

**Я.И. Френкель**

**Курс теоретической  
механики на основе  
векторного и тензорного  
анализа**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 53  
ББК 22.3  
Я11

Я11 **Я.И. Френкель**  
Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа / Я.  
И. Френкель – М.: Книга по Требованию, 2024. – 436 с.

**ISBN 978-5-458-26459-4**

«Настоящая книга представляет собой переработанное и расширенное издание моей книги «Курс векторного и тензорного анализа с приложениями к механике», вышедшей в 1925 г. и воспроизводившей в основных чертах курс, читанный мной на физико-механическом факультете Ленинградского политехнического института. Впоследствии этот курс был расширен и превращен в курс теоретической механики, как части общей системы теоретической физики. Это расширение выразилось в прибавлении к курсу векторного и тензорного анализа, являвшемуся вместе с тем введением в теоретическую механику, специальных глав, посвященных подробному развитию принципов аналитической механики (уравнения Лагранжа и Гамильтона, вариационные принципы, теория Гамильтона-Якоби и т. д.), а также специальным задачам гидродинамики и теории упругости. В настоящей книге этим специальным задачам уделено сравнительно немного места, в остальных отношениях она довольно точно соответствует курсу теоретической механики, читаемому в течение ряда лет мной и моими сотрудниками по кафедре теоретической физики на инженерно-физическом (бывш. физико-механическом) факультете Ленинградского индустриального института... Предлагаемая книга является введением в теоретическую механику как часть курса теоретической физики, ориентируя читателя по всем вопросам теоретической механики - особенно же таким, которые имеют специальный физический интерес».

**ISBN 978-5-458-26459-4**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие . . . . .	3
<b>Отдел I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦЫ И СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ.</b>	
<b>Глава I. Операции над векторами и векторными функциями от скалярного аргумента . . . . .</b>	<b>8</b>
§ 1. Разложение и сложение векторов . . . . .	8
§ 2. Проектирование отрезков и скалярное умножение векторов . . . . .	10
§ 3. Проектирование площадей и векторное умножение векторов . . . . .	12
§ 4. Комбинированные операции умножения . . . . .	16
§ 5. Деление векторов и решение линейных векторных уравнений . . . . .	18
§ 6. Векторные операции в прямолинейных и прямоугольных координатах . . . . .	20
§ 7. Двухмерные векторы и комплексные числа; гиперкомплексные числа и векторы в многомерном пространстве . . . . .	24
<b>Глава II. Механика частицы (материальной точки) . . . . .</b>	<b>29</b>
§ 8. Дифференцирование и интегрирование векторов по скаляру (времени) и кинематика частицы . . . . .	29
§ 9. Общие принципы динамики частицы (количество движения, энергия, момент количества движения и вириал) . . . . .	33
§ 10. Движение частицы под действием упругой силы . . . . .	37
§ 11. Вынужденные колебания, резонанс и влияние сил трения . . . . .	40
§ 12. Влияние сил трения на свободные и вынужденные колебания . . . . .	42
§ 13. Движение частицы под действием силы, обратно-пропорциональной квадрату расстояния . . . . .	46
§ 14. Влияние добавочной силы, обратно-пропорциональной кубу расстояния от неподвижной точки . . . . .	48
§ 15. Основы релятивистской (Эйнштейновской) механики . . . . .	52
<b>Глава III. Механика системы частиц . . . . .</b>	<b>57</b>
§ 16. Общие принципы механики системы частиц . . . . .	57
§ 17. Система двух частиц и общая теория столкновений . . . . .	62
§ 18. Принципы обратимости симметрии и относительности . . . . .	67
<b>Глава IV. Механика твердого тела . . . . .</b>	<b>70</b>
§ 19. Кинематика твердого тела . . . . .	70
§ 20. Движение частицы относительно вращающегося твердого тела; Кориолисова и центробежная силы . . . . .	73
§ 21. Динамика твердого тела с закрепленной точкой . . . . .	74
§ 22. Движение волчка, прецессия и нутация . . . . .	76
<b>Отдел II. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ГИДРОМЕХАНИКЕ</b>	
<b>Глава I. Операции над скалярными и векторными функциями от векторного аргумента . . . . .</b>	<b>78</b>
§ 1. Общая характеристика функций от векторного аргумента . . . . .	78
§ 2. Дифференцирование функций от векторного аргумента . . . . .	82

