

Я.И. Френкель

**Курс теоретической
механики на основе
векторного и тензорного
анализа**

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Я11

Я11 **Я.И. Френкель**
Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа / Я.
И. Френкель – М.: Книга по Требованию, 2024. – 436 с.

ISBN 978-5-458-26459-4

«Настоящая книга представляет собой переработанное и расширенное из-
дание моей книги «Курс векторного и тензорного анализа с приложениями
к механике», вышедшей в 1925 г. и воспроизведившей в основных чертах курс,
читанный мной на физико-механическом факультете Ленинградского поли-
технического института. Впоследствии этот курс был расширен и превращен
в курс теоретической механики, как части общей системы теоретической
физики. Это расширение выразилось в прибавлении к курсу векторного и тензорного анализа, явившемуся вместе с тем введением в теоретическую
механику, специальных глав, посвященных подробному развитию принципов
аналитической механики (уравнения Лагранжа и Гамильтона, вариационные
принципы, теория Гамильтона-Якоби и т. д.), а также специальным задачам
гидродинамики и теории упругости. В настоящей книге этим специальным
задачам удалено сравнительно немного места, в остальных отношениях она
довольно точно соответствует курсу теоретической механики, читаемому
в течение ряда лет мной и моими сотрудниками по кафедре теоретической
физики на инженерно-физическом (бывш. физико-механическом) факультете
Ленинградского индустриального института... Предлагаемая книга является
введением в теоретическую механику как часть курса теоретической физики,
ориентируя читателя по всем вопросам теоретической механики - особенно
же таким, которые имеют специальный физический интерес».

ISBN 978-5-458-26459-4

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

О ГЛАВЛЕНИЕ

	С.р.
Предисловие	3
Отдел I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦЫ И СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ.	
Глава I. Операции над векторами и векторными функциями от скалярного аргумента	8
§ 1. Разложение и сложение векторов	8
§ 2. Проектирование отрезков и скалярное умножение векторов .	10
§ 3. Проектирование площадей и векторное умножение векторов .	12
§ 4. Комбинированные операции умножения	16
§ 5. Деление векторов и решение линейных векторных уравнений .	18
§ 6. Векторные операции в прямолинейных и прямоугольных координатах	20
§ 7. Двухмерные векторы и комплексные числа; гиперкомплексные числа и векторы в многомерном пространстве	24
Глава II. Механика частицы (материальной точки)	29
§ 8. Дифференцирование и интегрирование векторов по скалярному (времени) и кинематика частицы	29
§ 9. Общие принципы динамики частицы (количество движения, энергия, момент количества движения и вириал)	33
§ 10. Движение частицы под действием упругой силы	37
§ 11. Вынужденные колебания, резонанс и влияние сил трения .	40
§ 12. Влияние сил трения на свободные и вынужденные колебания	42
§ 13. Движение частицы под действием силы, обратно-пропорциональной квадрату расстояния	46
§ 14. Влияние добавочной силы, обратно-пропорциональной кубу расстояния от неподвижной точки	48
§ 15. Основы релятивистской (Эйнштейновской) механики	52
Глава III. Механика системы частиц	57
§ 16. Общие принципы механики системы частиц	57
§ 17. Система двух частиц и общая теория столкновений	62
§ 18. Принципы обратимости симметрии и относительности	67
Глава IV. Механика твердого тела	70
§ 19. Кинематика твердого тела	70
§ 20. Движение частицы относительно вращающегося твердого тела; Кориолисова и центробежная силы	73
§ 21. Динамика твердого тела с закрепленной точкой	74
§ 22. Движение волчка, прецессия и нутация	76
Отдел II. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ГИДРОМЕХАНИКЕ	
Глава I. Операции над скалярными и векторными функциями от векторного аргумента	78
§ 1. Общая характеристика функций от векторного аргумента	78
§ 2. Дифференцирование функций от векторного аргумента	82

