усмотреть, что две теоремы, получающиеся при этом соответственно двум

¹⁾ *Legendre*, 1 a, 19; 1b, 394; 2, II, 65. Курсивом обозначены ссылки на библиографию, приложенную в конце книги.

²⁾ *Gauss*, I, II, 444—447; X₁, 11.

³⁾ *Dirichlet*, Werke, I, 372, сноска **; *Tschebyscheff*, 1, 2; *Hargreave*, 1, 2.

приведенным выше формам функции $f(x)$, эквивалентны как между собой, так и более простому соотношению:

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Однако различие между выражениями (4) и (5) и значение константы B в (4) становятся существенными, как только мы хотим более точно оценить порядок „ошибки“ $\pi(x) - f(x)$. Утверждение (6), известное под наименованием асимптотического закона распределения простых чисел, занимает центральное место во всей теории распределения простых чисел. Проблема доказательства этого закона или его опровержения привлекала внимание математиков в течение почти ста лет.

5. Первыми теоретическими результатами, устанавливающими связь функции $\pi(x)$ с отношением $\frac{x}{\ln x}$, мы обязаны Чебышеву. В 1848 г. он показал (в ряду других теорем), что если отношение в левой части формулы (6) вообще стремится к какому бы то ни было пределу, то этот предел должен быть равен единице. Далее, в 1850 г. им было показано, что отношение $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ для всех достаточно больших значений x заклю-

чается между двумя положительными постоянными a и A , так что функция $\frac{x}{\ln x}$ во всяком случае дает истинный порядок роста $\pi(x)$. Эти результаты представляли собой достижение первоклассного значения, однако (как ясно понимал и сам Чебышев) их было недостаточно для установления самого главного, а именно существования $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$. И хотя чис-

ленные границы (a, A) , полученные Чебышевым, были последовательно сужены другими авторами (особенно Сильвестром), тем не менее вскоре было замечено, что методы, примененные этими авторами, вряд ли могли привести к окончательному решению проблемы.

6. Новые идеи, давшие ключ к решению, были введены Риманом в 1859 г. в мемуаре, ставшем знаменитым не только вследствие содержащегося в нем вклада в теорию простых чисел,

но и из-за влияния, оказанного им на развитие общей теории функций. Тождество Эйлера было применено самим Эйлером только для фиксированного значения s ($s=1$), а Чебышевым для всех вещественных s , больших единицы. Риман же первый стал рассматривать s как комплексное переменное и исследовать ряд в левой части тождества (3) с помощью методов теории аналитических функций. Этот ряд сходится только в некоторой части плоскости комплексного переменного (именно, в полуплоскости $\Re s > 1$), однако с помощью аналитического продолжения он определяет однозначную аналитическую функцию, регулярную во всех конечных точках, за исключением простого полюса в $s=1$ с вычетом 1. Эта функция называется „дзета-функцией Римана“, в соответствии с обозначением $\zeta(s)$, присвоенным ей введшим ее автором.

Хотя Риман и не занимался непосредственно аппроксимированием функции $\pi(x)$, тем не менее весь его анализ ясно показал, что эта функция intimately связана со свойствами функции $\zeta(s)$ и прежде всего с распределением ее нулей в плоскости s . Риман выдвинул ряд важных утверждений относительно дзета-функции и, в частности, указал замечательное тождество, связывающее $\pi(x)$ с ее нулями; однако в большинстве случаев он дал лишь недостаточные наметки доказательств. Проблемы, поставленные мемуаром Римана, послужили толчком к фундаментальным исследованиям Адамара по теории целых функций, и результаты этих исследований устранили, наконец, ряд препятствий, преграждавших более чем тридцать лет путь к строгому доказательству теорем Римана. Доказательства, лишь намеченные Риманом, были завершены (в существенных чертах) частью самим Адамаром в 1893 г., частью фон-Мангольдтом в 1894 г.

7. Открытия Адамара расчистили путь для быстрого прогресса теории распределения простых чисел. Асимптотический закон распределения простых чисел был доказан в 1896 г. почти одновременно и независимо друг от друга самим Адамаром и де-ла-Валле-Пуссенном. Из этих двух доказательств первое (принадлежащее Адамару) проще, однако де-ла-Валле-Пуссен (в другой работе, опубликованной в 1899 г.) со всей подробностью исследовал вопрос о точности приближения. Его результаты с убедительностью показали, что (как это уже предвидел Чебышев) для всех достаточно больших значений x $\pi(x)$ аппроксимируется посредством Πx более точно, чем посредством функции (4), какое бы значение ни было приписано константе B , а также что наилучшим значением для B в (4) является 1. Правда, это стоит в противоречии с предположением самого

Лежандра, что B приближенно равно 1,08366 (предположением, базирующимся на таблице простых чисел, простирающейся лишь до $x = 400\,000$), однако уже давно было ясно, что лежандрово значение для B имеет лишь исторический интерес.

С того времени вся эта теория была весьма упрощена, так что теоремы де-ла-Валле-Пуссена могут быть теперь доказаны, при желании, совершенно без помощи теории целых функций. Этим мы обязаны почти исключительно работам Ландау. Но сами результаты не претерпели существенного изменения вплоть до 1921 г., когда они были значительно усилены Литтлвудом; однако уточнения, полученные Литтлвудом, заложены чрезвычайно глубоко, и доказательства их потребовали применения очень тонких и сильных аналитических средств.

8. Решениям проблемы, о которых мы говорили выше, можно было бы поставить в упрек то, что они опираются на идеи, чрезвычайно далекие от первоначальной постановки вопроса. Представлялось бы естественным искать доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, не зависящее от теории функций комплексного переменного. Однако до настоящего времени такого доказательства найдено не было. Мы можем пойти даже дальше и усомниться в том, чтобы такое доказательство вообще могло быть найдено, по крайней мере поскольку теория основывается на тождестве Эйлера. Действительно, все известные донные доказательства асимптотического закона распределения простых чисел основываются на некоторых свойствах комплексных нулей функции $\zeta(s)$, и, обратно, эти свойства являются простыми следствиями самого асимптотического закона. Поэтому представляется очевидным, что указанные свойства должны применяться (явно или неявно) во всех доказательствах, основывающихся на функции $\zeta(s)$, и нелегко усмотреть, как бы это можно было выполнить, если ограничиться рассмотрением лишь вещественных значений s .

9. В одном важном отношении теория распределения простых чисел еще очень далека от завершенности. Риман предположил, без какого бы то ни было намека на доказательство, что комплексные нули функции $\zeta(s)$, которые, как Риманом было доказано, содержатся в бесконечной полосе $0 \leq \sigma \leq 1$ плоскости s и симметрично расположены относительно ее центральной прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, все лежат на этой прямой. Это

предположение — знаменитая ныне „гипотеза Римана“ — не было с тех пор ни доказано, ни опровергнуто несмотря на то, что как теоретические соображения, так и эмпирические подсчеты