

В. И. Смирнов

Курс высшей математики

Том 4. Часть 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
В11

В11 **В. И. Смирнов**
Курс высшей математики: Том 4. Часть 1 / В. И. Смирнов – М.: Книга
по Требованию, 2024. – 336 с.

ISBN 978-5-519-71001-5

Издание 6.

ISBN 978-5-519-71001-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Г Л А В А III

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ L_1 И L_2 .
ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПРОБЛЕМА МИНИМУМА
КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

110. Усреднение функций из L_1 и L_2 (311). 111. Свойства средних (313). 112. Финитные бесконечно дифференцируемые функции (315). 113. Обобщенные производные (317). 114. Свойства обобщенных производных (320). 115. Классы функций $W_{\frac{1}{2}}^1(\mathcal{D})$, $\dot{W}_{\frac{1}{2}}^1(\mathcal{D})$ и $W_{\frac{3}{2}}^2(\mathcal{D})$ С.Л. Соболева (322). 116. Неравенство Пуанкаре. Теорема Реллиха (327). 117. Постановка задачи о минимуме квадратичного функционала (330). 118. Решение вариационной задачи (332). 119. Связь с краевой задачей (333).

Алфавитный указатель 335

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее шестое издание четвертого тома существенно отличается от пятого издания. Это связано с тем, что четвертый том впервые печатается после изменения второго тома, в котором изложена теория интеграла Лебега и класс L_2 функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу. Это повлекло изменение изложения первой главы IV тома — теории интегральных уравнений. Кроме того, добавлена третья глава, содержащая изложение новых точек зрения на некоторые основные понятия математического анализа. Вторая глава (вариационное исчисление) несколько расширена. В третьей главе уже с новых точек зрения рассмотрена задача о минимуме квадратичного функционала.

В предыдущем издании четвертый том содержал более 800 страниц. В настоящем издании его пришлось разбить на две части, и настоящая книга является первой его частью.

В заключение я приношу глубокую благодарность моим коллегам по университету М. Ш. Бирману, О. А. Ладыженской, М. З. Соломяку и Н. Н. Уральцевой за большую помощь при составлении этой книги.

В. Смирнов

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Примеры составления интегральных уравнений. Интегральным уравнением называется всякое уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Пусть ищется решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Мы видели раньше [II: 51], что эта задача сводится к решению интегрального уравнения:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0.$$

Совершенно так же задача интегрирования дифференциального уравнения порядка $y'' = f(x, y)$ с начальными данными $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$ приводится к интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f[z, y(z)] dz + y_0 + y'_0(x - x_0).$$

Преобразуя двукратный интеграл в простой [II; 17], можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$y(x) = \int_{x_0}^x (x - z) f[z, y(z)] dz + y_0 + y'_0(x - x_0).$$

Общее решение уравнения $y'' = f(x, y)$ получится из интегрального уравнения

$$y(x) = \int_0^x (x - z) f[z, y(z)] dz + c_1 + c_2 x, \quad (1)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а нижний предел интегрирования мы положили равным нулю. Рассмотрим теперь для нашего уравнения второго порядка предельную задачу, а именно, будем искать решение уравнения, удовлетворяющее предельным условиям $y(0) = a$; $y(l) = b$. Полагая в уравнении (1) сначала

$x = 0$, а потом $x = l$, получим два уравнения для определения произвольных постоянных, которые дадут нам

$$c_1 = a; \quad c_2 = \frac{b-a}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (l-z) f[z, y(z)] dz.$$

Подставляя найденные значения в формулу (1), приведем нашу предельную задачу к интегральному уравнению:

$$y(x) = F(x) + \int_0^x (x-z) f[z, y(z)] dz - \frac{x}{l} \int_0^l (l-z) f[z, y(z)] dz, \quad (2)$$

где

$$F(x) = a + \frac{b-a}{l} x.$$

Мы можем переписать уравнение (2) в следующем виде:

$$y(x) = F(x) - \int_0^x \frac{z(l-x)}{l} f[z, y(z)] dz - \int_x^l \frac{x(l-z)}{l} f[z, y(z)] dz. \quad (3)$$

Введем функцию двух переменных:

$$K(x, z) = \begin{cases} \frac{z(l-x)}{l} & \text{при } z \leq x, \\ \frac{x(l-z)}{l} & \text{при } x \leq z. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение (3) может быть переписано при помощи этой функции следующим образом:

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) f[z, y(z)] dz. \quad (5)$$

Применим полученные результаты к линейному уравнению

$$y'' + p(x)y = \omega(x). \quad (6)$$

Мы можем утверждать, что задача нахождения решения этого уравнения при предельных условиях

$$y(0) = a; \quad y(l) = b \quad (7)$$

равносильна нахождению функции $y(x)$ из линейного интегрального уравнения.

