А.И. Гольденберг

Беседы по счислению

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.И. Гольденберг
А11 Беседы по счислению / А.И. Гольденберг – М.: Книга по Требованию, 2022. – 176 с.

ISBN 978-5-458-27466-1

Пособие по методике преподавания математики в начальной школе.

ISBN 978-5-458-27466-1

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

БЕСЕДА ПЕРВАЯ.

Характер занятий на краткосрочных педагогических курсах.—Извлечение из книги С. А. Рачинского „Сельская школа“ о преподавании арифметики.—Характеристика четырех главных арифметических действий.—Понятие о простых и составных числах.—Разъяснение содержания теоремы Фермата.

Занятия на краткосрочных педагогических курсах заключаются, как известно, в так называемых образцовых уроках, даваемых руководителем в курсовой школе, в пробных уроках, даваемых в той же школе курсистами, и в беседах руководителя, имеющих предметом совместное с слушателями обсуждение методических вопросов. Из этих трех видов занятий я признаю беседы наиболее полезными и целесообразными; уроки же как образцовые, так и пробные, происходя при условиях, далеких от действительности и в обстановке более или менее искусственной (а иногда и нежелательной), имеют лишь второстепенное значение.

Прежде чем приступить к нашим занятиям, я прочту вам извлечение из книги Сергея Александровича Рачинского „Сельская школа“ [1]):

„Посторонних посетителей, изредка заглядывающих в мою школу (в селе Татеве, Бельского уезда, Смоленской губернии), всего более поражает умственный счет ее учеников. Та быстрота и легкость, с которою они производят в уме умножения и деления, обращаются с мерами квадратными и кубическими, соображают данные сложной задачи, то радостное оживление, с которым они предаются этой умственной гимнастике, наводят на мысль, что в этой школе употребляются особые, усовершенствованные приемы для преподавания арифметики, и что я обладаю в этом отношении каким-то особым искусством или секретом.

---

[1]) „Сельская школа“. Сборник статей *С. А. Рачинского.* С предисловием Н. Горбова. Изд. второе. Москва, 1892 г. Цена 1 руб. 25 коп.

Ничто не может быть ошибочнее этого впечатления. Конечно, теперь я владею некоторым навыком к умственному счету, могу импровизировать арифметические задачи в том быстром темпе, в котором они решаются моими учениками. Но до этих скромных умений довели меня или, лучше сказать, домучили сами ученики.

Именно, домучили. Никогда не занимался я специально арифметикой, упражняться в умственном счете никогда и не думал. Принялся я за преподавание счета в сельской школе, не подозревая, на что я иду.

Не успел я приступить к упражнениям в умственном счете, которые до тех пор в школе не практиковались, как в ней к ним развилась настоящая страсть, не ослабевающая до сих пор.

С раннего утра и до позднего вечера стали меня преследовать то одна группа учеников, то другая, то все вместе с требованием умственных задач. Считая эти упражнения полезными, я отдал себя в их распоряжение. Очень скоро оказалось, что они опережают меня, что мне нужно готовиться, самому упражняться. На пятом десятке некоторые умственные способности утрачивают свою эластичность. Эта первая зима была для меня очень тяжела. К этому вскоре присоединилась страсть к письменным упражнениям в счете. Ребята вздумали щеголять друг перед другом быстрым и точным умножением и делением на доске многозначных чисел, не поддающихся умственному счету. Тут я было совершенно стал втупик. Эти припадки обыкновенно случались вечером. Наши вечерние занятия, теперь все более и более принимающие характер правильных уроков, тогда были гораздо свободнее, да и теперь, во избежание утомления, часто приходится нарушать их однообразный строй. Вечером же происходили и спевки, в которых участвовали все мои помощники, все лучшие ученики. Я оставался один с непоющими учениками. Этого только и ждали мои мучители. Разом, все они, человек тридцать, накидывались на меня с дощечками: „Сергей Александрович, деленьице!—Мне на сотни!—Мне на единицы!—Мне на миллионы!—Мне на тысячи!“ И решения подавались с такою быстротою, что я едва успевал писать задачи. Поверять—никакой физической возможности!