	Стр.
§ 3. Исследование операций векторного дифференцирования . . . . .	85
4. Основные правила векторного дифференцирования . . . . .	91
5. Дифференциальные операции второго порядка . . . . .	98
6. Операции векторного дифференцирования в прямоугольных координатах . . . . .	101
<b>Глава II. Векторные поля и кинематика жидкостей . . . . .</b>	<b>104</b>
§ 7. Постановка задачи; скалярный и векторный потенциалы . . . . .	104
8. Источники и стоки . . . . .	105
9. Вихревые линии . . . . .	110
10. Двойные слои . . . . .	115
§ 11. Определение потенциального поля в ограниченной области; функция Грина . . . . .	118
§ 12. Теорема Дирихле . . . . .	122
§ 13. Определение соленоидального поля в ограниченной области . . . . .	125
§ 14. Векторный анализ на плоскости и теория функций комплексной переменной . . . . .	127
<b>Глава III. Принципы гидродинамики и аэродинамики . . . . .</b>	<b>132</b>
§ 15. Основные уравнения механики текучих тел . . . . .	132
§ 16. Невихревое движение идеальной жидкости . . . . .	137
§ 17. Вихревое движение идеальной жидкости . . . . .	142
§ 18. Влияние сил внутреннего трения на движение несжимаемой жидкости; теории Стокса и Прандтля . . . . .	149
§ 19. Плоское движение идеальной жидкости . . . . .	158
§ 20. Влияние сжимаемости и принципы акустики . . . . .	169
<b>Отдел III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ И СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ</b>	
<b>Глава I. Механика частицы и метод пространственного континуума экземпляров . . . . .</b>	<b>176</b>
§ 1. Уравнение Гамильтона-Якоби . . . . .	176
§ 2. Оптико-механическая аналогия Гамильтона . . . . .	183
§ 3. Волновое уравнение и принципы волновой механики . . . . .	189
§ 4. Принцип наименьшего действия . . . . .	195
§ 5. Принцип Гамильтона . . . . .	206
§ 6. Движение наэлектризованной частицы в произвольном электромагнитном поле . . . . .	212
<b>Глава II. Аналитическая механика в обобщенных координатах . . . . .</b>	<b>219</b>
§ 7. Обобщенные координаты и уравнения Гамильтона . . . . .	219
§ 8. Циклические координаты и функция Рута . . . . .	227
§ 9. Интегралы движения. Скобки Пуассона . . . . .	231
§ 10. Фазовый континуум экземпляров и его приложение к статистической механике . . . . .	236
§ 11. Канонические преобразования; связь их с уравнением Гамильтона-Якоби и применение к теории возмущений . . . . .	243
§ 12. Периодические и условно-периодические движения . . . . .	256
§ 13. Примеры на применение метода Гамильтона-Якоби . . . . .	264
§ 14. Движение связанной частицы. Уравнения Лагранжа первого рода, классификация связей и роль сил трения . . . . .	274
<b>Глава III. Механика системы материальных частиц . . . . .</b>	<b>283</b>
§ 15. Консервативная система частиц с идеальными связями; уравнения Лагранжа I рода . . . . .	283
§ 16. Аналитическая механика системы частиц . . . . .	289
§ 17. Общая теория линейных колебаний квази-упругосвязанных частиц . . . . .	301
§ 18. Вынужденные колебания; гироскопические силы; примеры . . . . .	309