	Стр.
§ 3. Исследование операций векторного дифференцирования	85
§ 4. Основные правила векторного дифференцирования	91
§ 5. Дифференциальные операции второго порядка	98
§ 6. Операции векторного дифференцирования в прямоугольных координатах	101
Г л а в а II. Векторные поля и кинематика жидкостей	104
§ 7. Постановка задачи; скалярный и векторный потенциалы	104
§ 8. Источники и стоки	105
§ 9. Вихревые линии	110
§ 10. Двойные слои	115
§ 11. Определение потенциального поля в ограниченной области; функция Грина	118
§ 12. Теорема Дирихле	122
§ 13. Определение соленоидального поля в ограниченной области	125
§ 14. Векторный анализ на плоскости и теория функций комплексной переменной	127
Г л а в а III. Принципы гидродинамики и аэродинамики	132
§ 15. Основные уравнения механики текущих тел	132
§ 16. Невихревое движение идеальной жидкости	137
§ 17. Вихревое движение идеальной жидкости	142
§ 18. Влияние сил внутреннего трения на движение несжимаемой жидкости; теории Стокса и Прандтля	149
§ 19. Плоское движение идеальной жидкости	158
§ 20. Влияние сжимаемости и принципы акустики	169
Отдел III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ И СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ	
Г л а в а I. Механика частицы и метод пространственного континуума экземпляров	176
§ 1. Уравнение Гамильтона-Якоби	176
§ 2. Оптико-механическая аналогия Гамильтона	183
§ 3. Волновое уравнение и принципы волновой механики	189
§ 4. Принцип наименьшего действия	195
§ 5. Принцип Гамильтона	206
§ 6. Движение незаэлектризованной частицы в произвольном электромагнитном поле	212
Г л а в а II. Аналитическая механика в обобщенных координатах	219
§ 7. Обобщенные координаты и уравнения Гамильтона	219
§ 8. Циклические координаты и функция Рута	227
§ 9. Интегралы движения. Скобки Пуассона	231
§ 10. Фазовый континуум экземпляров и его приложение к статистической механике	236
§ 11. Канонические преобразования; связь их с уравнением Гамильтона-Якоби и применение к теории возмущений	243
§ 12. Периодические и условно-периодические движения	256
§ 13. Примеры на применение метода Гамильтона-Якоби	264
§ 14. Движение связанной частицы. Уравнения Лагранжа первого рода, классификация связей и роль сил трения	274
Г л а в а III. Механика системы материальных частиц	283
§ 15. Консервативная система частиц с идеальными связями; уравнения Лагранжа I рода	283
§ 16. Аналитическая механика системы частиц	289
§ 17. Общая теория линейных колебаний квазиупругосвязанных частиц	301
§ 18. Вынужденные колебания; гирокопические силы; примеры	309

	Стр.
Отдел IV. ТЕНЗОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	
Г л а в а I. Принципы тензорного анализа	316
§ 1. Определение тензорных величин в связи с преобразованиями прямолинейных и прямоугольных координатных систем	316
§ 2. Симметричные и антисимметричные тензоры 2-го ранга	322
§ 3. Преобразование симметричных тензоров к главным осям и их геометрическое изображение	327
§ 4. Дифференцирование тензоров 2-го ранга	331
§ 5. Тензоры высших рангов	333
§ 6. Тензоры в пространстве $f > 3$ измерений	338
§ 7. Применение симметричных тензоров высших рангов к теории потенциала сил ньютонаского типа	341
Г л а в а II. Механика идеального твердого тела	345
§ 8. Тензор инерции и общие уравнения движения твердого тела	345
§ 9. Движение волчка в поле силы тяжести	349
Г л а в а III. Теория упругости	359
§ 10. Тензоры деформации и напряжений	359
§ 11. Соотношение между деформациями и напряжениями	363
§ 12. Общая теория равновесия двухмерных упругих тел	368
§ 13. Продольные и поперечные колебания в упругих телах	371
Отдел V. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБОВЩЕННЫХ КООРДИНАТ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ И КОНТИНУУМА	
Г л а в а I. Косоугольные и криволинейные координаты	375
§ 1. Косоугольная система координат. Обобщенные проекции и слагающие. Взаимная система координат	375
§ 2. Скалярное и векторное произведения векторов и дифференциальные операции в косоугольных координатах	379
§ 3. Преобразование координат и слагающих вектора при переходе от одной системы косоугольных координат к другой; тензоры	382
§ 4. Определение криволинейных координат	388
§ 5. Дифференциальные операции в криволинейных координатах	394
§ 6. Вывод формул для дифференциальных операций из их интегрального определения	400
§ 7. Ортогональные координаты; цилиндрические, сферические и параболические	404
Г л а в а II. Приложение к механике частицы и континуума	411
§ 8. Механика свободной частицы	411
§ 9. Движение частицы по кривой поверхности	414
§ 10. Гауссова теория кривизны поверхностей	418
§ 11. Эйнштейнова теория относительности и тяготения	423
§ 12. Применение криволинейных координат к уравнениям теории упругости и гидродинамики	430

ОТДЕЛ I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦ И СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

ГЛАВА I

ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ И ВЕКТОРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОТ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Разложение и сложение векторов

Физические величины разделяются обычно на скалярные, которые характеризуются одним лишь численным значением, и векторные, характеризующиеся, помимо численного значения, определенным направлением в пространстве; кроме того встречаются величины более сложные, соответствующие совокупности двух или более векторов — так называемые тензоры.

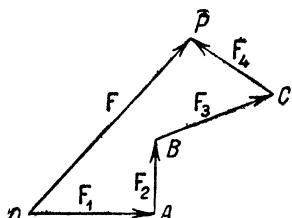


Рис. 1.

Прототипом векторных величин является прямолинейный отрезок, обыкновенно связываемый с представлением о пространственном перемещении материальной частицы из какой-нибудь начальной точки O в некоторую другую точку P , но, вообще говоря,

служащий для графического представления всевозможных векторных величин. Вышеозначенное перемещение \vec{OP} (рис. 1) может быть заменено совокупностью двух или нескольких перемещений \vec{OA} , \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{CP} , которые называются составляющими. Подобная замена называется разложением отрезка (или перемещения) \vec{OP} на составляющие отрезки (или перемещения).

Обратная операция, сводящаяся к замене нескольких отрезков одним, по отношению к которому они играют роль составляющих (при совмещении начала каждого из них с концом предыдущего), называется геометрическим или векторным сложением. Соответственно этому составляющие отрезки называются слагаемыми, а результирующий (соединяющий начало первого с концом последнего) — геометрической суммой их.

Операция геометрического сложения выражается символически формулой

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \dots, \quad (1)$$

где в рассматриваемом случае (рис. 1) $\mathbf{F} = \vec{OP}$, $\mathbf{F}_1 = \vec{OA}$, $\mathbf{F}_2 = \vec{AB}$, $\mathbf{F}_3 = \vec{BC}$ и $\mathbf{F}_4 = \vec{CP}$.

Геометрическую сумму не следует смешивать с арифметической, относящейся к численным значениям отрезков, т. е. к их длинам. Эти численные значения мы будем в дальнейшем обозначать символами соответствующих векторов (отрезков), либо заключая их в прямые скобки, либо же отбрасывая стрелки (в случае одной буквы). Так например длина отрезка \mathbf{F} представляется символом $|\mathbf{F}|$ или F .

Численное значение геометрической суммы всегда меньше арифметической суммы слагаемых. Это следует из того, что прямая OP короче всякой ломаной (например $OABCOP$), проходящей через ее концы. Само собою разумеется, что если все слагаемые отрезки имеют одно и то же направление, т. е. образуют прямую линию, то их арифметическая сумма совпадает с численным значением геометрической. Таким образом мы имеем следующее соотношение:

$$F < F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

или

$$|F_1 + F_2 + F_3 + \dots| < |F_1| + |F_2| + |F_3| + \dots \quad (2)$$

При геометрическом сложении нескольких отрезков они передвигаются таким образом, чтобы начало одного совпадало с концом предыдущего; геометрическая сумма изображается отрезком, соединяющим начало первого с концом последнего. При этом порядок, в котором они „прикладываются“ друг к другу, остается совершенно безразличным; другими словами — геометрическая сумма не зависит от порядка слагаемых (свойство „переместительности“, или коммутативности). В случае двух слагаемых эта теорема доказывается следующим образом:

Построим параллелограм на отрезках $\vec{OP} = \mathbf{F}$ и $\vec{OQ} = \mathbf{F}'$ (рис. 2). Так как $\vec{OP}' + \vec{P'Q} = \vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$ и так как далее $\vec{P'Q} = \vec{OP} = \mathbf{F}$ и $\vec{PQ} = \vec{OP}' = \mathbf{F}'$, то отсюда следует:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{F}' + \mathbf{F}. \quad (3)$$

Это доказательство легко обобщается на случай нескольких слагаемых, путем последовательного применения формулы (3) к отдельным парам.

Вектор, численно равный данному (\mathbf{F}) и противоположный ему по направлению, обозначается тем же символом со знаком минус ($-\mathbf{F}$). Сложение вектора \mathbf{F}' с вектором противоположным \mathbf{F} , т. е. равным $-\mathbf{F}$, называется геометрическим вычитанием, а сумма $\mathbf{F}' + (-\mathbf{F})$, обозначаемая в виде $\mathbf{F}' - \mathbf{F}$ — геометрической разностью. Геометрическую разность векторов \mathbf{F}' и \mathbf{F} можно также определить как такой вектор $\Delta\mathbf{F}$, который нужно прибавить к \mathbf{F} , чтобы получить \mathbf{F}' . На рис. 2 он изображается отрезком \vec{PP}' .

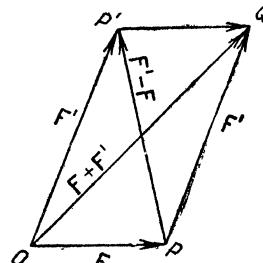


Рис. 2.

Различные векторные величины — скорости, ускорения, силы и т. д. — изображаются графически таким же образом, как и перемещения, т. е. в виде прямолинейных отрезков одинакового с ними направления и пропорциональной длины. Соответственно геометрическому разложению (или сложению) изображающих их отрезков, все эти величины могут разлагаться на составляющие (или складываться в результирующие), им в совокупности эквивалентны¹. Впрочем, вопрос об „эквивалентности“ (с физической точки зрения) не имеет существенного значения. Так например, в случае единичных векторов (или „ортов“), служащих для характеристики направления и численно равных 1, разложение на составляющие, вполне допустимое с математической точки зрения, лишено, очевидно, всякого физического смысла.

Заметим, что под произведением скалярной величины φ на вектор \mathbf{F} подразумевается вектор $\varphi\mathbf{F}$, совпадающий с \mathbf{F} по направлению и численно равный φF . Так например, если φ есть масса некоторой материальной частицы, а \mathbf{F} — ее скорость, то произведение $\varphi\mathbf{F}$ представляет собой так называемое количество движения частицы. Полагая $\varphi = \frac{1}{F}$, получаем единичный вектор

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{F}}{F},$$

характеризующий направление \mathbf{F} .

Умножая \mathbf{F}_1 на $\frac{1}{F}$, получаем, далее, вектор

$$\frac{\mathbf{F}_1}{F} = \frac{\mathbf{F}}{F^2},$$

одинаковый с \mathbf{F} по направлению и обратный по величине. Этот „обратный“ вектор мы будем в дальнейшем обозначать символом

$$\frac{1}{F} \quad \text{или} \quad \mathbf{F}^{-1}.$$

§ 2. Проектирование отрезков и скалярное умножение векторов

Под проекцией отрезка \overrightarrow{OP} на какую-либо прямую \overrightarrow{MN} подразумевается, как известно, длина отрезка O_1P_1 , отсекаемого на этой прямой перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через концы отрезка \overrightarrow{OP} . Если при этом направление от O_1 к P_1 совпадает с положительным направлением прямой \overrightarrow{MN} , то проекция приписывается положительное значение, а в противоположном случае — отрицательное.

Обозначая угол между направлениями \overrightarrow{OP} и \overrightarrow{MN} через α , мы можем положить в обоих случаях $O_1P_1 = OP \cdot \cos \alpha$. Если отрезок \overrightarrow{OP} представляет собой геометрическую сумму отрезков \overrightarrow{OQ} и \overrightarrow{QP} , или \overrightarrow{OR} и \overrightarrow{RP} , то проекция \overrightarrow{OP} , как видно из чертежа, равна алгебраической сумме проекций \overrightarrow{OQ} и \overrightarrow{QP} , взятых с соответствующими знаками (так например: $O_1P_1 = O_1Q_1 + Q_1P_1 = O_1R_1 + R_1P_1$, где $R_1P_1 = -P_1R_1$).

Эта теорема легко обобщается на случай произвольного числа составляющих: алгебраическая сумма проекций отрезков, образующих произвольную ломаную линию (например $OABC P$, рис. 1) равна проекции

замыкающего или „результатирующего“ отрезка (OP). Указанная теорема остается в силе для произвольных векторных величин (скоростей, ускорений, сил и т. д.), поскольку все они могут изображаться прямолинейными отрезками и разлагаться соответствующим образом на составляющие.

Характеризуя направление проектирующей прямой каким-либо вектором \mathbf{n} , мы будем обозначать проекцию любого вектора \mathbf{F} на эту прямую символом F_n или $|\mathbf{F}|_n$. Таким образом предыдущее соотношение между геометрической суммой нескольких векторов и алгебраической суммой их проекций можно выразить следующим равенством:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}|_n = A_n + B_n + C_n + D_n. \quad (4)$$

Произведение численного значения вектора \mathbf{A} , с одной стороны, и проекции некоторого другого вектора \mathbf{B} на направление \mathbf{A} , с другой, — называется скалярным или внутренним произведением обоих векторов и обозначается символом $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ¹⁾. Пользуясь предыдущим обозначением, мы можем представить его в виде $A \cdot B_A$. Если угол между \mathbf{A} и \mathbf{B} равен a , то $B_A = B \cos a$ и, следовательно, $A \cdot B_A = AB \cos a = BA \cos a = B \cdot A_B$. Таким образом скалярное произведение двух векторов не зависит от порядка сомножителей, т. е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (5)$$

В случае их взаимной перпендикулярности оно обращается в нуль.

Скалярное произведение представляет собою скалярную величину.

Перемножаемые векторы могут иметь различную природу; так например, если \mathbf{A} есть вектор силы, действующей на некоторую частицу, а \mathbf{B} — перемещение последней, то $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ представляет собою величину соответствующей работы.

Заметим, что проекцию какого-либо вектора \mathbf{A} на направление единичного вектора \mathbf{n} можно представить в виде скалярного произведения $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$.

Если один из умножаемых векторов, например \mathbf{B} , равен геометрической сумме нескольких других векторов \mathbf{C}, \mathbf{D} и т. д., то согласно формуле (4) можно положить

$$B_A = C_A + D_A + \dots$$

и, следовательно:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}(C_A + D_A + \dots) = AC_A + AD_A + \dots = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \dots$$

Этот результат легко обобщается на тот случай, если оба сомножителя разлагаются на несколько составляющих; так например, полагая $\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_k$, имеем:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\sum_i \mathbf{A}_i \right) \cdot \left(\sum_k \mathbf{B}_k \right) = \sum_i \sum_k \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_k. \quad (6)$$

¹⁾ Весьма употребителен также символ (\mathbf{A}, \mathbf{B}) .

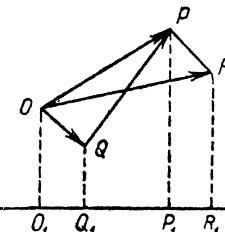


Рис. 3.

Формулы (5) и (6) показывают, что скалярное произведение двух векторов обладает, подобно алгебраическим произведениям скалярных величин, свойствами переместительности и распределительности (чего нельзя сказать по отношению к сочетательному свойству, так как скалярное произведение трех и более векторов не имеет смысла).

§ 3. Проектирование площадей и векторное умножение векторов

Всякой плоскости, определенным образом ориентированной в пространстве, можно привести в соответствие перпендикулярную к ней прямую. Это соответствие, вытекающее из трехмерности пространства, составляет сущность закона „взаимности“ между прямыми и плоскостями. Таким образом площадь всякой плоской фигуры (S), ограниченной некоторым замкнутым контуром (C), можно трактовать как векторную величину и изображать перпендикулярным к ней отрезком пропорциональной длины. Впрочем, площадь может быть связана с односторонним направлением вдоль соответствующего перпендикуляра лишь в том случае, если на контуре, ее ограничивающем, задано определенное направление обхода или „вращения“. Обычно отрезок \overline{OP} , изображающий данную площадь (S) (рис. 4), направляется в ту сторону, куда нужно смотреть для того, чтобы это вращение

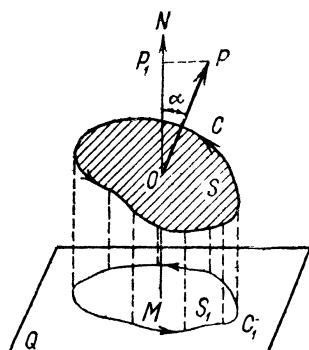


Рис. 4.

свершалось по часовой стрелке, или, другими словами, в сторону поступательного движения обычного „правого“ винта, поворачиваемого в направлении контура (C).

Под проекцией площади S на какую-либо плоскость Q подразумевается площадь S_1 , вырезаемая на плоскости Q перпендикулярными к ней прямыми, проведенными через точки контура C , ограничивающего S . При этом, для определенности, на проектирующей плоскости (Q) задается определенное „положительное“ направление обхода; если последнее совпадает с направлением обхода по контуру C_1 , ограничивающему S_1 (направление C_1 определяется однозначным образом направлением C), то площадь S_1 считается положительной, а в противоположном случае — отрицательной. Что касается ее численного значения, то оно равно, как нетрудно убедиться, произведению проектируемой площади S на косинус двугранного угла α (или $\pi - \alpha$) между плоскостями S и Q .

В самом деле, в направлениях, параллельных граням вышеозначенного угла (т. е. линии пересечения плоскостей S и Q), линейные размеры обеих фигур S и S_1 остаются одинаковыми, тогда как в направлениях, к ней перпендикулярных, линейные размеры S_1 сокращены в сравнении с соответствующими размерами S в отношении $\cos \alpha : 1$. А так как площадь всякой плоской фигуры пропорциональна произведе-

нию ее линейных размеров в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, то мы можем положить

$$S_1 = \pm S \cos \alpha.$$

Отсюда видно, что проекция S на плоскость Q совпадает по величине и по знаку с проекцией OP_1 отрезка \vec{OP} , изображающего S , на прямую MN , перпендикулярную к Q и проведенную в сторону, соответствующую положительному направлению обхода на проектирующей плоскости (так же как направление \vec{OP} соответствует направлению обхода по контуру, ограничивающему S).

Если контур C состоит из прямолинейных отрезков, т. е. представляет собой замкнутый многоугольник, то рассматриваемая плоская фигура (S) может быть „разложена“ на совокупность нескольких плоских фигур, которые образуют многогранную поверхность, ограниченную контуром C . Эта многогранная поверхность „эквивалентна“ S — в том смысле, что проекция S на любую плоскость равна алгебраической сумме проекций „составляющих“ ее плоских фигур, т. е. в том же смысле, в каком совокупность прямолинейных отрезков, изображающих эти фигуры, эквивалентна результирующему отрезку \vec{OP} , изображающему S . Само собой разумеется, что направление обхода по элементарным контурам, ограничивающим „составляющие“ плоские фигуры, должно выбираться в соответствии с направлением обхода по внешнему контуру; при этом каждый из прямолинейных отрезков, разграничающих две подобные фигуры, при обходе тех двух контуров, к которым он принадлежит, проходит в противоположных направлениях (рис. 5).