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^l K(x, z) p(z) y(z) dz, \quad (8)$$

где

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) \omega(z) dz$$

есть известная функция независимой переменной x .

Отметим, что в уравнении (1) верхний предел интегрирования переменный, тогда как в уравнении (8) оба предела интегрирования постоянны. Отметим еще, что как в уравнении (1), так и в уравнении (8) искомая функция входит не только под знак интеграла, но и вне знака интеграла. Это обстоятельство, как мы видели выше [II; 50], является существенным при применении к решению уравнения метода последовательных приближений.

Умножим коэффициент $p(x)$ в уравнении (6) на некоторый параметр λ и рассмотрим однородное уравнение

$$y'' + \lambda p(x) y = 0 \quad (9)$$

при однородных предельных условиях:

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (10)$$

Эта однородная предельная задача приведет нас к однородному интегральному уравнению, содержащему параметр λ :

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z) p(z) y(z) dz. \quad (11)$$

Одним из основных вопросов в дальнейшем будет вопрос о том, при каких значениях параметра λ поставленная задача имеет решения, не равные тождественно нулю. Мы уже встречались с этой задачей раньше при применении метода Фурье к предельным задачам математической физики. Отметим еще некоторые характерные свойства функции $K(x, z)$, которая называется *ядром* нашего интегрального уравнения. Это ядро — непрерывная функция в квадрате k_0 , определяемом неравенствами $0 \leq x \leq l$ и $0 \leq z \leq l$. На диагонали этого квадрата, т. е. при $x = z$, первая производная от ядра терпит разрыв:

$$K_x(x, z)|_{x=z+0} - K_x(x, z)|_{x=z-0} = -1.$$

Далее, упомянутое ядро, как функция от x , вне диагонали есть решение однородного уравнения $y'' = 0$, удовлетворяющее однородным предельным условиям (10). Отметим, наконец, свойство симметрии ядра, выражаемое равенством

$$K(z, x) = K(x, z). \quad (12)$$

Все эти свойства ядра непосредственно вытекают из формулы (4).

Ядро $K(x, z)$ имеет простой физический смысл. Напомним, что при действии сосредоточенной силы в точке $x = z$ на струну,

закрепленную на концах, мы должны иметь в точке приложения силы условие [II; 176]:

$$T_0 [(u_x)_{x=z+0} - (u_x)_{x=z-0}] = -P,$$

где P — величина действующей силы. Нетрудно проверить, что функция

$$u(x) = \frac{P}{T_0} K(x, z)$$

дает форму статического прогиба струны под влиянием упомянутой выше сосредоточенной силы. Отметим при этом, что уравнение колебаний струны в статическом случае сводится просто к уравнению $u_{xx} = 0$. Все эти идеи приведения предельной задачи к интегральному уравнению, изложенные нами здесь для простейшего случая, будут подробно развиты во 2-й части тома.

Укажем еще на один характерный метод приведения предельных задач математической физики к интегральному уравнению. Мы определили раньше потенциал сферического слоя следующей формулой:

$$u(M) = \int_S \int \frac{\rho(M')}{d} ds,$$

где $\rho(M')$ — заданная на поверхности сферы S функция, ds — элемент площади поверхности сферы и d — расстояние от переменной точки пространства M до переменной точки M' поверхности сферы. Пусть n — направление нормали в некоторой точке M_0 сферы. Обозначим через $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$ и $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e$ предельные значения, которые имеет производная $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ при приближении переменной точки M пространства к точке M_0 изнутри или извне сферы. Мы вывели раньше [III₂; 139] следующие формулы:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i &= - \int_S \int \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds + 2\pi \rho(M_0), \\ \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e &= - \int_S \int \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds - 2\pi \rho(M_0), \end{aligned} \quad (13)$$

где d — расстояние от точки M_0 до переменной точки M' сферы и ω — угол, образованный радиусом-вектором $M'M_0$ с направлением n .