	Стр.
<b>Отдел IV. ТЕНЗОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ</b>	
<b>Глава I. Принципы тензорного анализа</b>	316
§ 1. Определение тензорных величин в связи с преобразованиями прямолинейных и прямоугольных координатных систем	316
§ 2. Симметричные и антисимметричные тензоры 2-го ранга	322
§ 3. Преобразование симметричных тензоров к главным осям и их геометрическое изображение	327
§ 4. Дифференцирование тензоров 2-го ранга	331
§ 5. Тензоры высших рангов	333
§ 6. Тензоры в пространстве $f > 3$ измерений	338
§ 7. Применение симметричных тензоров высших рангов к теории потенциала сил ньютоновского типа	341
<b>Глава II. Механика идеального твердого тела</b>	345
§ 8. Тензор инерции и общие уравнения движения твердого тела	345
§ 9. Движение волчка в поле силы тяжести	349
<b>Глава III. Теория упругости</b>	359
§ 10. Тензоры деформации и напряжений	359
§ 11. Соотношение между деформациями и напряжениями	363
§ 12. Общая теория равновесия двумерных упругих тел	368
§ 13. Продольные и поперечные колебания в упругих телах	371
<b>Отдел V. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ И ЕЕ ПРИМЕ- НЕНИЕ К МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ И КОНТИНУУМА</b>	
<b>Глава I. Косоугольные и криволинейные координаты</b>	375
§ 1. Косоугольная система координат. Обобщенные проекции и слагающие. Взаимная система координат	375
§ 2. Скалярное и векторное произведения векторов и дифферен- циальные операции в косоугольных координатах	379
§ 3. Преобразование координат и слагающих вектора при пере- ходе от одной системы косоугольных координат к другой; тензоры	382
§ 4. Определение криволинейных координат	388
§ 5. Дифференциальные операции в криволинейных координатах	394
§ 6. Вывод формул для дифференциальных операций из их инте- грального определения	400
§ 7. Ортогональные координаты; цилиндрические, сферические и параболические	404
<b>Глава II. Приложение к механике частицы и континуума</b>	411
§ 8. Механика свободной частицы	411
§ 9. Движение частицы по кривой поверхности	414
§ 10. Гауссова теория кривизны поверхностей	418
§ 11. Эйнштейнова теория относительности и тяготения	423
§ 12. Применение криволинейных координат к уравнениям теории упругости и гидродинамики	430

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦЫ И СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

## ГЛАВА I

### ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ И ВЕКТОРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОТ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

#### § 1. Разложение и сложение векторов

Физические величины разделяются обычно на скалярные, которые характеризуются одним лишь численным значением, и векторные, характеризующиеся, помимо численного значения, определенным

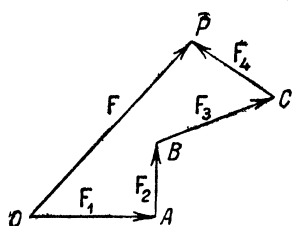


Рис. 1.

направлением в пространстве; кроме того встречаются величины более сложные, соответствующие совокупности двух или более векторов — так называемые тензоры.

Прототипом векторных величин является прямолинейный отрезок, обыкновенно связываемый с представлением о пространственном перемещении материальной частицы из какой-нибудь начальной точки  $O$  в некоторую другую точку  $P$ , но, вообще говоря,

служащий для графического представления всевозможных векторных величин. Вышеозначенное перемещение  $\vec{OP}$  (рис. 1) может быть заменено совокупностью двух или нескольких перемещений  $\vec{OA}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{CP}$ , которые называются составляющими. Подобная замена называется разложением отрезка (или перемещения)  $\vec{OP}$  на составляющие отрезки (или перемещения).

Обратная операция, сводящаяся к замене нескольких отрезков одним, по отношению к которому они играют роль составляющих (при совмещении начала каждого из них с концом предыдущего), называется геометрическим или векторным сложением. Соответственно этому составляющие отрезки называются слагаемыми, а результирующий (соединяющий начало первого с концом последнего) — геометрической суммой их.

Операция геометрического сложения выражается символически формулой

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \dots, \quad (1)$$



где в рассматриваемом случае (рис. 1)  $F = \overrightarrow{OP}$ ,  $F_1 = \overrightarrow{OA}$ ,  $F_2 = \overrightarrow{AB}$ ,  $F_3 = \overrightarrow{BC}$  и  $F_4 = \overrightarrow{CP}$ .

Геометрическую сумму не следует смешивать с арифметической, относящейся к численным значениям отрезков, т. е. к их длинам. Эти численные значения мы будем в дальнейшем обозначать символами соответствующих векторов (отрезков), либо заключая их в прямые скобки, либо же отбрасывая стрелки (в случае одной буквы). Так например длина отрезка  $F$  представляется символом  $|F|$  или  $F$ .

