Я.И. Френкель

Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Я11

Я.И. Френкель

Я11 Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа / Я. И. Френкель – М.: Книга по Требованию, 2024. – 436 с.

ISBN 978-5-458-26459-4

«Настоящая книга представляет собой переработанное и расширенное издание моей книги «Курс векторного и тензорного анализа с приложениями к механике», вышедшей в 1925 г. и воспроизводившей в основных чертах курс, читанный мной на физико-механическом факультете Ленинградского политехнического института. Впоследствии этот курс был расширен и превращен в курс теоретической механики, как части общей системы теоретической физики. Это расширение выразилось в прибавлении к курсу векторного и тензорного анализа, являвшемуся вместе с тем введением в теоретическую механику, специальных глав, посвященных подробному развитию принципов аналитической механики (уравнения Лагранжа и Гамильтона, вариационные принципы, теория Гамильтона-Якоби и т. д.), а также специальным задачам гидродинамики и теории упругости. В настоящей книге этим специальным задачам уделено сравнительно немного места, в остальных отношениях она довольно точно соответствует курсу теоретической механики, читаемому в течение ряда лет мной и моими сотрудниками по кафедре теоретической физики на инженерно-физическом (бывш. физико-механическом) факультете Ленинградского индустриального института... Предлагаемая книга является введением в теоретическую механику как часть курса теоретической физики, ориентируя читателя по всем вопросам теоретической механики - особенно же таким, которые имеют специальный физический интерес».

ISBN 978-5-458-26459-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Стр.

Отдел IV. **ТЕНЗОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Отдел V. **ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ И КОНТИНУУМА**

ОТДЕЛ I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦЫ И СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

ГЛАВА I

ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ И ВЕКТОРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОТ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Разложение и сложение векторов

Физические величины разделяются обычно на скалярные, которые характеризуются одним лишь численным значением, и векторные, характеризующиеся, помимо численного значения, определенным направлением в пространстве; кроме того встречаются величины более сложные, соответствующие совокупности двух или более векторов — так называемые тензоры.

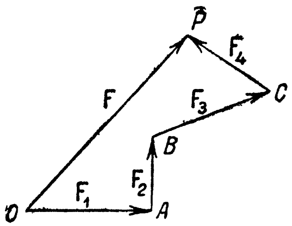

Рис. 1.

Прототипом векторных величин является прямолинейный отрезок, обыкновенно связываемый с представлением о пространственном перемещении материальной частицы из какой-нибудь начальной точки O в некоторую другую точку P, но, вообще говоря, служащий для графического представления всевозможных векторных величин. Вышеозначенное перемещение $\overrightarrow{OP}$ (рис. 1) может быть заменено совокупностью двух или нескольких перемещений $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CP}$, которые называются составляющими. Подобная замена называется разложением отрезка (или перемещения) $\overrightarrow{OP}$ на составляющие отрезки (или перемещения).

Обратная операция, сводящаяся к замене нескольких отрезков одним, по отношению к которому они играют роль составляющих (при совмещении начала каждого из них с концом предыдущего), называется геометрическим или векторным сложением. Соответственно этому составляющие отрезки называются слагаемыми, а результирующий (соединяющий начало первого с концом последнего) — геометрической суммой их.

Операция геометрического сложения выражается символически формулой

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \ldots, \qquad (1)$$

где в рассматриваемом случае (рис 1) $\mathbf{F} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{F}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{F}_2 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{F}_3 = \overrightarrow{BC}$ и $\mathbf{F}_4 = \overrightarrow{CP}$.

Геометрическую сумму не следует смешивать с арифметической, относящейся к численным значениям отрезков, т. е. к их длинам. Эти численные значения мы будем в дальнейшем обозначать символами соответствующих векторов (отрезков), либо заключая их в прямые скобки, либо же отбрасывая стрелки (в случае одной буквы). Так например длина отрезка $\mathbf{F}$ представляется символом $|\mathbf{F}|$ или F.