В следующей главе мы увидим, что эти формулы справедливы не только для сферы. Поставим теперь внутреннюю задачу Неймана для сферы, т. е. положим, что ищется функция, гармони-

ческая внутри сферы, нормальная производная которой имеет заданные предельные значения на поверхности сферы:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(M_0). \quad (14)$$

Будем искать функцию u в виде потенциала сферического слоя. Этот потенциал является гармонической функцией внутри сферы, и нам надо только подобрать плотность $\rho(M')$ этого потенциала так, чтобы удовлетворялось и предельное условие (14). Принимая во внимание первую из формул (13) и предельное условие (14), мы получаем для определения искомой плотности следующее интегральное уравнение:

$$2\pi r(M_0) = f(M_0) + \int_S \rho(M') \frac{\cos \omega}{a^2} ds.$$

Заметим, что в данном случае функции $f(M)$ и $\rho(M)$ должны быть определены на поверхности сферы, и интегрирование производится не по интервалу оси OX , как это было выше, а по поверхности сферы.

2. Классификация интегральных уравнений. Будем рассматривать пока линейные интегральные уравнения лишь для того случая, когда искомая функция должна быть определена на оси OX . Напишем интегральное уравнение

$$y(x) = \int_a^x K(x, z) y(z) dz + f(x), \quad (15)$$

где $y(x)$ — искомая функция, а $f(x)$ и $K(x, z)$ — заданные функции. Функция $K(x, z)$, как мы уже упоминали, называется *ядром интегрального уравнения*.

Написанное уравнение называется *уравнением Вольтерра второго рода*. Аналогичное уравнение с постоянными пределами

$$y(x) = \int_a^b K(x, z) y(z) dz + f(x) \quad (16)$$

называется *уравнением Фредгольма второго рода*. Если искомая функция входит только под знак интеграла, то мы получаем уравнения Вольтерра или Фредгольма *первого рода*. Они имеют вид

$$\int_a^x K(x, z) y(z) dz = f_1(x); \quad \int_a^b K(x, z) y(z) dz = f_1(x). \quad (17)$$

Примером уравнения Вольтерра первого рода является уравнение Абеля, о котором мы говорили раньше [II; 82]:

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y) dy}{\sqrt{h-y}}.$$

Дадим пример уравнения Фредгольма первого рода. Пусть $u(x)$ есть статический прогиб струны при наличии непрерывно распределенной нагрузки $p(z)$, рассчитанной на единицу длины. Будем рассматривать эту непрерывно распределенную нагрузку как сумму сосредоточенных нагрузок $p(z) dz$. От каждой такой сосредоточенной нагрузки мы получаем, согласно сказанному в предыдущем параграфе, статический прогиб вида:

$$\frac{1}{T_0} K(x, z) p(z) dz,$$

где $K(x, z)$ определяется формулой (4). Интегрируя, получим статический прогиб при непрерывно распределенной нагрузке:

$$u(x) = \frac{1}{T_0} \int_0^l K(x, z) p(z) dz.$$

Это уравнение является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, если задан прогиб $u(x)$ и ищется соответствующая нагрузка $p(z)$.

Отметим, что уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма. Действительно, в уравнении Вольтерра мы можем интегрировать по z от $z=a$ до $z=b$, если предварительно доопределить ядро $K(x, z)$ условием $K(x, z)=0$ при $z > x$.

Мы будем заниматься в дальнейшем почти исключительно уравнениями второго рода, главным образом уравнениями Фредгольма второго рода. Именно эти уравнения встречаются наиболее часто при решении предельных задач математической физики. Теория интегральных уравнений второго рода значительно проще теории уравнений первого рода. Как мы уже упоминали выше, наличие искомой функции вне знака интеграла дает нам естественную возможность применения метода последовательных приближений.

Теория интегральных уравнений во многом аналогична вопросам линейной алгебры, которые мы излагали в т. III. Напомним, что линейное преобразование в n -мерном пространстве имеет вид

$$y_i = a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n \quad (i = 1, \dots, n),$$

и осуществляется матрицей, образованной коэффициентами a_{ik} написанного преобразования. Иначе это преобразование мы записывали в виде:

$$y = Au,$$

где $u(u_1, \dots, u_n)$ — первоначальный вектор, $y(y_1, \dots, y_n)$ — преобразованный вектор и A — матрица, составленная из коэффициентов a_{ik} . В случае интегральных уравнений вместо вектора n -мерного пространства мы имеем функции, определенные обычно в некотором промежутке $[a, b]$. Вместо матрицы коэффициентов a_{ik} имеем

ядро $K(x, z)$ и вместо суммирования имеем процесс интегрирования, так что в рассматриваемом случае линейное преобразование выражается формулой

$$y(x) = \int_a^b K(x, z) u(z) dz, \quad (18)$$

где $u(z)$ — первоначальная функция и $y(x)$ — преобразованная функция.