Численное значение геометрической суммы всегда меньше арифметической суммы слагаемых. Это следует из того, что прямая  $OP$  короче всякой ломаной (например  $OABCP$ ), проходящей через ее концы. Само собою разумеется, что если все слагаемые отрезки имеют одно и то же направление, т. е. образуют прямую линию, то их арифметическая сумма совпадает с численным значением геометрической. Таким образом мы имеем следующее соотношение:

$$F \leq F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

или

$$|F_1 + F_2 + F_3 + \dots| \leq |F_1| + |F_2| + |F_3| + \dots \quad (2)$$

При геометрическом сложении нескольких отрезков они передвигаются таким образом, чтобы начало одного совпадало с концом предыдущего; геометрическая сумма изображается отрезком, соединяющим начало первого с концом последнего. При этом порядок, в котором они „прикладываются“ друг к другу, остается совершенно безразличным; другими словами — геометрическая сумма не зависит от порядка слагаемых (свойство „переместительности“, или коммутативности). В случае двух слагаемых эта теорема доказывается следующим образом:

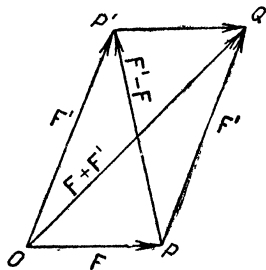


Рис. 2.

Построим параллелограмм на отрезках  $\overrightarrow{OP} = F$  и  $\overrightarrow{OP'} = F'$  (рис. 2). Так как  $\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$  и так как далее  $\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{OP} = F$  и  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP'} = F'$ , то отсюда следует:

$$F + F' = F' + F. \quad (3)$$

Это доказательство легко обобщается на случай нескольких слагаемых, путем последовательного применения формулы (3) к отдельным парам.

Вектор, численно равный данному ( $F$ ) и противоположный ему по направлению, обозначается тем же символом со знаком минус ( $-F$ ). Сложение вектора  $F'$  с вектором противоположным  $F$ , т. е. равным  $-F$ , называется геометрическим вычитанием, а сумма  $F' + (-F)$ , обозначаемая в виде  $F' - F$  — геометрической разностью. Геометрическую разность векторов  $F'$  и  $F$  можно также определить как такой вектор  $\Delta F$ , который нужно прибавить к  $F$ , чтобы получить  $F'$ . На рис. 2 он изображается отрезком  $\overrightarrow{PP'}$ .

Различные векторные величины — скорости, ускорения, силы и т. п. — изображаются графически таким же образом, как и перемещения, т. е. в виде прямолинейных отрезков одинакового с ними направления и пропорциональной длины. Соответственно геометрическому разложению (или сложению) изображающих их отрезков, все эти величины могут разлагаться на составляющие (или складываться в результирующую), им в совокупности эквивалентны. Впрочем, вопрос об „эквивалентности“ (с физической точки зрения) не имеет существенного значения. Так например, в случае единичных векторов (или „ортов“), служащих для характеристики направления и численно равных 1, разложение на составляющие, вполне допустимое с математической точки зрения, лишено, очевидно, всякого физического смысла.

Заметим, что под произведением скалярной величины  $\varphi$  на вектор  $\mathbf{F}$  подразумевается вектор  $\varphi\mathbf{F}$ , совпадающий с  $\mathbf{F}$  по направлению и численно равный  $\varphi F$ . Так например, если  $\varphi$  есть масса некоторой материальной частицы, а  $\mathbf{F}$  — ее скорость, то произведение  $\varphi\mathbf{F}$  представляет собой так называемое количество движения частицы. Полагая  $\varphi = \frac{1}{F}$ , получаем единичный вектор

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{F}}{F},$$

характеризующий направление  $\mathbf{F}$ .

Умножая  $\mathbf{F}_1$  на  $\frac{1}{F}$ , получаем, далее, вектор

$$\frac{\mathbf{F}_1}{F} = \frac{\mathbf{F}}{F^2},$$

одинаковый с  $\mathbf{F}$  по направлению и обратный по величине. Этот „обратный“ вектор мы будем в дальнейшем обозначать символом

$$\frac{1}{\mathbf{F}} \quad \text{или} \quad \mathbf{F}^{-1}.$$

## § 2. Проектирование отрезков и скалярное умножение векторов

Под проекцией отрезка  $\overline{OP}$  на какую-либо прямую  $\overline{MN}$  подразумевается, как известно, длина отрезка  $O_1P_1$ , отсекаемого на этой прямой перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через концы отрезка  $\overline{OP}$ . Если при этом направление от  $O_1$  к  $P_1$  совпадает с положительным направлением прямой  $\overline{MN}$ , то проекция приписывается положительное значение, а в противоположном случае — отрицательное.

