М. Планк

Введение в теоретическую физику: Механика деформируемых тел

Часть II

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
М11

М. Планк
М11 Введение в теоретическую физику: Механика деформируемых тел: Часть II / М. Планк – М.: Книга по Требованию, 2021. – 184 с.

ISBN 978-5-458-37426-2

ISBN 978-5-458-37426-2

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

„Механика деформируемых тел“, представляя продолжение курса „Общей механики“ Планка в применении ее к специальным вопросам упругого деформируемого тела, в то же время подготовляет читателя к усвоению последующих курсов Планка по теории электричества и магнетизма и по теории света. Автор и в этом курсе с обычным мастерством, сжато и ясно, вводит читателя в круг исследований по теории упругости, гидродинамике и аэродинамике и в теорию вихревых движений в объеме, достаточном для того, чтобы можно было приступить к самостоятельной научной работе.

Редактор

Второе русское издание сверено с третьим немецким, отличающимся от предыдущего лишь крайне незначительными дополнениями и немногими поправками.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

О задаче, которую я поставил себе при составлении этого курса, а также о пути, выбранном мною для разрешения ее, можно сказать по существу то же самое, что я пытался изложить в предисловии к „Введению в общую механику“. В представлении читателя этой книги механика деформируемых тел должна возникнуть как естественное, обусловленное внутренней необходимостью продолжение общей механики и прежде всего как ряд тесно связанных, логически обоснованных понятий. Это даст читателю возможность не только изучать с полным пониманием более подробные курсы и специальную литературу, но и производить самостоятельные, более глубокие исследования.

Благодаря ссылкам на законы и уравнения, выведенные в упомянутой моей книге, нередко удается значительно сократить и упростить изложение. Такие ссылки обозначены цифрой *1*. Так например, *1*, (155) обозначает уравнение 155 „Общей механики“; *1*, § 49 обозначает § 49 той же книги. Кроме того, я старался сберечь место, пропуская те формулы или промежуточные вычисления, которые может выполнить без особого труда всякий читатель, обладающий математическим образованием.

В конце книги, как и в предыдущей, приложен алфавитный указатель встречающихся определений и важнейших выведенных теорем. Этот указатель окажется, надо думать, полезным для справок.

Автор

Берлин-Грюневальд,
февраль 1919 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

§ 1. Деформируемым телом, в противоположность неизменяемому телу, называется такое тело, которое в состоянии подвергнуться изменению формы либо все в целом, либо в какой-либо своей части. В природе, строго говоря, все тела деформируемы, так как не существует вовсе таких движений, которые не сопровождались бы большими или меньшими изменениями формы или деформациями тел, принимающих участие в этих движениях. Но во многих случаях, например при изучении маятника, рычага, волчка, достаточно, в качестве первого приближения к действительности, предположить, что рассматриваемые тела неизменяемы. Движениями неизменяемых тел занимается общая механика. Здесь же мы будем заниматься такими движениями, особенности которых характеризуются прежде всего деформациями тел. Поэтому нам необходимо еще несколько уточнить наши допущения о свойствах тел, причем мы прежде всего предположим в качестве основного допущения, что пространство, занимаемое телами, н е п р е р ы в н о заполнено материей. Конечно, и это допущение, подобно допущению о неизменяемости, представляет собою идеальную абстракцию и в точности никогда не соблюдается в природе, так как, строго говоря, все тела имеют атомистическое строение. Но в качестве первого приближения к действительности можно и в данном случае вполне обойтись упрощающим допущением. Подобно тому как при установлении простейших законов о рычаге было бы излишне и нецелесообразно рассматривать вместе с тем упругий изгиб, фактически всегда существующий, так и при изучении основных законов звуковых волн или течений жидкости было бы очень неудачным приемом, если бы мы с самого же начала захотели перейти к молекулам или даже к неизменным атомам рассматриваемых тел. К тому же даже атомы представляют собою снова лишь идеальную абстракцию. Природа вообще не может быть абсолютно исчерпана человеческой мыслью.

Самая важная и в то же время самая трудная для физика-теоретика задача при математической формулировке какой-либо проблемы заключается в том, чтобы ввести именно те упрощающие допущения, которые имеют существенное значение для интересующих его особенностей исследуемого физического явления, и в то же время пренебречь всеми влияниями меньшего порядка величин, которые ничего существенного не изменили бы в основных результатах и вошли бы в рассуждения лишь в качестве математического балласта. Важно и необходимо лишь требование, чтобы различные гипотезы, вводимые для различных проблем, были совместимы между собою. Иначе физическая картина мира потеряла бы свое единство, и мы имели бы, в зависимости от обстоятельств, различные противоречащие друг другу ответы на один и тот же вопрос.