Напомним далее, что собственными значениями матрицы A мы называли такие значения параметра μ , при которых уравнение

$$Ax = \mu x$$

имеет решения x , отличные от нуля. В дальнейшем будем называть собственными значениями ядра $K(x, z)$ или соответствующего преобразования такие значения параметра μ , при которых однородное интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x, z) y(z) dz = \mu y(x)$$

имеет решения, не равные тождественно нулю. В теории интегральных уравнений наряду с собственными значениями μ принято рассматривать *характеристические* значения $\lambda = \mu^{-1}$. Таким образом, λ называется характеристическим значением, если уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, z) y(z) dz \quad (19)$$

имеет ненулевые решения. Сами эти решения $y(x)$ называют собственными функциями ядра.

Отметим еще, что тождественное преобразование, при котором функции $u(x)$ соответствует та же функция $u(x)$ [т. е. такое преобразование, при котором $y(x)$ совпадает с $u(x)$], не выражается в интегральной форме (18).

При изложении теории интегральных уравнений мы должны будем сделать, естественно, некоторые предположения относительно ядра $K(x, z)$, а также функций $f(x)$ и $y(x)$.

Пока, как мы уже упоминали, будем заниматься интегральными уравнениями в одномерном случае. Пути перехода к многомерному случаю будут указаны ниже.

Отметим, наконец, что в дальнейшем мы будем считать заданные и искомые функции комплексными:

$$\begin{aligned} K(x, z) &= K_1(x, z) + K_2(x, z) i, \\ f(x) &= f_1(x) + f_2(x) i, \\ y(x) &= y_1(x) + y_2(x) i, \end{aligned}$$

где $K_s(x, z)$, $f_s(x)$, $y_s(x)$ ($s=1, 2$) — вещественные функции. Независимая переменная всегда вещественна. В дальнейшем мы часто

будем иметь дело с конечным замкнутым промежутком. Такой промежуток мы будем обозначать символом $[a, b]$.

3. Ортогональные системы функций. В теории интегральных уравнений нам часто придется иметь дело с ортогональными системами функций. Теория таких систем подробно изложена в томе II для вещественных и комплексных функций с использованием как интеграла Римана, так и Лебега [II; 160, 163]. Здесь мы дополним эту теорию указанием на процесс ортогонализации систем линейно-независимых функций.

В [III₁; 31] мы видели, что если имеется m линейно-независимых векторов, то всегда можно построить столько же попарно ортогональных и нормированных векторов так, что прежние векторы выражаются линейно через новые, и наоборот. Весь этот процесс дословно переносится и на функции. Пусть

$$\psi_1(x), \dots, \psi_m(x)$$

— функции, непрерывные в $[a, b]$ и линейно-независимые, т. е. тождественное соотношение

$$\alpha_1 \psi_1(x) + \dots + \alpha_m \psi_m(x) \equiv 0$$

с постоянными коэффициентами α_k имеет место только в том случае, если все коэффициенты равны нулю. Построим новые функции, ортогональные и нормированные в $[a, b]$:

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x),$$

так что $\varphi_k(x)$ выражается линейно через $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$ и, наоборот, всякое $\psi_k(x)$ выражается линейно через $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$. Для краткости письма введем обозначение, аналогичное тому, которым мы уже пользовались в алгебре, а именно, обозначим через (f, F) интеграл от произведения $f(x)\overline{F(x)}$ по промежутку $[a, b]$:

$$(f, F) = \int_a^b f(x) \overline{F(x)} dx.$$

Процесс ортогонализации функций $\psi_k(x)$, т. е. процесс построения функций $\varphi_k(x)$, совершается следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{V(\psi_1, \psi_1)}$$

$$\chi_2(x) = \psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1) \varphi_1(x);$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\chi_2(x)}{V(\chi_2, \chi_2)}$$

$$\chi_3(x) = \psi_3(x) - (\psi_3, \varphi_2) \varphi_2(x) - (\psi_3, \varphi_1) \varphi_1(x);$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\chi_3(x)}{V(\chi_3, \chi_3)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\chi_m(x) = \psi_m(x) - (\psi_m, \varphi_{m-1}) \varphi_{m-1}(x) - \dots - (\psi_m, \varphi_1) \varphi_1(x);$$

$$\varphi_m(x) = \frac{\chi_m(x)}{V(\chi_m, \chi_m)}.$$