Обозначая угол между направлениями  $\overline{OP}$  и  $\overline{MN}$  через  $\alpha$ , мы можем положить в обоих случаях  $O_1P_1 = OP \cdot \cos \alpha$ . Если отрезок  $\overline{OP}$  представляет собой геометрическую сумму отрезков  $\overline{OQ}$  и  $\overline{QP}$ , или  $\overline{OR}$  и  $\overline{RP}$ , то проекция  $\overline{OP}$ , как видно из чертежа, равна алгебраической сумме проекций  $\overline{OQ}$  и  $\overline{QP}$ , взятых с соответствующими знаками (так например:  $O_1P_1 = O_1Q_1 + Q_1P_1 = O_1R_1 + R_1P_1$ , где  $R_1P_1 = -P_1R_1$ ).

Эта теорема легко обобщается на случай произвольного числа составляющих: алгебраическая сумма проекций отрезков, образующих произвольную ломаную линию (например  $OABCP$ , рис. 1) равна проекции

замыкающего или „результатирующего“ отрезка ( $OP$ ). Указанная теорема остается в силе для произвольных векторных величин (скоростей, ускорений, сил и т. д.), поскольку все они могут изображаться прямолинейными отрезками и разлагаться соответствующим образом на составляющие.

Характеризуя направление проектирующей прямой каким-либо вектором  $\mathbf{n}$ , мы будем обозначать проекцию любого вектора  $\mathbf{F}$  на эту прямую символом  $F_n$  или  $|\mathbf{F}|_n$ . Таким образом предыдущее соотношение между геометрической суммой нескольких векторов и алгебраической суммой их проекций можно выразить следующим равенством:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}|_n = A_n + B_n + C_n + D_n. \quad (4)$$

Произведение численного значения вектора  $\mathbf{A}$ , с одной стороны, и проекции некоторого другого вектора  $\mathbf{B}$  на направление  $\mathbf{A}$ , с другой, — называется скалярным или внутренним произведением обоих векторов и обозначается символом  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ <sup>1)</sup>. Пользуясь предыдущим обозначением, мы можем представить его в виде  $A \cdot B_A$ . Если угол между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  равен  $\alpha$ , то  $B_A = B \cos \alpha$  и, следовательно,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha = BA \cos \alpha = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . Таким образом скалярное произведение двух векторов не зависит от порядка сомножителей, т. е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (5)$$

В случае их взаимной перпендикулярности оно обращается в нуль.

Скалярное произведение представляет собою скалярную величину.

Перемножаемые векторы могут иметь различную природу; так например, если  $\mathbf{A}$  есть вектор силы, действующей на некоторую частицу, а  $\mathbf{B}$  — перемещение последней, то  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  представляет собою величину соответствующей работы.

Заметим, что проекцию какого-либо вектора  $\mathbf{A}$  на направление единичного вектора  $\mathbf{n}$  можно представить в виде скалярного произведения  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ .

Если один из умножаемых векторов, например  $\mathbf{B}$ , равен геометрической сумме нескольких других векторов  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  и т. д., то согласно формуле (4) можно положить

$$B_A = C_A + D_A + \dots$$

и, следовательно:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A(C_A + D_A + \dots) = AC_A + AD_A + \dots = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \dots$$

Этот результат легко обобщается на тот случай, если оба сомножителя разлагаются на несколько составляющих; так например, полагая

$$\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{A}_i \text{ и } \mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_k, \text{ имеем:}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left( \sum_i \mathbf{A}_i \right) \cdot \left( \sum_k \mathbf{B}_k \right) = \sum_i \sum_k \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_k. \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Весьма употребителен также символ  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

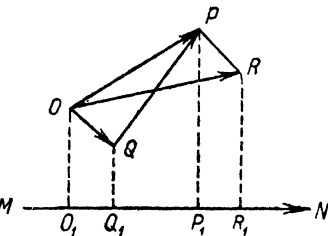


Рис. 3.

Формулы (5) и (6) показывают, что скалярное произведение двух векторов обладает, подобно алгебраическим произведениям скалярных величин, свойствами переместительности и распределительности (чего нельзя сказать по отношению к сочетательному свойству, так как скалярное произведение трех и более векторов не имеет смысла).

### § 3. Проектирование площадей и векторное умножение векторов

Всякой плоскости, определенным образом ориентированной в пространстве, можно привести в соответствие перпендикулярную к ней прямую. Это соответствие, вытекающее из трехмерности пространства,

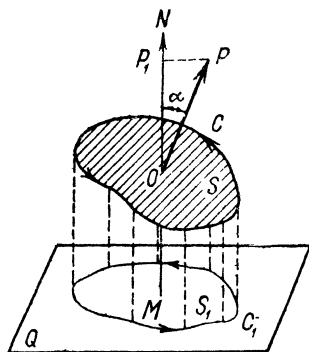


Рис. 4.