Тут однажды, в минуту отчаянья, я бессознательно тиснул у себя в мозгу какую-то неведомую мне пружину, и все деления стали выходить без остатка.

Восторгу ребят не было границ. Но—увы!—на следующий вечер они потребовали от меня того же, и я не мог исполнить их желания. Лишь впоследствии, мало-по-малу, выяснил я себе то простое сочетание мнемонических приемов с быстрым умственным умножением, которое дает возможность придумывать безостановочно бесконечный ряд десяти- и двенадцатизначных чисел, делимых без остатка на любые другие числа, и вместе с тем — бесконечный простор для импровизации задач устных и письменных.

Эта беспрестанная, усиленная возня с цифрами нагнала на меня настоящий арифметический кошмар, загнала меня в теорию чисел, заставила меня неоднократно открывать Америку, т.-е. неизвестные мне теоремы Фермата и Эйлера...

Часто задавал я себе вопрос, какими основными способностями обусловливается та необыкновенная ловкость в обращении с числами, тот живой интерес к цифрам и сочетаниям, которым отличаются наши крестьянские ребята. Нет сомнения, что тут значительную роль играет их удивительная память. Но, кроме памяти, тут, очевидно, участвуют и другие способности: воображение, живо рисующее перед ними состав чисел из первоначальных множителей и их сочетаний, способность связывать внешний вид цифры с этим составом. Почти всегда у хороших счетчиков оказывается и художественная струнка. Этому обстоятельству, впрочем, особого значения придавать нельзя. Крестьянские дети тем и отличаются от детей высших сословий, что односторонние способности встречаются у них весьма редко. Тот из них, который способен к пению, непременно окажется способным и по арифметике, и по русскому языку, и, наоборот, мальчики, умственно слабые, редко имеют какие-либо художественные способности и склонности. Эта соразмерность дарований распространяется даже на сферу нравственную и придает этим детям их особенную привлекательность.

Говоря тут о преподавании арифметики в сельской школе, ограничиваюсь беглыми указаниями на мои наблюдения и впечатления. Подробные рассуждения о методике этого предмета были бы неуместны на этих страницах. Но считаю возможным связать с вышесказанным два замечания, имеющие практическую важность. Первое касается того приступа к преподаванию арифметики, который выработан немецкими педагогами и получил у нас право гражданства, благодаря повсеместному распространению учебников Евтушевского. Основан он на долговременном и всестороннем изучении чисел первого десятка, за которым следует столь же кропотливое изучение чисел первой сотни. Прием этот, быть может, необходимый, когда приступаешь к делу с пятилетними детьми (или с идиотами), отзывается чрезвычайной искусственностью, когда имеешь дело с детьми вдвое старшими, уже умеющими считать более ста, уже имеющими практическое понятие о десятичной системе, благодаря известному им счету на копейки, гривенники и рубли. А таково большинство детей, поступающих в наши сельские школы. Нередко приходилось мие наблюдать любопытный факт, что крестьянские дети, не умеющие называть чисел далее двадцати, подчас имеют ясное представление о числах до ста и далее. Поддерживать с такими детьми фикцию, что далее десяти — чисел нет, или что они им неизвестны, совершенно непрактично. Разумеется, им по большей части совершенно прозрачен лишь первый десяток, и состав чисел первой сотни должен быть им разъяснен рядом упражнений. Но в этих упражнениях нужно избегать педагогической медленности, постоянно ощупывать дорогу вперед, имея в виду необыкновенную восприимчивость количественного созерцания в наших крестьянских ребятах. Притом нет никакой причины скрывать от них в течение всего первого года существование тысяч, десятков и сотен тысяч—бесконечную перспективу чисел, группирующихся по системе, уже известной им по копейкам, гривенникам и рублям. Конечно, нужно избегать упражнений, превышающих силы учащихся, сообщения таких математических истин, которые могут быть восприняты только их памятью. Но не менее того нужно избегать слишком долгого пережевывания уже известного ученикам: оно порождает скуку, отучает их от необходимых умственных усилий. Свойствам чисел первой сотни нет конца. Если бы мы вздумали их исчерпать, прежде чем двинуться далее, мы бы никогда не дошли до второй.