Вышеуказанное разложение на плоские фигуры представляется, очевидно, возможным и в том случае, если исходная фигура не является плоской, т. е. если контур C имеет вид неплоского многоугольника. Изображая каждую из составляющих фигур перпендикулярным к ней отрезком соответствующей длины, мы можем рассматривать геометрическую сумму этих отрезков \vec{OP} как изображение исходной фигуры. Нетрудно убедиться, что это определение вполне однозначно, т. е. что отрезок \vec{OP} не зависит от способа подразделения контура C на составляющие (плоские) контуры. Хотя, таким образом, в этом случае с контуром C не связывается представления об определенной площади (соответствующей S), тем не менее площадь S_1 , вырезываемая на любой плоскости Q проекцией C_1 контура C , остается попрежнему равной проекции OP_1 отрезка \vec{OP} на прямую MN , перпендикулярную к этой плоскости.

Отрезок \vec{OP} или, вернее, изображаемый им вектор, характеризующий форму и расположение замкнутого контура C , мы будем в дальнейшем называть моментом этого контура. Это определение может быть распространено на произвольные криволинейные контуры,

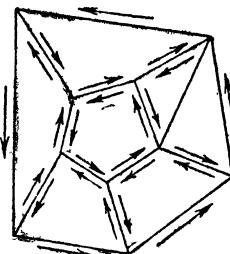


Рис. 5.

если рассматривать их как предельную форму замкнутых многоугольников с бесконечно-малыми сторонами. При этом соответствующие составляющие плоские фигуры превращаются в бесконечно-малые элементы произвольной (кривой) поверхности, ограниченной данным контуром.

Простейшей плоской фигурой является параллелограмм (или треугольник, который всегда можно трактовать как половину параллелограмма). Момент параллелограмма, построенного на двух отрезках $\mathbf{A} = \overrightarrow{OP}$ и $\mathbf{B} = \overrightarrow{OQ}$, при направлении обхода, соответствующем перемещению в направлении \mathbf{A} , и в направлении противоположном \mathbf{B} , называется векторным или внешним произведением отрезка \mathbf{A} на отрезок \mathbf{B} и обозначается символом $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ¹⁾. Таким образом вектор $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, будучи численно равен площади параллелограмма $OPRQ$ со сторонами $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR}$ и $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PR}$ (рис. 6), направлен по перпендикуляру к плоскости этого параллелограмма в ту сторону, куда движется обыкновенный (правый) винт при вращении от \overrightarrow{OP} к \overrightarrow{OQ} на угол $\alpha < 180^\circ$ (т. е. в рассматриваемом случае от читателя).

Из этого определения следует, что векторным произведением \mathbf{B} на \mathbf{A} является вектор, противоположный предыдущему, т. е. равный $-\mathbf{C}$.

Таким образом мы имеем следующее равенство:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (7)$$

показывающее, что векторное произведение, в противоположность скалярному, свойством переместительности не обладает.

Площадь параллелограмма равна произведению одной из его сторон на соответствующую высоту; последнюю можно рассматривать как проекцию другой стороны на прямую, перпендикулярную к первой. Обозначая угол между \mathbf{A} и \mathbf{B} через α , имеем, следовательно:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{B} \times \mathbf{A}| = A \cdot B \sin \alpha. \quad (8)$$

В случае параллельности двух векторов их векторное произведение обращается в нуль. В общем случае, разлагая один из векторов, например \overrightarrow{OP} , на составляющие $\overrightarrow{OP}_1 = \mathbf{A}_1$ и $\overrightarrow{OP}_2 = \mathbf{A}_2$, соответственно параллельную и перпендикулярную к \overrightarrow{OQ} (рис. 6), мы можем очевидно положить

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B} + \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}$$

(ибо, согласно предыдущему, $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{B} = 0$). Равенство

$$(\mathbf{E} + \mathbf{F}) \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{F} \times \mathbf{B} \quad (9)$$

выражающее распределительное свойство векторного произведения, легко обобщается на случай произвольных векторов \mathbf{E} и \mathbf{F} . Так например, если последние представляют собой составляющие вектора $\mathbf{A} = \overrightarrow{OP}$, то, проводя отрезки $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QT} = \mathbf{E}$ и $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{TR} = \mathbf{F}$ (рис. 7), мы можем

¹⁾ Или же $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.