составляет сущность закона „взаимности“ между прямыми и плоскостями. Таким образом площадь всякой плоской фигуры ( $S$ ), ограниченной некоторым замкнутым контуром ( $C$ ), можно трактовать как векторную величину и изображать перпендикулярным к ней отрезком пропорциональной длины. Впрочем, площадь может быть связана с односторонним направлением вдоль соответствующего перпендикуляра лишь в том случае, если на контуре, ее ограничивающем, задано определенное направление обхода или „вращения“. Обычно отрезок  $\vec{OP}$ , изображающий данную площадь ( $S$ ) (рис. 4), направляется в ту сторону, куда нужно смотреть для того, чтобы это вращение

совершалось по часовой стрелке, или, другими словами, в сторону поступательного движения обыкновенного „правого“ винта, поворачиваемого в направлении контура ( $C$ ).

Под проекцией площади  $S$  на какую-либо плоскость  $Q$  подразумевается площадь  $S_1$ , вырезаемая на плоскости  $Q$  перпендикулярными к ней прямыми, проведенными через точки контура  $C$ , ограничивающего  $S$ . При этом, для определенности, на проектирующей плоскости ( $Q$ ) задается определенное „положительное“ направление обхода; если последнее совпадает с направлением обхода по контуру  $C_1$ , ограничивающему  $S_1$  (направление  $C_1$  определяется однозначным образом направлением  $C$ ), то площадь  $S_1$  считается положительной, а в противоположном случае — отрицательной. Что касается ее численного значения, то оно равно, как нетрудно убедиться, произведению проектируемой площади  $S$  на косинус двугранного угла  $\alpha$  (или  $\pi - \alpha$ ) между плоскостями  $S$  и  $Q$ .

В самом деле, в направлениях, параллельных грани вышеозначенного угла (т. е. линии пересечения плоскостей  $S$  и  $Q$ ), линейные размеры обеих фигур  $S$  и  $S_1$  остаются одинаковыми, тогда как в направлениях, к ней перпендикулярных, линейные размеры  $S_1$  сокращены в сравнении с соответствующими размерами  $S$  в отношении  $\cos \alpha$ :1. А так как площадь всякой плоской фигуры пропорциональна произведе-

нию ее линейных размеров в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, то мы можем положить

$$S_1 = \pm S \cos \alpha.$$

Отсюда видно, что проекция  $S$  на плоскость  $Q$  совпадает по величине и по знаку с проекцией  $OP_1$  отрезка  $\vec{OP}$ , изображающего  $S$ , на прямую  $\vec{MN}$ , перпендикулярную к  $Q$  и проведенную в сторону, соответствующую положительному направлению обхода на проектирующей плоскости (так же как направление  $\vec{OP}$  соответствует направлению обхода по контуру, ограничивающему  $S$ ).

Если контур  $C$  состоит из прямолинейных отрезков, т. е. представляет собой замкнутый многоугольник, то рассматриваемая плоская фигура ( $S$ ) может быть „разложена“ на совокупность нескольких плоских фигур, которые образуют многогранную поверхность, ограниченную контуром  $C$ . Эта многогранная поверхность „эквивалентна“  $S$  — в том смысле, что проекция  $S$  на любую плоскость равна алгебраической сумме проекций „составляющих“ ее плоских фигур, т. е. в том же смысле, в каком совокупность прямолинейных отрезков, изображающих эти фигуры, эквивалентна результирующему отрезку  $\vec{OP}$ , изображающему  $S$ . Само собой разумеется, что направление обхода по элементарным контурам, ограничивающим „составляющие“ плоские фигуры, должно выбираться в соответствии с направлением обхода по внешнему контуру; при этом каждый из прямолинейных отрезков, разграничивающих две подобные фигуры, при обходе тех двух контуров, к которым он принадлежит, проходится в противоположных направлениях (рис. 5).

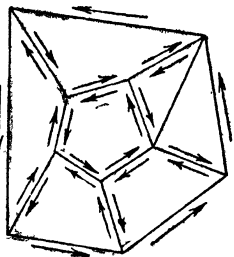


Рис. 5.

