

Л. Ландау, А. Компанеец

**Электропроводность
металлов**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Л11

Л11 **Л. Ландау**
Электропроводность металлов / Л. Ландау, А. Компанеец – М.: Книга
по Требованию, 2016. – 62 с.

ISBN 978-5-458-57813-4

ISBN 978-5-458-57813-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2016

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2016

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

металлов нет никаких оснований считать оба эти вида взаимодействия величинами разного порядка. Тем не менее не удалось еще построить теоретическую картину металлического состояния, учитывая взаимодействие электронов друг с другом. При вычислениях электроны принимаются совершенно независимыми друг от друга и находящимися в одном только заданном поле ионов кристаллической решетки.

Трудно установить, насколько такой метод рассмотрения законен. Если даже взаимодействие электронов друг с другом и было бы мало по сравнению с их взаимодействием с ионами решетки, отсюда еще не следовала бы его несущественность для явлений металлической проводимости. Известно, что в кинетических процессах обыкновенно важны и величины весьма малые, не играющие роли в статистическом равновесии. Примером этого может служить взаимодействие молекул идеального газа. Оно никак не входит в термодинамические величины идеального газа. Кинетические величины, такие как теплопроводность, вязкость и т. д., наоборот, должны учитывать взаимодействие молекул с необходимостью. Также точно электропроводность металла могла бы зависеть и от относительно слабого взаимодействия электронов. Впоследствии будет показано, что слабое взаимодействие электронов на самом деле мало сказывается на проводимости металла. Надо еще раз оговориться, что нет никаких оснований считать взаимодействие электронов в металле действительно слабым.

С другой стороны, упрощенная модель даже с качественной стороны неспособна объяснить такого, например явления, как сверхпроводимость металла.

§ 2.

Прежде всего рассмотрим жидкие металлы, а также и те металлы, которые построены из произвольно расположенных атомов.

Легко видеть, что движение электрона в таком теле не может существенным образом зависеть от теплового движения атомов, медленного по сравнению с движением электронов. Поэтому следует ожидать, что сопротивление жидкого металла и особенно неупорядоченного сплава будет сравнительно слабо зависеть от температуры. На него может влиять только изменение конфигурации ядер¹⁾.

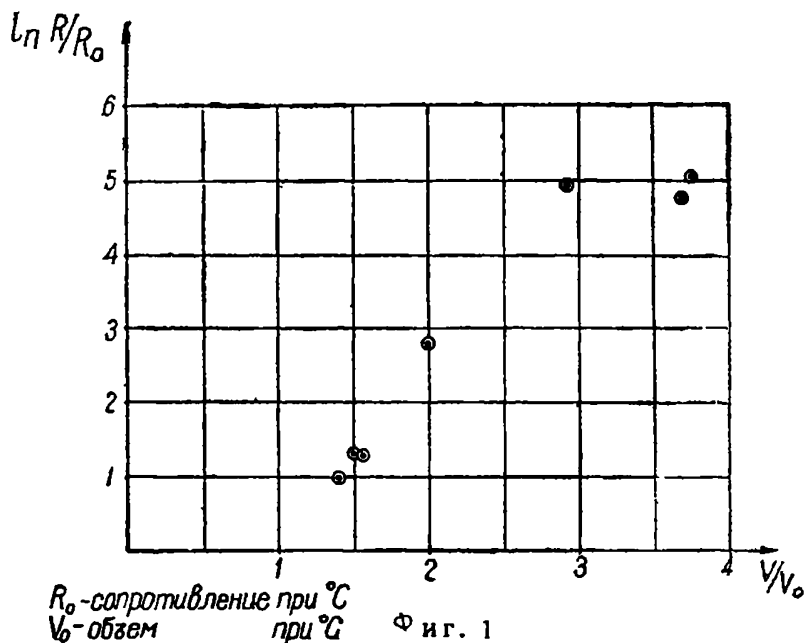
¹⁾ Иногда утверждается, что температурный коэффициент сопротивления жидких металлов имеет тот же характер, что и твердых. При этом пользуются помещаемым в таблицах температурным коэффициентом при постоянном давлении, тогда как следует пользоваться коэффициентом при постоянном объеме.

Нужный температурный коэффициент сопротивления следует искать по формуле

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial T} \right)_p - \frac{\frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_T \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T}$$

Из всех жидких металлов все величины $\frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_T$, $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$, $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ известны только для ртути, они равны: $\frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_T = 0,88 \cdot 10^{-3}$; $\frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_T = -32 \cdot 10^{-6}$; $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -400 \cdot 10^{-6}$; $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 181 \cdot 10^{-6}$; откуда искомый коэффициент при постоянном объеме равен $-0,57 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, сопротивление жидкой ртути уменьшается с температурой.

Особенно интересно проследить сопротивление жидкого металла вблизи критической точки¹⁾, что до сих пор произведено только для ртути. Этим достигается непрерывный переход из металлического состояния в газообразное, обладающее



Фиг. 1

бесконечно большим сопротивлением. Закономерности такого перехода могут принести большую пользу будущей теории металлического состояния, более совершенной, чем та, которая существует в настоящее время.

К сожалению, данные Birch'a о сопротивлении ртути вблизи критической точки не отнесены к объему, а данных о сжимаемости ртути вблизи критической точки вообще нет. Поэтому, чтобы

¹⁾ См. Birch, Phys. Rev, 41, p. 641

отнести данные к объему, приходится применить приведенное уравнение Ван дер Ваальса, пользуясь критическими постоянными ртути, полученными Birch'ем: $T_k = 1460^\circ \text{C}$ и $P_k = 1640$ ат. В связи с этим результаты приобретают, конечно, качественный характер. Измерения Birch'a представляются, будучи отнесенными к объему, диаграммой 1.

§ 3.

Обратимся теперь к твердым металлам. Твердый металл имеет кристаллическое строение, т. е. состоит из правильно расположенных атомов, в поле которых находятся электроны проводимости. В дальнейшем теория металлической проводимости исходит из того же приближения, что и теория молекул. Так как ядра кристаллической решетки очень тяжелы по сравнению с электронами, изучается не общая квантово-механическая система, состоящая из ядер и электронов, а только движение электронов при заданной конфигурации ядер—в виде кристаллической решетки. При этом можно изучать отдельно электронные и колебательные уровни решетки, подобно тому, как это делается для молекулы, что является в равной степени законным в обоих случаях.

Идеальная кристаллическая решетка производит в пространстве трехкратно периодическое силовое поле. Определим вид ψ функции электрона в таком поле, полагая его неограниченным во всех трех направлениях. Пусть решетка принадлежит к произвольной системе симметрии. Можно,

однако, выбрать различные масштабы для осей так, чтобы основной период по всем трем направлениям равнялся единице. Кроме того, удобно перейти к косоугольной системе координат, оси которой направлены по трем ребрам элементарного параллелепипеда. В такой системе координат проще всего описывается периодичность кристаллической решетки. Именно, потенциальная энергия электрона $U(x, y, z)$ не должна меняться от подстановки $x \rightarrow x + 1$,

$$y \rightarrow y + 1; \quad z \rightarrow z + 1 \text{ или, вообще,}$$

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{n}) = U(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mathbf{r}$ означает радиус вектор какой-либо точки $\mathbf{r}(x, y, z)$, а $\mathbf{n}$ — любой целочисленный вектор, т.е. такой вектор, проекции которого равны целым кратным основных периодов соответствующего направления.

Это позволяет сделать некоторые заключения о виде ψ функции электрона в решетке. Для простоты достаточно рассмотреть одномерную задачу, ибо результаты непосредственно обобщаются на трехмерный случай. Итак, пусть электрон находится в некотором силовом поле, потенциальная энергия в котором $U(x)$ инвариантна относительно преобразования $x \rightarrow x + 1$. Но тогда подстановка $x \rightarrow x + 1$ вообще не меняет волнового уравнения. Следовательно, ψ функция может от нее только умножиться на постоянный множитель. Обозначим его через $e^{i\epsilon}$.

Тогда

$$\psi(x + 1) = e^{i\epsilon} \psi(x).$$

Это уравнение в конечных разностях решается функцией

$$\psi(x) = e^{i\epsilon x} \varphi(\xi, x),$$

где $\varphi(\xi, x)$ есть функция, имеющая период решетки:

$$\varphi(\xi, x+1) = \varphi(\xi, x).$$

Далее, легко видеть, что величина ξ есть чисто действительная. В самом деле, волновая функция ψ должна оставаться конечной при $x = \pm\infty$. Но если бы ξ имело мнимую часть, множитель $e^{i\xi x}$ должен был бы обращаться в бесконечность при x , равном соответственно минус или плюс бесконечности.

Все эти рассуждения легко обобщить на трехмерный случай. Тогда ξ становится вектором, а волновая функция принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\xi\mathbf{r}} \varphi(\xi, \mathbf{r});$$

где

$$\varphi(\xi, \mathbf{r} + \mathbf{n}) = \varphi(\xi).$$

Очень существенно, что компоненты ξ , по своему своему определению, имеют смысл только будучи заданными по модулю 2π . Поэтому и энергия электрона ϵ , которая из волнового уравнения определяется как функция $\epsilon(\xi)$, должна иметь в компонентах ξ период 2π :

$$\epsilon(\xi + 2\pi \mathbf{n}) = \epsilon(\xi).$$

Здесь $\mathbf{n}$ — целочисленный вектор в ξ -пространстве.

В окончательной форме решение волнового уравнения выглядит так:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i\epsilon(\xi)t}{\hbar}} e^{i\xi\mathbf{r}} \varphi(\xi, \mathbf{r}). \quad (1)$$

Но в таком виде волновая функция электрона в решетке должна иметь большое сходство с волновой функцией свободного электрона:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i\epsilon(\mathbf{p})t}{\hbar}} e^{\frac{i\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}}$$

Величина ξh стоит на месте импульса, в дальнейшем ξ часто будет именоваться квазиимпульсом электрона в решетке. Вместо $\epsilon(\mathbf{p})$ для электрона в решетке получается $\epsilon(\xi)$, что еще дополняет сходство. Различие сказывается только в модулирующем множителе $\varphi(\xi, \mathbf{r})$ и в том, что квазиимпульс определен не точно, а по модулю 2π и $\epsilon \neq \frac{(\hbar\xi)^2}{2m}$.

Зная выражение для энергии электрона $\epsilon(\xi)$, можно построить также и выражение для его скорости. Для этого следует составить из волновых функций волновой пакет и найти его групповую скорость.

Этот волновой пакет можно представить функцией

$$\psi(x) = \int a(\xi) e^{i\xi x} \varphi(\xi, x) d\xi,$$

где интегрирование распространяется по весьма малому интервалу ξ . Иначе это можно выразить тем, что функция $a(\xi)$ практически отлична от нуля только в небольшом интервале ξ . Но в достаточно малом интервале периодическая в x функция $\varphi(\xi, x)$ может практически рассматриваться как независимая от ξ при любом x . Наоборот, $e^{i\xi x}$ при больших x отнюдь не может считаться постоянной в каком угодно малом интервале ξ , ибо при достаточно большом x она меняется сколь угодно быстро, как функция ξ . Поэтому, при указанном характере $a(\xi)$, $\psi(\xi, x)$ законно вынести за знак интеграла, а $e^{i\xi x}$, наоборот, необходимо оставить. При этом $\varphi(\xi, x)$ приобретает характер некоторого модулирующего множителя, а сам интеграл

$$\int a(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

получает совершенно такой же вид, как и соответствующий интеграл в выражении для волнового пакета, составленного для свободного электрона.

Если волновой пакет помещен в почти однородное силовое поле, он ведет себя подобно классическому электрону, имеющему скорость данного волнового пакета v . Для этого нужно, чтобы потенциальная энергия в таком поле слабо менялась на расстояниях порядка длины дебройлевской волны $\frac{2\pi\hbar}{mv}$. Для электронов, находящихся в кристал-

лической решетке, порядок длины дебройлевской волны порядка постоянной решетки, что дает меру однородности внешнего поля. Величина ξ заменяет импульс свободного электрона. Гамильтонова функция электрона в решетке имеет вид $\varepsilon(\xi) - e(\mathbf{F}\mathbf{r})$. Здесь $\varepsilon(\xi)$ — энергия без внешнего поля, $-e(\mathbf{F}\mathbf{r})$ — потенциальная энергия в слабом внешнем почти однородном поле $\mathbf{F}$. После всего сказанного к электрону в решетке законно применить уравнения Гамильтона. Именно, для скорости получится

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi},$$

а для изменения импульса

$$\xi = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial (\varepsilon - e\mathbf{F}\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e\mathbf{F}}{\hbar}$$

Импульс электрона в идеальной кристаллической решетке во внешнем поле $\mathbf{F}$ непрерывно возрастает. Поэтому такая решетка не имеет электрического сопротивления. В частности, ни о какой пропорциональности между током и полем говорить не приходится — сколь угодно слабое поле

может вызвать сколь угодно сильный ток, если ждать достаточно долго. На самом деле сопротивление обуславливается нарушением строгой периодичности решетки вследствие тепловых колебаний ядер.

После того как стало известно, от каких переменных зависит энергия электронов в решетке, на них можно навести статистику.

При абсолютном нуле они представляют полностью вырожденный фермиевский газ, или, наглядней, займут все квантовые состояния внутри поверхности $\epsilon = \epsilon_0$. Известно, что фермиевский газ остается сильно вырожденным вплоть до температур kT , при которых величина kT сравнима с нулевой энергией ϵ_0 . Это следует из того, что при температурах выше абсолютного нуля электроны не занимают полностью нулевой поверхности — часть их выходит за границу ϵ_0 . Около этой границы создается небольшая зона „размытости“, по порядку величины равная kT . Покуда размеры этой зоны остаются много меньше всего объема нулевой поверхности, электронный газ сильно вырожден. Наоборот, если температура такова, что $kT \approx \epsilon_0$, вырождение снимается. Можно оценить, до каких температур электронный газ остается вырожденным. Для оценки электроны в решетке достаточно рассматривать как свободные и положить $\epsilon \propto \frac{p^2}{2m}$. Тогда полный фазовый объем сферы $\epsilon = \epsilon_0$ равен

$$\frac{4}{3} \pi p_0^3 V = \frac{4}{3} \pi (2m \epsilon_0)^{3/2} V.$$

Здесь V означает объем, занимаемый электронами в конфигурационном пространстве.

С другой стороны, фазовый объем легко оценить непосредственно. Так как в каждой фазовой ячейке объема $(2\pi\hbar)^3$ могут находиться максимально два электрона с противоположно направленными спинами (согласно принципу Паули), общий фазовый объем системы, состоящий из N электронов, должен равняться

$$\frac{N}{2} (2\pi\hbar)^3.$$

Сравнивая это с полученным ранее выражением фазового объема через ε_0 , последнее легко получить как

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2m}.$$

Критерий вырождения мы примем как $kT \leq \varepsilon_0$. Отсюда, выбирая постоянную решетки $\sim 3 \cdot 10^{-8}$ и полагая один электрон приходящимся на элементарный кубик, получим

$$T \leq 3 \cdot 10^4.$$

Таким образом при всех температурах, достижимых экспериментально, электронный газ вырожден в очень высокой мере, тем более, что при температурах $\sim T^8$ металл плавится.

Так как взаимодействие электронов в настоящей теории не рассматривается, их следует статистически описывать как идеальный газ, находящийся в силовом поле атомов решетки. При этом для них следует взять обычную фермиевскую функцию распределения, где вместо энергии подставляется известная функция $\varepsilon(\xi)$. Остается определить вес состояния, отвечающего данному значению ξ .