Другое замечание, более общего свойства, сводится к тому, что ничтожные знания, приобретаемые в сельской школе, только и получают некоторую цену, если сопряжены с соответствующими умениями. В области арифметики,—разумею тут быстрый и верный счет, умственный и письменный,—этих умений инстинктивно добиваются сами ученики, и обязанность учителя—всячески помогать их приобретению. Так, в моей школе всякий ученик, постигший тайны деления, считает долгом сделать, вне уроков несколько сотен „деленьиц" на все числа под ряд, начиная от 200 до 300, 400 и 500, смотря по усердию, чтобы набить себе руку. Это положительно полезно: мне остается только благодарить Бога, что у ребят на это хватает терпения, и поддерживать их похвальное рвение задаванием им делений без остатка или с остатком, по их заказу, и целым рядом подобных письменных и умственных упражнений.

Для успеха дела, разумеется, нужно, чтобы учитель сельской школы владел приемами умственного счета и имел к нему порядочный навык. К сожалению, знакомство с этими приемами, этот навык, у наших учителей встречается редко. Особенно слабы в этом отношении те, которые прошли через учительские семинарии".

В прочитанном мною отрывке почтенный автор „Сельской школы" упоминает о теоремах Фермата и Эйлера,—теоремах, которые относятся к тому отделу высшей математики, который известен под названием „Теория чисел" и не имеет, конечно, непосредственного отношения к предмету наших предстоящих занятий, тем не менее это упоминание дает мне повод сделать небольшое отступление, которое, может быть, окажется небесполезным для учащих в начальных училищах.

Начальная арифметика искони имеет своим предметом так называемые „Четыре правила"; в школе она ставит себе целью обучить детей производству четырех арифметических действий над целыми числами. Эти действия, как хорошо известно всем, следующие: сложение, вычитание, умножение, деление. Они могут быть распределены на две группы: на действия прямые, или сочленяющие (сложение и умножение), и на действия обратные, или расчленяющие (вычитание и деление). Ученые люди называют иногда первые два действия литическими, последние два— аналитическими.

Понятие о сложении двух чисел так же, как и понятие о сумме двух чисел, принадлежит к простейшим и может быть неопределимым понятием. От понятия о сумме двух чисел мы восходим к понятию о сумме трех, четырех, нескольких чисел,—и разумеем под такой суммой число, которое получим, когда к сумме двух первых чисел прибавим четвертое, затем прибавим к полученному следующее число и т. д. до последнего. Этот ряд сложений мы можем (мы в праве) выполнять, как известно, в любом порядке и в любой группировке, лишь бы не пропустить ни одного слагаемого и не ввести ни одного из них лишний раз в вычисление. Под словами в любой группировке разумеют следующее: если надлежит сложить ряд чисел, напр., шесть чисел, то, не изменяя порядка их, можно сложить первые четыре числа и запомнить или записать результат, затем сложить остальные два числа и прибавить к первой сумме вторую.

Может случиться, что все слагаемые данной суммы равны между собой; в этом частном случае каждое из равных слагаемых получает, как известно, название множимого, число этих равных слагаемых (всегда отвлеченное) называется множителем, результат сложения равных чисел получает название произведения, а вычисление такой суммы, т.-е. умножение, является вторым прямым арифметическим действием. От понятия о произведении двух чисел мы восходим к понятию о произведении трех, четырех, нескольких чисел,— любого числа чисел,—и разумеем под таким произведением число, которое получим, когда произведение двух первых чисел умножим на данное третье число, полученное число помножим на четвертое и т. д. до последнего. Этот ряд умножений мы можем (мы в праве) выполнять, как известно, в любом порядке и в любой группировке, лишь бы не пропустить ни одного множителя и не ввести ни одного из них лишний раз в вычисление. Под словами в любой группировке разумеют следующее: если надлежит перемножить ряд чисел, напр., шесть чисел, то, не изменяя порядка их, можно перемножить первые четыре числа и запомнить или записать результат, затем перемножить остальные два числа и умножить первое произведение на второе.

Может случиться, что все множители данного произведения равны между собой; в этом частном случае произведение равных множителей получает название степени числа, число равных множителей называется показателем степени. Пусть, напр., имеем произведение, в которое число 2 входит шесть раз множителем, т.-е. имеем: 2.2.2.2.2.2.

Такое произведение обозначают сокращенно так: пишут возводимое в степень число—в нашем примере число 2—и над ним вправо пишут (шрифтом мелким) показателя степени, т.-е. 6, в нашем примере: $2.2.2.2.2.2=2^6$.

Такое выражение читают: два, возведенное в шестую степень, или шестая степень двух (или числа 2). Возводимое в степень число называют основанием степени. Для вычисления данной степени данного числа надлежит выполнить над основанием ряд умножений, показанных показателем: $2^6=64$.

Чтобы получить седьмую степень двух, нужно умножить 64 на 2; чтобы получить восьмую,—умножить 128 на 2 и т. д. Десятая степень числа 2 равна: $2^{10}=1024$, в чем легко убедиться непосредственным умножением. Если бы пожелали иметь 2^{20}, то надлежало бы умножить 1024 (т.-е. произведение десяти чисел, из которых каждое равно 2) на равное ему произведение; в результате получили бы число 1 408 576. Относительно возведения чисел в степень следует заметить, что возведение в степень представляет действие непереместительное, что, принимая основание за показателя и обратно, мы изменяем результат; так, напр., 5^2 не равно 2^5 (первое число—25, второе—32). Единственное исключение представляет тождество: $4^2=2^4$. Возведением (или возвышением в степень) замыкается круг прямых арифметических действий.

Неограниченный ряд чисел: 1,2,3,4... называют иногда натуральным (естественным) рядом чисел; этот ряд распадается на две неограниченные области: на область простых (или первоначальных) чисел и на область составных чисел. В ходячих учебниках арифметики читаем следующее: „Те числа, которые могут делиться (делиться—значит делиться без остатка) только на единицу и на самих себя, называются первоначальными, а те, которые, кроме единицы и самих себя, могут делиться еще и на другие числа, называются составными". Такое определение не вразумительно, так как выражение делиться на единицу условное и требует разъяснения. Гораздо проще называть простым такое число, которое может быть набрано только единицами, а составным такое, которое может быть набрано группами единиц. Числа 5,7,11,13, напр., простые, так как могут быть набраны только единицами; число 24—составное, так как может быть набрано двойками, тройками, четверками, шестерками, дюжинами.

Закон распределения или размещения простых чисел, в необъятной веренице чисел натурального ряда, не открыт и и до настоящего времени, несмотря на все усилия математиков-гениев, к числу которых принадлежали Фермат и Эйлер.

После всего сказанного, я в состоянии разъяснить вам содержание теоремы Фермата, не доказательство ее, а только ее содержание [1]. Выберем два числа: первое—какое угодно, т.-е. простое или составное, второе—непременно простое и притом такое, которое не делилось бы на первое; выберем, напр., числа 9 и 5; примем первое число за основание и возведем его в степень, на единицу меньшую выбранного нами простого числа, т.-е. в степень 4; $9^4=6561$; вычтем 1 из полученного результата; разность эта 6560 всегда разделится на 5, т.-е. на выбранное нами простое число.

Еще пример: выберем 2 за основание и возведем это число в степень, на единицу меньшую простого числа 11, т.-е. в десятую степень, получим $2^{10}=1024$, вычтем 1 из результата, получим число 1023, которое без остатка делится на 11, что легко проверить устно, разложив 1023 на слагаемые 990 и 33, из которых каждое явно делится на 11.

---

[1] Доказательство ее помещено, между прочим, в арифметике Малинина и Буренина, изд. 21, стр. 91.

БЕСЕДА ВТОРАЯ.

Понятие о числе.—Монографический способ изучения чисел.—Цель обучения арифметике в начальной школе.—Характер обучения в старой и новой школе.—Понятия, выражаемые словами: „знание" и „уменье".— Устные, полуписьменные и строго-письменные вычисления.

Понятие, выраженное словом *число*, принадлежит к наиболее общим и до крайности простым. Выражаясь языком логики, мы должны признать за этим понятием *наибольший объем при наименьшем содержании*: нет вещей, к которым понятие числа было бы неприложимо, и в то же время нет понятия, которое было бы настолько *бедно* признаками, как именно понятие о числе; в действительности, это понятие совсем неразложимо на признаки, заключая в себе лишь один признак—признак множественности, численности, количественности,—с отвлечением от которого и само понятие исчезает из нашего сознания.

Немецкий педагог Грубе и его последователи—в том числе Евтушевский, имя которого вам хорошо известно—утверждают, что *все числа первой сотни подлежат непосредственному созерцанию и доступны ясному представлению*. Если сторонники *монографического изучения чисел* разумеют под словом число *отвлеченное число*, то понятие, обозначаемое этим словом, не подлежит ни представлению, ни созерцанию: как и любое отвлеченное понятие, оно может быть только *мыслимо*. Если же понимать утверждение относительно представляемости чисел до ста в том смысле, что группа предметов (шариков, кубиков, точек, крестиков и пр.), число которых не превосходит сотни, *отчетливо* представляется нам относительно своего численного состава,—то такое утверждение совершенно произвольно и стоит в полном противоречии с выводами психологии. Действительно, если мы можем ясно представить себе группу, составленную из предметов в небольшом числе (3, 4, 5), то не можем сделать этого в тех случаях, когда число предметов несколько значительно. Так, например, мы очень хорошо понимаем, ясно мыслим, что́ следует разуметь под словами: тридцать шесть кубиков, но не в состоянии представить себе ряда 36 кубиков по отношению к его численности, как представляем себе, напр., знакомую местность или знакомое лицо, виденный памятник, водопад и проч. Если мы разобьем группу в 36 кубиков на две равные группы (раздвинем ее), то ясно представим себе обе группы, но не будем в состоянии представить себе число кубиков, составляющих каждую из этих групп, хотя будем знать, что их по 18; если же мы разложим наш ряд попарно, то ясно представим себе каждую маленькую, отдельную группу, но не будем в состоянии представить себе ряда этих групп. Если бы подобный ряд находился перед нашими глазами, то и тогда мы могли бы определить численный состав его только путем счета, а не путем созерцания.

„Тридцать шесть означает качество, общее всем группам из 36 неделимых, качество, которое, будучи перед нашими глазами, не возбуждает в нас определенного стремления, и которое мог бы чувствовать ум, способный держать перед собою одновременно тридцать шесть отдельных предметов“ [1]).

Никакое изучение чисел не может увеличить емкость нашего ума и развить в нем способность непосредственно (интуитивно) воспринимать и отчетливо представлять, относительно численного состава, несколько значительную группу предметов.

Психолог Прейер—книга которого „Душа ребенка“ переведена на русский язык—говорит в одном из своих исследований, что, имея перед глазами группу предметов в числе трех, мы можем непосредственно узнать это число, не производя счета, и называет такой процесс условным выражением: бессознательный счет. Если же число предметов, находящихся перед глазами, превосходит этот ограниченный предел, и если предметы размещены в ряд (вере-

[1]) *И. Тэн.* Об уме и познании. Перев. Страхова. Т. 1, стр. 26.