Вышеуказанное разложение на плоские фигуры представляется, очевидно, возможным и в том случае, если исходная фигура не является плоской, т. е. если контур  $C$  имеет вид неплоского многоугольника. Изображая каждую из составляющих фигур перпендикулярным к ней отрезком соответствующей длины, мы можем рассматривать геометрическую сумму этих отрезков  $\vec{OP}$  как изображение исходной фигуры. Нетрудно убедиться, что это определение вполне однозначно, т. е. что отрезок  $\vec{OP}$  не зависит от способа подразделения контура  $C$  на составляющие (плоские) контуры. Хотя, таким образом, в этом случае с контуром  $C$  не связывается представления об определенной площади (соответствующей  $S$ ), тем не менее площадь  $S_1$ , вырезаемая на любой плоскости  $Q$  проекцией  $C_1$  контура  $C$ , остается попрежнему равной проекции  $OP_1$  отрезка  $\vec{OP}$  на прямую  $MN$ , перпендикулярную к этой плоскости.

Отрезок  $\vec{OP}$  или, вернее, изображаемый им вектор, характеризующий форму и расположение замкнутого контура  $C$ , мы будем в дальнейшем называть моментом этого контура. Это определение может быть распространено на произвольные криволинейные контуры,

если рассматривать их как предельную форму замкнутых многоугольников с бесконечно-малыми сторонами. При этом соответствующие составляющие плоские фигуры превращаются в бесконечно-малые элементы произвольной (кривой) поверхности, ограничиваемой данным контуром.

Простейшей плоской фигурой является параллелограмм (или треугольник, который всегда можно трактовать как половину параллелограмма). Момент параллелограмма, построенного на двух отрезках  $\mathbf{A} = \overrightarrow{OP}$  и  $\mathbf{B} = \overrightarrow{OQ}$ , при направлении обхода, соответствующем перемещению в направлении  $\mathbf{A}$ , и в направлении противоположном  $\mathbf{B}$ , называется векторным или внешним произведением отрезка  $\mathbf{A}$  на отрезок  $\mathbf{B}$  и обозначается символом  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ <sup>1)</sup>. Таким образом вектор  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , будучи численно равен площади параллелограмма  $OPRQ$  со сторонами  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR}$  и  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PR}$  (рис. 6), направлен по перпендикуляру к плоскости этого параллелограмма в ту сторону, куда движется обыкновенный (правый) винт при вращении от  $\overrightarrow{OP}$  к  $\overrightarrow{OQ}$  на угол  $\alpha < 180^\circ$  (т. е. в рассматриваемом случае от читателя).

Из этого определения следует, что векторным произведением  $\mathbf{B}$  на  $\mathbf{A}$  является вектор, противоположный предыдущему, т. е. равный  $-\mathbf{C}$ .

Таким образом мы имеем следующее равенство:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (7)$$

показывающее, что векторное произведение, в противоположность скалярному, свойством переместительности не обладает.

Площадь параллелограмма равна произведению одной из его сторон на соответствующую высоту; последнюю можно рассматривать как проекцию другой стороны

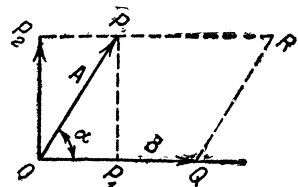


Рис. 6.

на прямую, перпендикулярную к первой. Обозначая угол между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  через  $\alpha$ , имеем, следовательно:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{B} \times \mathbf{A}| = A \cdot B \sin \alpha. \quad (8)$$

В случае параллельности двух векторов их векторное произведение обращается в нуль. В общем случае, разлагая один из векторов, например  $\overrightarrow{OP}$ , на составляющие  $\overrightarrow{OP}_1 = \mathbf{A}_1$  и  $\overrightarrow{OP}_2 = \mathbf{A}_2$ , соответственно параллельную и перпендикулярную к  $\overrightarrow{OQ}$  (рис. 6), мы можем очевидно положить

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B} + \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}$$

(ибо, согласно предыдущему,  $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{B} = 0$ ). Равенство

$$(\mathbf{E} + \mathbf{F}) \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{F} \times \mathbf{B} \quad (9)$$

выражающее распределительное свойство векторного произведения, легко обобщается на случай произвольных векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}$ . Так например, если последние представляют собой составляющие вектора  $\mathbf{A} = \overrightarrow{OP}$ , то, проводя отрезки  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QT} = \mathbf{E}$  и  $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{TR} = \mathbf{F}$  (рис. 7), мы можем

<sup>1)</sup> Или же  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ .