Р.Н. Бончковский

Математическое просвещение. Выпуск 9

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.Н. Бончковский

Р11 Математическое просвещение. Выпуск 9 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 80 с.

ISBN 978-5-458-25372-7

Сборник рассчитан на широкий круг читателей: сильных школьников, студентов, преподавателей всех видов учебных заведений. Помимо статей сборник содержит указатель математической литературы за 1935 г., задачи и решения задач, помещенных в предыдущих выпусках сборника. Сборник содержит: Деление многочлена на многочлен - О заполнении сферы правильными фигурами - Решение одной системы линейных уравнений - Очерк аналитической теории тригонометрических функций - Об одном экстремальном свойстве точек пересечения биссектрис и углов треугольника - Об одном свойстве треугольника - Связь астроиды и четырехлепесткового венчика - Об одном приближенном способе трисекции угла - Построение стереоскопических проекций геометрических фигур - Аксиомы, эмпирические законы и математические конструкции.

ISBN 978-5-458-25372-7

с получением окончательного остатка процесс деления завершен, то в образовании коэфициента второго члена окончательного остатка коэфициент первого члена окончательного остатка уже не принимает участия, и коэфициент этого второго члена окончательного остатка будет образован как сумма произведений коэфициента последнего (содержащего x в нулевой степени) члена частного на третий член делителя, коэфициента предпоследнего члена частного на четвертый член делителя и так далее, плюс (при применении подвижного делителя) коэфициент делимого, стоящий в одном столбце с коэфициентом первого члена делителя (который, как упомянуто, равен единице); при образовании коэфициента третьего члена остатка аналогично отпадут коэфициенты первого и второго членов окончательного остатка, и этот коэфициент третьего члена остатка получится как алгебраическая сумма произведений коэфициента последнего члена частного на четвертый член делителя, предпоследнего на пятый член делителя и так далее, плюс коэфициент делимого, состоящий в одном столбце с коэфициентами частного и подвижного делителя. Если, по завершении всего этого процесса нахождения остатка, окажутся еще члены делимого, находящиеся вправо от того члена, который стоит в одном столбце с коэфициентом первого члена делителя, то эти члены делимого переносятся без всякого изменения в окончательный остаток.

Иллюстрируем изложенное численным примером

$$(5x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - 2x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 25):$$
$$:(x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 7x^3).$$

1-е положение.

делитель	x^3	x^4	x^5	x^6
	$+7$	-2	$+3$	$+1$

делимое	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	$+5$	-4	$+3$	-2	-3	$+7$	-4	-3	$+2$	-10	$+25$

$K_0 = 5$

частное	5
	x^4

2-е положение.

делитель	x^3	x^4	x^5	x^6
	$+7$	-2	$+3$	$+1$

делимое	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	$+5$	-4	$+3$	-2	-3	$+7$	-4	-3	$+2$	-10	$+25$

частное	$+5$	$+11$
	x^4	x^3

$K_1 = 5 \cdot 3 \quad 4 \cdot 1 = 11$

3-е положение.

$$\text{делитель}\left\{\begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6\\ +7 & -2 & +3 & +1\end{array}\right.$$

$$\text{делимое}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0\\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25\end{array}\right.$$

$$\text{частное}\left\{\begin{array}{ccc} +5 & +11 & +26\\ x^4 & x^3 & x^2\end{array}\right.$$

$K_2 = 5\,(-2) + 11\cdot 3 + 3\cdot 1 = 26.$

4-е положение.

$$\text{делитель}\left\{\begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6\\ +7 & -2 & +3 & +1\end{array}\right.$$

$$\text{делимое}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0\\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25\end{array}\right.$$

$$\text{частное}\left\{\begin{array}{cccc} +5 & +11 & +26 & +89\\ x^4 & x^3 & x^2 & x\end{array}\right.$$