Численное значение геометрической суммы всегда меньше арифметической суммы слагаемых. это следует из того, что прямая OP короче всякой ломаной (например $OABCP$), проходящей через ее концы. Само собою разумеется, что если все слагаемые отрезки имеют одно и то же направление, т. е. образуют прямую линию, то их арифметическая сумма совпадает с численным значением геометрической. Таким образом мы имеем следующее соотношение:

$$F \leqslant F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$$

или

$$|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots| \leqslant |\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2| + |\mathbf{F}_3| + \ldots \tag{2}$$

При геометрическом сложении нескольких отрезков они передвигаются таким образом, чтобы начало одного совпадало с концом предыдущего; геометрическая сумма изображается отрезком, соединяющим начало первого с концом последнего. При этом порядок, в котором они „прикладываются" друг к другу, остается совершенно безразличным; другими словами — геометрическая сумма не зависит от порядка слагаемых (свойство „переместительности", или коммутативности). В случае двух слагаемых эта теорема доказывается следующим образом: Построим параллелограм на отрезках $\overrightarrow{OP} = \mathbf{F}$ и $\overrightarrow{OP'} = \mathbf{F}'$ (рис. 2). Так как $\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ и так как далее $\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{OP} = \mathbf{F}$ и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP'} = \mathbf{F}'$, то отсюда следует:

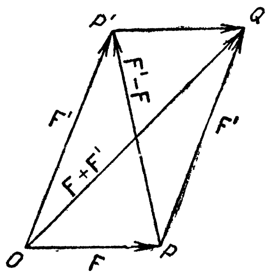

Рис. 2.

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{F}' + \mathbf{F}. \tag{3}$$

Это доказательство легко обобщается на случай нескольких слагаемых, путем последовательного применения формулы (3) к отдельным парам.

Вектор, численно равный данному ($\mathbf{F}$) и противоположный ему по направлению, обозначается тем же символом со знаком **минус** ($-\mathbf{F}$). Сложение вектора $\mathbf{F}'$ с вектором противоположным $\mathbf{F}$, т. е. равным $-\mathbf{F}$, называется **геометрическим вычитанием**, а сумма $\mathbf{F}' + (-\mathbf{F})$, обозначаемая в виде $\mathbf{F}' - \mathbf{F}$ — **геометрической разностью**. Геометрическую разность векторов $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}$ можно также определить как такой вектор $\Delta\mathbf{F}$, который нужно прибавить к $\mathbf{F}$, чтобы получить $\mathbf{F}'$. На рис. 2 он изображается отрезком $\overrightarrow{PP'}$.

Различные векторные величины — скорости, ускорения, силы и т. п. — изображаются графически таким же образом, как и перемещения, т. е. в виде прямолинейных отрезков одинакового с ними направления и пропорциональной длины. Соответственно геометрическому разложению (или сложению) изображающих их отрезков, все эти величины могут разлагаться на составляющие (или складываться в результирующие), им в совокупности эквивалентны. Впрочем, вопрос об „эквивалентности“ (с физической точки зрения) не имеет существенного значения. Так например, в случае единичных векторов (или „ортов“), служащих для характеристики направления и численно равных 1, разложение на составляющие, вполне допустимое с математической точки зрения, лишено, очевидно, всякого физического смысла.

Заметим, что под произведением скалярной величины φ на вектор $\mathbf{F}$ подразумевается вектор $\varphi\mathbf{F}$, совпадающий с $\mathbf{F}$ по направлению и численно равный φF. Так например, если φ есть масса некоторой материальной частицы, а $\mathbf{F}$ — ее скорость, то произведение $\varphi\mathbf{F}$ представляет собой так называемое количество движения частицы. Полагая $\varphi = \frac{1}{F}$, получаем единичный вектор

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{F}}{F},$$

характеризующий направление $\mathbf{F}$.

Умножая $\mathbf{F}_1$ на $\frac{1}{F}$, получаем, далее, вектор

$$\frac{\mathbf{F}_1}{F} = \frac{\mathbf{F}}{F^2},$$

одинаковый с $\mathbf{F}$ по направлению и обратный по величине. Этот „обратный“ вектор мы будем в дальнейшем обозначать символом

$$\frac{1}{\mathbf{F}} \quad \text{или} \quad \mathbf{F}^{-1}.$$

§ 2. Проектирование отрезков и скалярное умножение векторов

Под проекцией отрезка $\overrightarrow{OP}$ на какую-либо прямую $\overrightarrow{MN}$ подразумевается, как известно, длина отрезка O_1P_1, отсекаемого на этой прямой перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через концы отрезка $\overrightarrow{OP}$. Если при этом направление от O_1 к P_1 совпадает с положительным направлением прямой $\overrightarrow{MN}$, то проекции приписывается положительное значение, а в противоположном случае — отрицательное.