Для той задачи, которую мы поставили себе в этой книге, целесообразнее всего разделить весь материал на три отдельные части. В первой части рассматриваются общие законы движения непрерывно заполняющих пространство тел, независимо от их агрегатного состояния, а во второй и третьей частях будут даны приложения этих законов к важнейшим видам движения, связанным с бесконечно малыми или же с конечными деформациями.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНО ПРОТЯЖЕННОГО ТЕЛА

ГЛАВА ПЕРВАЯ

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 2. Подобно тому как мы поступали в общей механике материальных точек и неизменяемых тел, мы и в механике деформируемых тел сначала рассмотрим свойства движений самих по себе, не ставя вопроса о причинах движений, и прежде всего постараемся дать для них исчерпывающее математическое представление. Движение материального тела вполне определенно тогда и только тогда, когда известны движения всех материальных точек, на которые его можно мысленно разложить, или же, другими словами, когда положение каждой такой материальной точки задано как функция времени. Чтобы характеризовать определенную материальную точку тела, рассмотрим состояние тела в момент времени $t=0$ и в этом состоянии определим положение каждой материальной точки тела тремя координатами a, b, c относительно неподвижной прямоугольной правой системы координат (*1*, § 16). Эти три величины, a, b, c, должны служить для характеристики материальной точки также и в последующие моменты t, когда координаты ее перейдут от значений a, b, c к значениям x, y, z. Они представляют собою как бы название точки, с помощью которого она может быть опознана во всякий момент. Все движение материального тела определено во всех подробностях, если для каждой материальной точки a, b, c, из которых состоит тело, координаты x, y, z заданы как функции t, т. е. если

$$\left.\begin{aligned} x &= f\,(a,\ b,\ c,\ t), \\ y &= \varphi\,(a,\ b,\ c,\ t), \\ z &= \psi\,(a,\ b,\ c,\ t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где f, φ, ψ обозначают некоторые однозначные и конечные функции от a, b, c, t. Мы примем также, что они непрерывны, полагая таким образом, что тело не распадается во время движения на отдельные части. Согласно указанным выше положениям, при $t=0$

$$x=a;\ y=b;\ z=c. \qquad (1a)$$

Ввиду обилия возможностей, заключенных в выражениях (1), рекомендуется сначала рассмотреть некоторый вполне определенный момент времени t, или, другими словами, ограничиться сначала рассмотрением того изменения, которое тело претерпевает от момента 0 до момента t, где t имеет некоторое постоянное значение. Тогда мы можем вовсе выпустить t из выражений (1) и получим более простые формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(a,\ b,\ c),\\ y &= \varphi(a,\ b,\ c),\\ z &= \psi(a,\ b,\ c).\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти уравнения обозначают переход тела из определенного „начального положения“ в определенное „конечное положение“, причем материальная точка $(a,\ b,\ c)$ переходит из места $(a,\ b,\ c)$ в место $(x,\ y,\ z)$. Поэтому величины

$$x - a = u,\ y - b = v,\ z - c = w \qquad (3)$$

называются компонентами „смещения“ точки.

Если разрешить уравнения (2) относительно $a,\ b,\ c$, то мы получим $a,\ b,\ c$ как определенные функции от x, y, z. Эти функции дают ответ на вопрос о том, в каком месте находилась до изменения тела та материальная точка, которая после изменения имеет координаты $x,\ y,\ z$. Мы полагаем, что эти функции, которые можно толковать как изменение, обратное рассматриваемому, также однозначны, конечны и непрерывны.

§ 3. В качестве примера рассмотрим сперва общий случай линейного изменения:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c,\\ y &= \mu_0 + \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 c,\\ z &= \nu_0 + \nu_1 a + \nu_2 b + \nu_3 c.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Обозначения постоянных выбраны так, что буквы $\lambda,\ \mu,\ \nu$ соответствуют $x,\ y,\ z$, а значки 1, 2, 3 соответствуют $a,\ b,\ c$. Величины $\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0$ дают смещение той материальной точки, которая до изменения находилась в начале координат.

Уравнения (4), разрешенные относительно $a,\ b,\ c$, дают:

$$\begin{aligned} a &= \lambda_1'(x - \lambda_0) + \mu_1'(y - \mu_0) + \nu_1'(z - \nu_0),\\ b &= \lambda_2'(x - \lambda_0) + \mu_2'(y - \mu_0) + \nu_2'(z - \nu_0),\\ c &= \lambda_3'(x - \lambda_0) + \mu_3'(y - \mu_0) + \nu_3'(z - \nu_0),\end{aligned} \qquad (5)$$

где

$$\lambda_1' = \frac{|\lambda_1|}{D} \text{ и т. д.,} \qquad (6)$$

если обозначить для сокращения так называемый функциональный определитель:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = D, \tag{7}$$

а коэфициент при элементе λ_1 в выражении этого определителя:

$$\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2 = [\lambda_1] \text{ и т. д.} \tag{8}$$

Так как мы полагаем, что все постоянные, со штрихами и без штрихов, конечны, то функциональный определитель D не может равняться нулю. На этом основании мы можем тотчас определить знак D. Действительно: изменение происходит не внезапно, а постепенно в течение конечного времени t. Поэтому необходимо рассматривать постоянные изменения λ, μ, ν и вместе с тем определитель D как непрерывные функции t. Но до изменения, при $t = 0$,

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \text{ и т. д.}, \tag{9}$$

стало быть, $D = 1$. Далее, с течением времени, определитель D изменяется непрерывно, начиная со значения 1 и никогда не обращаясь в нуль. Отсюда следует, что D всегда положительно:

$$D > 0. \tag{10}$$

§ 4. Частный случай линейного изменения представляет собою поступательное перемещение (*1*, § 102), при котором все материальные точки тела претерпевают одинаково направленные и равные смещения любой величины. В этом случае, согласно (3),

$$x - a = \text{const}, \quad y - b = \text{const}, \quad z - c = \text{const},$$

т. е. частный случай уравнений (4).

Другой частный случай линейного изменения есть вращение (*1*, § 101) около какой-либо оси, с произвольным углом вращения. Чтобы доказать это утверждение, составим уравнения для произвольного конечного вращения. Для этого введем, кроме неподвижной в пространстве системы координат, начало которой мы поместим на оси вращения, еще другую систему координат, неизменно связанную с телом и, значит, могущую двигаться в пространстве. Последнюю систему выберем так, чтобы до изменения соответствующие оси обеих систем совпадали между собою. В таком случае после изменения каждые две оси обеих систем образуют друг с другом некоторые углы, косинусы которых мы обозначим α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, причем пусть буквы α, β, γ относятся к осям первой системы, а цифры 1, 2, 3 — к осям второй системы.

Положим, что до изменения тела какая-нибудь материальная точка имеет координаты a, b, c относительно каждой из двух систем. Зато после изменения та же материальная точка имеет уже координаты x, y, z относительно первой системы, а относительно второй системы — прежние координаты a, b, c. Поэтому взаимоотношение между x, y, z и a, b, c такое же, как при преобразовании координат какой-нибудь точки пространства от одной системы координат к другой системе, характеризующейся девятью заданными косинусами направления, или, согласно [1, (329)]:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y &= \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z &= \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

т. е. также частный случай уравнений (4).

Если к вращению (11) присоединить еще поступательное перемещение с компонентами смещения λ_0, μ_0, ν_0, то мы получим наиболее общее изменение, которому может подвергнуться неизменяемое тело. Это изменение выражается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \\ y &= \mu_0 + \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c, \\ z &= \nu_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Но и это изменение также представляет собою частный случай общего линейного изменения (4), так как 12 постоянных, характеризующих его, не независимы друг от друга. Таким образом, если поставить вопрос, при каких условиях линейное изменение (4) какого-нибудь тела не сопровождается деформациями последнего, то ответ будет следующий: коэфициенты изменения λ, μ, ν должны удовлетворять тем соотношениям, которые существуют между соответствующими коэфициентами уравнений (12). На основании [1, (331) и (332)] это всего шесть соотношений, из них три соотношения вида:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1 \text{ и т. д.,} \tag{13}$$

и три соотношения вида:

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0 \text{ и т. д.} \tag{14}$$

В этих соотношениях содержится вместе с тем ряд других соотношений, как например те шесть, которые можно получить из (12) и (14) заменой букв λ, μ, ν цифрами 1, 2, 3 [см. 1, (333) и (334)], далее соотношение [1, (491)]

$$D = 1 \tag{15}$$

и девять соотношений [1, (492)] вида:

$$\lambda_1 = \mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2 = [\lambda_1] = \lambda_1' \text{ и т. д.} \tag{16}$$