$K_3 = 5\cdot 7 + 11\cdot(-2) + 26\cdot 3 + (-2)\cdot 1 = 89.$

5-е положение.

$$\text{делитель}\left\{\begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6\\ +7 & -2 & +3 & +1\end{array}\right.$$

$$\text{делимое}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0\\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25\end{array}\right.$$

$$\text{частное}\left\{\begin{array}{ccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289\\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0\end{array}\right.$$

$K_4 = 11\cdot 7 + 26\cdot(-2) + 89\cdot 3 + (-3)\cdot 1 = 289.$

6-е положение.

$$\text{делитель}\left\{\begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6\\ +7 & -2 & +3 & +1\end{array}\right.$$

$$\text{делимое}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0\\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}\text{частное}\\ \text{и остаток}\end{array}\left\{\begin{array}{cccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 & +878\\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 & x^5\end{array}\right.$$

$R_0 = 26\cdot 7 + 89\cdot(-2) + 289\cdot 3 + 7\cdot 1 = 878$ (1-й член остатка).

7-е положение.

$$\text{делитель}\left\{\begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6\\ +7 & -2 & +3 & +1\end{array}\right.$$

$$\text{делимое}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0\\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}\text{частное}\\ \text{и остаток}\end{array}\left\{\begin{array}{ccccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 & +878 & +41\\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 & x^5 & x^4\end{array}\right.$$

$R_1 = 89\cdot 7 + 289\cdot(-2) + (-4)\cdot 1 = 41$ (2-й член остатка), 8-е положение.

$$\text{делитель} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right.$$

$$\text{делимое} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}\text{частное} \\ \text{и остаток}\end{array} \left\{ \begin{array}{cccccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 & +878 & +41 & +2020 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 & x^5 & x^4 & x^3 \end{array} \right.$$

$R_2 = 289 \cdot 7 + (-3) \cdot 1 = 2020$ (3-й член остатка).

9-е положение.

$$\text{делитель} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right.$$

$$\text{делимое} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}\text{частное} \\ \text{и остаток}\end{array} \left\{ \underbrace{\begin{array}{ccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array}}_{\text{частное}} \; \underbrace{\begin{array}{cccccc} +878 & +41 & +2020 & +2 & -10 & +25 \\ x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array}}_{\text{остаток}} \right.$$

Кратко же все деление с применением подвижного делителя запишется так

$$\begin{array}{l}\text{подвижной делитель на} \\ \text{отдельной бумажке}\end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right.$$

$$\text{делимое} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^9 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right.$$

$$\text{частное} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array} \right.$$

$$\text{остаток} \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} +878 & +41 & +2020 & +2 & -10 & +25 \\ x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array} \right.$$

Еще пример

$$(5x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - 2x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 25): \\ :(x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 2x - 3).$$

Подвижной делитель $+3 - 2x - x^2 + 7x^3 - 2x^4 + 3x^5 + x^6$,

делимое $5x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - 2x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 25$,

частное $5x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 89x + 284$,

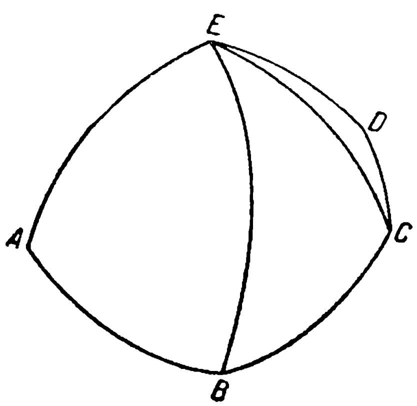
остаток $842x^5 + 18x^4 + 1877x^3 - 382x^2 - 31x + 877$.

Переходя к более сложному случаю, к делению на многочлен, у которого коэфициент наивысшего члена не равен единице, можем или свести этот случай к предыдущему, разделив все члены делимого и делителя на коэфициент наивысшего члена делителя, или же рассматривать этот случай совершенно самостоятельно на основе формул (2).

ЗАПОЛНЕНИЕ СФЕРЫ ПРАВИЛЬНЫМИ ФИГУРАМИ

Е. Вегеман (Курск)[1]

Так как заполнение сферы правильными фигурами имеет не менее важное значение, чем заполнение плоскости правильными фигурами, то я, проработав вопрос о заполнении плоскости (статья Р. Н. Бончковского „Заполнение плоскости правильными многоугольниками“, Математическое просвещение, вып. 3), решил развить эту задачу перенесением ее на сферу.



Фиг. 1.

Заполняя сферу сферическими правильными фигурами, будем соблюдать те же правила, что и на плоскости:

1) Сфера должна быть заполнена сплошь, без просветов и двойных покрытий,

2) Около каждой вершины на сфере должно быть одно и то же расположение фигур.

Прежде чем приступить к основной теме, я докажу одну вспомогательную теорему.

Из сферической тригонометрии известно, что площадь сферического треугольника равна εR^2, где ε — сферический избыток или эксцесс, выраженный в радианах[2]). Легко показать, что формулу εR^2 можно распространить и на всякий сферический многоугольник. Действительно, эксцесс сферического многоугольника $ABCDE...$ (фиг. 1) равен сумме эксцессов составляющих его треугольников ABE, BCE, $CDE, \ldots$, потому что

$$\varepsilon = (2d + \varepsilon_1) + (2d + \varepsilon_2) + \ldots + (2d + \varepsilon_{n-2}) - 2d(n-2) = \\ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-2}.$$

Площадь сферического многоугольника

$$S = \varepsilon_1 R^2 + \varepsilon_2 R^2 + \ldots + \varepsilon_{n-2} R^2 = \varepsilon R^2.$$

Докажем теперь следующую теорему: **если сфера правильно заполнена правильными сферическими фигурами, то** $E = \frac{4\pi}{2\pi - m}$, **где** E **число вершин (точки, вокруг которых расположены сферические фигу-**

---

[1]) Автор статьи — ученик 10-го класса Курской опытной школы № 5. Задача о заполнении сферы правильными многоугольниками представляет в сущности лишь легкое видоизменение задачи о полуправильных многогранниках, которой занимался еще Архимед. Нам казалось все же полезным опубликование этой статьи, так как, с одной стороны, знание теории полуправильных многогранников мало распространено, а с другой стороны, статья является показателем достижений советских школьников. (*Ред.*)

[2]) См., например, Кранц, Сферическая тригонометрия.

ры), а m — сумма плоских углов при вершине многогранника, образованного заменой сферических фигур плоскими.

В самом деле, сумма углов всех сферических многоугольников, расположенных на шаре, равна $2\pi E$.

Сумма всех эксцессов этих фигур равна

$$\frac{S}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi,$$

где S — площадь всей поверхности шара.

Так как сумма всех плоских углов многогранника равна mE, то:

$$4\pi = 2\pi E - mE = E(2\pi - m),$$

откуда

$$E = \frac{4\pi}{2\pi - m},$$

или, если перейти к градусному измерению углов;

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - m^\circ}.$$

На основе этой теоремы построим наше исследование.

Здесь уместно сказать, что если сферические углы правильных сферических фигур — величины неопределенные, то плоские углы плоских правильных фигур определены. Прежде всего совершенно ясно, что угол сферической фигуры не превышает 180° и не меньше 60° [1]). Поэтому около каждой вершины не могут сходиться две или одна фигуры; их должно быть минимум три. Но их не может быть и более пяти. Систематизируем исследование, кладя в основу многоугольник с минимальным количеством углов, участвующим в данном заполнении.

Минимальное n не может быть равно 6, ибо уже в случае плоских фигур $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$, а углы сферического правильного многоугольника всегда больше углов соответствующего плоского многоугольника. Итак, $n_{\min} = 5$ или меньше.

Могут быть три случая: I. $n_{\min} = 5$; II. $n_{\min} = 4$; III. $n_{\min} = 3$.

I. $n_{\min} = 5$. Угол сферического пятиугольника больше 108°. Сумма остальных углов при той же вершине будет всегда меньше $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$; меньший угол из остатка меньше $\frac{252^\circ}{2} = 126^\circ$, стало быть, может принадлежать или пятиугольнику, или шестиугольнику.

Кроме того, около каждой вершины заполнения не может быть более четырех углов, так как уже $4 \cdot 108^\circ > 360^\circ$. Следовательно, их три.

---

[1]) Это ограничение исключает, например, такие многоугольники, все вершины которых лежат на одном большом круге, или такие, площадь которых больше половины площади сферы. (*Ред.*)

Как видно из чертежа (фиг. 2), при $n_2 \neq n_3$ невозможно расположить вокруг пятиугольника n_2-угольники и n_3-угольники так, чтобы в каждой вершине пятиугольника примыкал один n_2-угольник и один n_3-угольник. Поэтому должно быть $n_2 = n_3$. Получаем два случая:

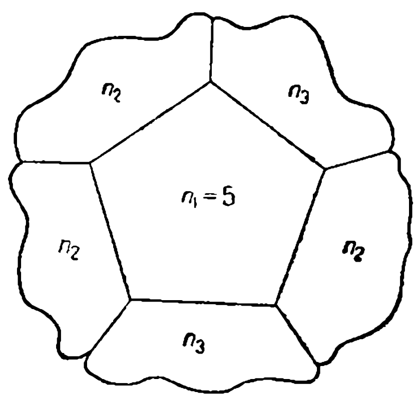
1) $n_1 = 5$; $n_2 = n_3 = 5$.
2) $n_1 = 5$; $n_2 = n_3 = 6$.

Рассмотрим эти два случая отдельно.

1) $n_1 = n_2 = n_3 = 5$. По формуле, выведенной выше, имеем:

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - 3 \cdot 108^\circ} = \frac{720^\circ}{36^\circ} = 20.$$

Если число граней будет F, то всех углов они дадут $5F$; сторон должно быть столько же, поэтому в многограннике вершин будет $\frac{5F}{3}$, а ребер $\frac{5F}{2}$; $E = \frac{5F}{3} = 20$; $F = 12$; $K = \frac{5F}{2} = 30$. Многогранник есть додекаэдр.



Фиг. 2.

Вообще надо заметить, что, несмотря на специфичность проблемы заполнения сферы сферическими фигурами, мы будем ее связывать с проблемой о многогранниках, ввиду крайней близости этих двух проблем.

2) $n_1 = 5$; $n_2 = n_3 = 6$.

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - (108^\circ + 2 \cdot 120^\circ)} = 60.$$

Если число пятиугольников равно p, а шестиугольников — q, то сторон они дадут столько же, сколько и углов, т. е. $5p + 6q$, откуда число вершин $E = \frac{5p + 6q}{3} = 60$, число ребер $K = \frac{5p + 6q}{2} = 90$.

По теореме Эйлера $K + 2 = E + F$, имеем $F = K + 2 - E = 32$. Около каждой вершины сходятся два шестиугольника. Если бы каждая вершина действительно давала начало различным парам шестиугольников, то шестиугольников было бы $2E = 120$. Но так как шесть вершин дают только один шестиугольник, то шестиугольников будет в шесть раз меньше, т. е. 20. Итак, $q = 20$; $p = 32 - 20 = 12$.

II. $n_{\min} = 4$. Углов при вершине опять не может быть больше трех, так как $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Следовательно, углов три. Сумма двух остальных углов при той же вершине меньше $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$; меньший из них меньше $\frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$, откуда $n_2 = 4, 5, 6, 7$ (здесь необходимо добавить, что в дальнейшем, так же как и вначале,

n_1, n_2, n_3, n_4 и т. д. мы будем располагать в порядке возрастания: $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4 \ldots$). Если $n_2 = 5$ или 7, то $n_3 = 4$, что ясно, если построить фигуру, аналогичную фиг. 2. Так как здесь прогрессивный порядок не соблюден, то значения $n_2 = 5$ или 7 отпадают. Итак, $n_2 = 4$ или 6. В последнем случае n_3 не может быть нечетным, что опять-таки следует из рассмотрения фигуры, аналогичной фиг. 2.

Итак, имеем два случая:

1) $n_1 = n_2 = 4$; $n_3 = ?$

2) $n_1 = 4$; $n_2 = 6$; $n_3 = ?$ (n_3 — четно).

1) $n_1 = n_2 = 4$; $n_3 = ?$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - \left(180^\circ + 180^\circ \cdot \frac{n_3 - 2}{n_3}\right)} = 2n_3,$$

откуда видно, что n_3 произвольно.

Если квадратов p, а n_3-угольников q, то

$$E = \frac{4p + n_3 q}{3} = 2n_3; \quad K = \frac{4p + n_3 q}{2} = 3n_3;$$

$$F = K - E + 2 = n_3 + 2; \quad p = \frac{2 \cdot 2n_3}{4} = n_3; \quad q = 2.$$

2) $n_1 = 4$; $n_2 = 6$; $n_3 = ?$ (n_3 — четно)

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - \left(210^\circ + 180^\circ \cdot \frac{n_3 - 2}{n_3}\right)} = \frac{24n_3}{12 - n_3}.$$

Но $n_3 \geqslant n_2$; поэтому $n_3 \geqslant 6$ и при этом четно. E должно быть целым числом, поэтому $\frac{24n_3 + 24(12 - n_3)}{12 - n_3} = \frac{288}{12 - n_3}$ тоже должно быть числом целым; $(12 - n_3)$ является делителем числа 288 и может принимать значения 6, 4 и 2. Итак:

1) $n_1 = 4$; $n_2 = n_3 = 6$; $E = 24$; $K = 36$; $F = 14$; $p = 6$; $q = 8$.

2) $n_1 = 4$; $n_2 = 6$; $n_3 = 8$; $E = 48$; $K = 72$; $F = 26$; $p = 12$; $q = 8$; $r = 6$.

3) $n_1 = 4$; $n_2 = 6$; $n_3 = 10$; $E = 120$; $K = 180$; $F = 62$; $p = 30$; $q = 20$; $r = 12$,

где r — число n_3-угольников.

III. $n_{\min} = 3$. Максимум фигур, сходящихся в данном случае около вершины, всегда меньше $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$, стало быть, он равен 5.

А. Пусть их пять. Полагая опять $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4' \leqslant n_5$, видим, что угол n_2-угольника меньше $\frac{360^\circ - 60^\circ}{4} = 75$. Стало быть, $n_2 = 3$. Меньший из остальных трех углов меньше

$$\frac{360^\circ - 120^\circ}{3} = 80^\circ.$$

Стало быть, $n_3=3$. Меньший угол из последних двух углов меньше $\frac{360^\circ-180^\circ}{2}=90^\circ$. Стало быть, $n_4=3$. Наконец, последний угол меньше $360^\circ-240^\circ=120^\circ$. Стало быть, $n_5=3, 4, 5$.

1) $n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=3$.

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-300^\circ}=12;\quad K=30;\quad F=20.$$

2) $n_1=n_2=n_3=n_4=3;\quad n_5=4$.

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-330^\circ}=24;\quad K=30;\quad F=38;\quad p=32;\quad q=6.$$

3) $n_1=n_2=n_3=n_4=3;\quad n_5=5$.

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-348^\circ}=60;\quad K=150;\quad F=92;\quad p=80;\quad q=12.$$

B. Пусть фигур около каждой вершины четыре: $n_1=3$; угол n_2-угольника меньше $\frac{360^\circ-60^\circ}{3}=100^\circ$. Стало быть, он принадлежит или треугольнику, или квадрату. Имеем два случая:

1) $n_1=n_2=3;\quad n_3=?;\quad n_4=?$

Остаток из двух углов меньше $360^\circ-120^\circ=240^\circ$. Меньший угол из остатка меньше $\frac{240^\circ}{2}=120^\circ$. Итак, $n_3=3, 4, 5$.

a) $n_1=n_2=n_3=3;\quad n_4=?$

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-\left(180^\circ+180^\circ\cdot\frac{n_4-2}{n_4}\right)}=2n_4,$$

откуда видно, что n_4 — произвольно.

В этом случае возможно бесконечное множество покрытий.

b) $n_1=n_2=3;\quad n_3=4;\quad n_4=?$

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-\left(210^\circ+180^\circ\cdot\frac{n_4-2}{n_4}\right)}=\frac{24n_4}{12-n_4}.$$

Если $\frac{24n_4}{12-n_4}$ целое число, то $\frac{24n_4+24(12-n_4)}{12-n_4}$ тоже целое число. $\frac{288}{12-n_4}$ может быть целым числом лишь тогда, когда $12-n_4$ является делителем числа 288. Кроме того, $4\leqslant n_4<12$. Поэтому возможны следующие случаи $12-n_4=8, 6, 4, 3, 2, 1$. Значит, $n_4=4, 6, 8, 9, 10, 11$. Итак, имеем шесть возможностей:

$n_1=n_2=3,\ n_3=n_4=4;\qquad E=12;\quad K=24;\quad F=14;\quad p=8;$
$q=6.$

$n_1=n_2=3,\ n_3=4,\ n_4=6;\quad E=24;\quad K=48;\quad F=26;\quad p=16;$
$q=6;\quad r=4.$

$n_1=n_2=3,\ n_3=4,\ n_4=8;\ E=48;\ K=96;\ F=50;\ p=32;$
$q=12;\ r=6.$

$n_1=n_2=3,\ n_3=4,\ n_4=9;\ E=72;\ K=144;\ F=74;\ p=48;$
$q=18;\ r=8.$

$n_1=n_2=3,\ n_3=4,\ n_4=10;\ E=120;\ K=240;\ F=122;\ p=80;$
$q=30;\ r=12.$

$n_1=n_2=3,\ n_3=4,\ n_4=11;\ E=264;\ K=528;\ F=266;\ p=176;$
$q=66;\ r=24.$

c) $n_1=n_2=3,\quad n_3=5,\quad n_4=?$

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-\left(228^\circ+180^\circ\cdot\frac{n_4-2}{n_4}\right)}=\frac{30n_4}{15-2n_4}.$$

Значит, $\frac{30n_4+15(15-2n_4)}{15-2n_4}=\frac{225}{15-2n_4}$ — целое число. Возможны следующие случаи: $15-2n_4=5,\ 3,\ 1$, откуда $n_4=5,\ 6,\ 7$. Получаем три возможности:

$n_1=n_2=3,\ n_3=n_4=5;\ E=30;\ K=60;\ F=32;\ p=20;$
$q=12.$

$n_1=n_2=3,\ n_3=5,\ n_4=6;\ E=60;\ K=120;\ F=62;\ p=40;$
$q=12;\ r=10.$

$n_1=n_2=3,\ n_3=5,\ n_4=7;\ E=210;\ K=420;\ F=212;\ p=140;$
$q=42;\ r=30.$

2) $n_1=3,\ n_2=4,\ n_3=?,\ n_4=?$

Сумма углов n_3-угольника и n_4-угольника, принадлежащих к одной вершине, меньше чем $360^\circ-150^\circ=210^\circ$. Меньший из этих углов меньше $\frac{210^\circ}{2}=105^\circ$. Отсюда $n_3=4$. Самый большой из всех углов меньше $360^\circ-240^\circ=120^\circ$.

Отсюда $n_4=4,\ 5$.

a) $n_1=3,\ n_2=n_3=n_4=4.$

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-330^\circ}=24;\ K=48;\ F=26;\ p=8;\ q=18.$$

b) $n_1=3,\quad n_2=n_3=4,\ n_4=5.$

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-348^\circ}=60;\ K=120;\ F=62;\ p=20;\ q=30;\ r=12.$$

C. Пусть около каждой вершины сходятся три фигуры. Тогда по известным соображениям $n_2=n_3$; если $n_2=n_3$ нечетны, то по тем же соображениям $n_1=n_2=n_3=3$. Итак, имеем один случай:

1) $n_1=3,\quad n_2=n_3=n.$

$$E=\frac{720^\circ}{360^\circ-\left(60^\circ+360^\circ\cdot\frac{n-2}{n}\right)}=\frac{12n}{12-n};$$

$\frac{144}{12-n}$ целое число. За исключением $n=3$, имеем одни лишь четные значения n:

$$12-n=9,\ 8,\ 6,\ 4,\ \ 2,$$
$$n=3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10.$$

Получаем пять возможностей:

$n_1=n_2=n_3=3;\quad E=4;\quad K=6;\quad F=4.$

$n_1=3,\ n_2=n_3=4;\quad E=6;\quad K=9;\quad F=5;\quad p=2;\quad q=3.$

$n_1=3,\ n_2=n_3=6;\quad E=12;\quad K=18;\quad F=8;\quad p=4;\quad q=4.$

$n_1=3,\ n_2=n_3=8;\quad E=24;\quad K=36;\quad F=14;\quad p=8;\quad q=6.$

$n_1=3,\ n_2=n_3=10;\quad E=60;\quad K=90;\quad F=32;\quad p=20;\quad q=12.$

Полученные результаты представлены следующей таблицей:

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	E	F	K	p	q	r
1	5	5	5	—	—	20	12	30	—	—	—
2	5	6	6	—	—	60	32	90	12	20	—
3	4	4	n	—	—	$2n$	$n+2$	$3n$	n	2	—
4	4	6	6	—	—	24	14	36	6	8	—
5	4	6	8	—	—	48	26	72	12	8	6
6	4	6	10	—	—	120	64	180	30	20	12
7	3	3	3	3	3	12	20	30	—	—	—
8	3	3	3	3	4	24	38	60	32	6	—
9	3	3	3	3	5	60	92	150	80	12	—
10	3	3	3	n	—	$2n$	$2n+2$	$4n$	$2n$	2	—
11	3	3	4	4	—	12	14	24	8	6	—
12	3	3	4	6	—	24	26	48	16	6	4
13	3	3	4	8	—	48	50	96	32	12	6
14	3	3	4	9	—	72	74	144	48	18	8
15	3	3	4	10	—	120	122	240	80	30	12
16	3	3	4	11	—	264	266	528	176	66	24
17	3	3	5	5	—	30	32	60	20	12	—
18	3	3	5	6	—	60	62	120	40	12	10
19	3	3	5	7	—	210	212	420	140	42	30
20	3	4	4	4	—	24	26	48	8	18	—
21	3	4	4	5	—	60	62	120	20	30	12
22	3	3	3	—	—	4	4	6	—	—	—
23	3	4	4	—	—	6	5	9	2	3	—
24	3	6	6	—	—	12	8	18	4	4	—
25	3	8	8	—	—	24	14	36	8	6	—
26	3	10	10	—	—	60	32	90	20	12	—

Необходимо далее исследовать, какие из этих заполнений в действительности могут быть реализованы [1]).

[1]) В действительности могут быть реализованы лишь заполнения, стоящие в таблице под номерами 1—11, 17, 20—22, 24—26. (*Ред.*)