Обозначая угол между направлениями $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{MN}$ через α, мы можем положить в обоих случаях $O_1P_1 = OP \cdot \cos\alpha$. Если отрезок $\overrightarrow{OP}$ представляет собой геометрическую сумму отрезков $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{QP}$, или $\overrightarrow{OR}$ и $\overrightarrow{RP}$, то проекция $\overrightarrow{OP}$, как видно из чертежа, равна алгебраической сумме проекций $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{QP}$, взятых с соответствующими знаками (так например: $O_1P_1 = O_1Q_1 + Q_1P_1 = O_1R_1 + R_1P_1$, где $R_1P_1 = -P_1R_1$).

Эта теорема легко обобщается на случай произвольного числа составляющих: алгебраическая сумма проекций отрезков, образующих произвольную ломаную линию (например $OABCP$, рис. 1) равна проекции замыкающего или „результирующего“ отрезка (OP). Указанная теорема остается в силе для произвольных векторных величин (скоростей, ускорений, сил и т. д.), поскольку все они могут изображаться прямолинейными отрезками и разлагаться соответствующим образом на составляющие.

Характеризуя направление проектирующей прямой каким-либо вектором $\mathbf{n}$, мы будем обозначать проекцию любого вектора $\mathbf{F}$ на эту прямую символом F_n или $|\mathbf{F}|_n$. Таким образом предыдущее соотношение между геометрической суммой нескольких векторов и алгебраической суммой их проекций можно выразить следующим равенством:

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}|_n = A_n + B_n + C_n + D_n. \tag{4}$$

Произведение численного значения вектора $\mathbf{A}$, с одной стороны, и проекции некоторого другого вектора $\mathbf{B}$ на направление $\mathbf{A}$, с другой, — называется скалярным или внутренним произведением обоих векторов и обозначается символом $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ [1]). Пользуясь предыдущим обозначением, мы можем представить его в виде $A\cdot B_A$. Если угол между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ равен α, то $B_A = B\cos\alpha$ и, следовательно, $A\cdot B_A = AB\cos\alpha = BA\cos\alpha = B\cdot A_B$. Таким образом скалярное произведение двух векторов не зависит от порядка сомножителей, т. е.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}. \tag{5}$$

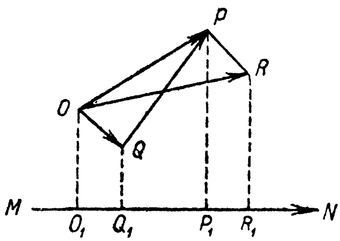

Рис. 3.

В случае их взаимной перпендикулярности оно обращается в нуль.

Скалярное произведение представляет собою скалярную величину. Перемножаемые векторы могут иметь различную природу; так например, если $\mathbf{A}$ есть вектор силы, действующей на некоторую частицу, а $\mathbf{B}$ — перемещение последней, то $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ представляет собою величину соответствующей работы.

Заметим, что проекцию какого-либо вектора $\mathbf{A}$ на направление единичного вектора $\mathbf{n}$ можно представить в виде скалярного произведения $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}$.

Если один из умножаемых векторов, например $\mathbf{B}$, равен геометрической сумме нескольких других векторов $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ и т. д., то согласно формуле (4) можно положить

$$B_A = C_A + D_A + \ldots$$

и, следовательно:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A(C_A + D_A + \ldots) = AC_A + AD_A + \ldots = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \ldots$$

Этот результат легко обобщается на тот случай, если оба сомножителя разлагаются на несколько составляющих; так например, полагая $\mathbf{A} = \sum\limits_i \mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B} = \sum\limits_k \mathbf{B}_k$, имеем:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \Big(\sum_i \mathbf{A}_i\Big)\cdot\Big(\sum_k \mathbf{B}_k\Big) = \sum_i\sum_k \mathbf{A}_i\cdot\mathbf{B}_k. \tag{6}$$

[1]) Весьма употребителен также символ $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Формулы (5) и (6) показывают, что скалярное произведение двух векторов обладает, подобно алгебраическим произведениям скалярных величин, свойствами переместительности и распределительности (чего нельзя сказать по отношению к сочетательному свойству, так как скалярное произведение трех и более векторов не имеет смысла).

§ 3. Проектирование площадей и векторное умножение векторов

Всякой плоскости, определенным образом ориентированной в пространстве, можно привести в соответствие перпендикулярную к ней прямую. Это соответствие, вытекающее из трехмерности пространства, составляет сущность закона „взаимности" между прямыми и плоскостями. Таким образом площадь всякой плоской фигуры (S), ограниченной некоторым замкнутым контуром (C), можно трактовать как векторную величину и изображать перпендикулярным к ней отрезком пропорциональной длины. Впрочем, площадь может быть связана с односторонним направлением вдоль соответствующего перпендикуляра лишь в том случае, если на контуре, ее ограничивающем, задано определенное направление обхода или „вращения". Обычно отрезок $\overrightarrow{OP}$, изображающий данную площадь (S) (рис. 4), направляется в ту сторону, куда нужно смотреть для того, чтобы это вращение совершалось по часовой стрелке, или, другими словами, в сторону поступательного движения обыкновенного „правого" винта, поворачиваемого в направлении контура (C).

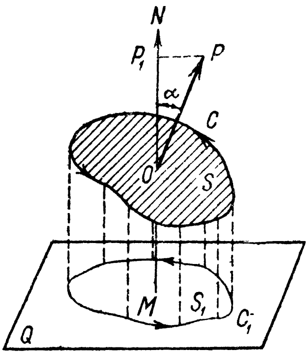

Рис. 4.

Под проекцией площади S на какую-либо плоскость Q подразумевается площадь S_1, вырезаемая на плоскости Q перпендикулярными к ней прямыми, проведенными через точки контура C, ограничивающего S. При этом, для определенности, на проектирующей плоскости (Q) задается определенное „положительное" направление обхода; если последнее совпадает с направлением обхода по контуру C_1, ограничивающему S_1 (направление C_1 определяется однозначным образом направлением C), то площадь S_1 считается положительной, а в противоположном случае — отрицательной. Что касается ее численного значения, то оно равно, как нетрудно убедиться, произведению проектируемой площади S на косинус двугранного угла α (или $\pi - \alpha$) между плоскостями S и Q.

В самом деле, в направлениях, параллельных грани вышеозначенного угла (т. е. линии пересечения плоскостей S и Q), линейные размеры обеих фигур S и S_1 остаются одинаковыми, тогда как в направлениях, к ней перпендикулярных, линейные размеры S_1 сокращены в сравнении с соответствующими размерами S в отношении $\cos\alpha : 1$. А так как площадь всякой плоской фигуры пропорциональна произведению ее линейных размеров в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, то мы можем положить

$$S_1 = \pm S \cos \alpha.$$

Отсюда видно, что проекция S на плоскость Q совпадает по величине и по знаку с проекцией OP_1 отрезка $\overrightarrow{OP}$, изображающего S, на прямую $\overrightarrow{MN}$, перпендикулярную к Q и проведенную в сторону, соответствующую положительному направлению обхода на проектирующей плоскости (так же как направление $\overrightarrow{OP}$ соответствует направлению обхода по контуру, ограничивающему S).

Если контур C состоит из прямолинейных отрезков, т. е. представляет собой замкнутый многоугольник, то рассматриваемая плоская фигура (S) может быть „разложена“ на совокупность нескольких плоских фигур, которые образуют многогранную поверхность, ограниченную контуром C. Эта многогранная поверхность „эквивалентна“ S — в том смысле, что проекция S на любую плоскость равна алгебраической сумме проекций „составляющих“ ее плоских фигур, т. е. в том же смысле, в каком совокупность прямолинейных отрезков, изображающих эти фигуры, эквивалентна результирующему отрезку $\overrightarrow{OP}$, изображающему S. Само собой разумеется, что направление обхода по элементарным контурам, ограничивающим „составляющие“ плоские фигуры, должно выбираться в соответствии с направлением обхода по внешнему контуру; при этом каждый из прямолинейных отрезков, разграничивающих две подобные фигуры, при обходе тех двух контуров, к которым он принадлежит, проходится в противоположных направлениях (рис. 5).

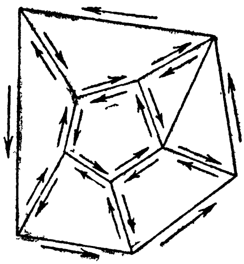

Рис 5.

Вышеуказанное разложение на плоские фигуры представляется, очевидно, возможным и в том случае, если исходная фигура не является плоской, т. е. если контур C имеет вид неплоского многоугольника. Изображая каждую из составляющих фигур перпендикулярным к ней отрезком соответствующей длины, мы можем рассматривать геометрическую сумму этих отрезков $\overrightarrow{OP}$ как изображение исходной фигуры. Нетрудно убедиться, что это определение вполне однозначно, т. е. что отрезок $\overrightarrow{OP}$ не зависит от способа подразделения контура C на составляющие (плоские) контуры. Хотя, таким образом, в этом случае с контуром C не связывается представления об определенной площади (соответствующей S), тем не менее площадь S_1, вырезываемая на любой плоскости Q проекцией C_1 контура C, остается попрежнему равной проекции OP_1 отрезка $\overrightarrow{OP}$ на прямую MN, перпендикулярную к этой плоскости.

Отрезок $\overrightarrow{OP}$ или, вернее, изображаемый им вектор, характеризующий форму и расположение замкнутого контура C, мы будем в дальнейшем называть моментом этого контура. Это определение может быть распространено на произвольные криволинейные контуры, если рассматривать их как предельную форму замкнутых многоугольников с бесконечно-малыми сторонами. При этом соответствующие составляющие плоские фигуры превращаются в бесконечно-малые элементы произвольной (кривой) поверхности, ограничиваемой данным контуром.

Простейшей плоской фигурой является параллелограм (или треугольник, который всегда можно трактовать как половину параллелограма). Момент параллелограма, построенного на двух отрезках $\mathbf{A}=\overrightarrow{OP}$ и $\mathbf{B}=\overrightarrow{OQ}$, при направлении обхода, соответствующем перемещению в направлении $\mathbf{A}$, и в направлении противоположном $\mathbf{B}$, называется векторным или внешним произведением отрезка $\mathbf{A}$ на отрезок $\mathbf{B}$ и обозначается символом $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$[1]). Таким образом вектор $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, будучи численно равен площади параллелограма $OPRQ$ со сторонами $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$ и $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PR}$ (рис. 6), направлен по перпендикуляру к плоскости этого параллелограма в ту сторону, куда движется обыкновенный (правый) винт при вращении от $\overrightarrow{OP}$ к $\overrightarrow{OQ}$ на угол $\alpha<180^\circ$ (т. е. в рассматриваемом случае от читателя).

Из этого определения следует, что векторным произведением $\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}$ является вектор, противоположный предыдущему, т. е. равный $-\mathbf{C}$.

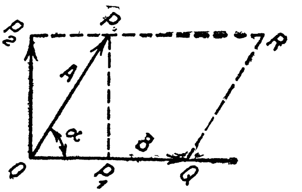

Рис. 6.

Таким образом мы имеем следующее равенство:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}, \tag{7}$$

показывающее, что векторное произведение, в противоположность скалярному, свойством переместительности не обладает.

Площадь параллелограма равна произведению одной из его сторон на соответствующую высоту; последнюю можно рассматривать как проекцию другой стороны на прямую, перпендикулярную к первой. Обозначая угол между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ через α, имеем, следовательно:

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{B}\times\mathbf{A}|=A\cdot B\sin\alpha. \tag{8}$$

В случае параллельности двух векторов их векторное произведение обращается в нуль. В общем случае, разлагая один из векторов, например $\overrightarrow{OP}$, на составляющие $\overrightarrow{OP_1}=\mathbf{A}_1$ и $\overrightarrow{OP_2}=\mathbf{A}_2$, соответственно параллельную и перпендикулярную к $\overrightarrow{OQ}$ (рис. 6), мы можем очевидно положить

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)\times\mathbf{B}=\mathbf{A}_2\times\mathbf{B}+\mathbf{A}_1\times\mathbf{B}=\mathbf{A}_2\times\mathbf{B}$$

(ибо, согласно предыдущему, $\mathbf{A}_1\times\mathbf{B}=0$). Равенство

$$(\mathbf{E}+\mathbf{F})\times\mathbf{B}=\mathbf{E}\times\mathbf{B}+\mathbf{F}\times\mathbf{B} \tag{9}$$

выражающее распределительное свойство векторного произведения, легко обобщается на случай произвольных векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$. Так например, если последние представляют собой составляющие вектора $\mathbf{A}=\overrightarrow{OP}$, то, проводя отрезки $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{QT}=\mathbf{E}$ и $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{TR}=\mathbf{F}$ (рис. 7), мы можем

[1]) Или же $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.