И.И. Сомов

Аналитическая геометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
И11

И.И. Сомов
И11 Аналитическая геометрия / И.И. Сомов – М.: Книга по Требованию, 2020. – 381 с.

ISBN 978-5-518-01370-4

ISBN 978-5-518-01370-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Примѣчаніе. Мѣста текста, отмѣченныя знаками —* *—, могутъ быть, при первоначальномъ изученіи предмета, пропущены безъ нарушенія послѣдовательности.

ОТДѢЛЪ I

Приложеніе начальной алгебры къ рѣшенію опредѣленныхъ геометрическихъ вопросовъ

А. Предметъ Аналитической Геометріи. Примѣры на рѣшеніе геометрическихъ вопросовъ помощью Алгебры. Однородность и построеніе формулъ.

1. Аналитическая Геометрія имѣетъ предметомъ рѣшеніе помощью Математическаго Анализа вопросовъ, относящихся къ изслѣдованію свойствъ и къ измѣренію протяженій. Приложеніе Алгебры къ рѣшенію вопросовъ этого рода составляетъ основаніе Аналитической Геометріи.

Протяженія разсматриваются въ Аналитической Геометріи, какъ числа.

Означая какую-либо линію буквою, напр., a, мы должны подразумѣвать подъ этою буквою число, показывающее отношеніе разсматриваемой линіи къ другой, взятой за единицу, данной или произвольной. Число, означающее линію, мы будемъ называть *линейнымъ*, а всякую алгебраическую формулу, обозначающую линію,—*линейною формулою*. Если a и b означаютъ линейныя числа, то $2a - b$ будетъ линейная формула.

Означая буквою поверхность, надо подразумѣвать подъ этою буквою число поверхностныхъ единицъ въ разсматриваемой поверхности. За единицу поверхности обыкновенно берутъ квадратъ, у котораго сторона есть линейная единица. Число квадратныхъ единицъ въ площади прямоугольника есть произведеніе двухъ линейныхъ чиселъ, выражающихъ основаніе и высоту прямоугольника; т.-е., если a есть число линейныхъ единицъ въ основаніи, а b есть число тѣхъ же единицъ въ высотѣ, то число квадратныхъ единицъ въ прямоугольникѣ будетъ ab. Всякую другую поверхность можно также выразить произведеніемъ двухъ линейныхъ чиселъ, потому что всегда можно себѣ представить прямоугольникъ, равномѣрный съ данной поверхностью. Напр., боковая поверхность прямого цилиндра равна произведенію изъ окружности основанія и изъ высоты, т.-е. она равна площади прямоугольника, у котораго основаніе равно окружности основанія цилиндра, а высота—высотѣ цилиндра.

Означая буквою объемъ, мы должны подразумѣвать подъ этою буквою отношеніе разсматриваемаго объема къ другому, взятому за единицу. За единицу объемовъ обыкновенно берутъ кубъ, у котораго ребро есть линейная единица. Число кубическихъ единицъ въ прямоугольномъ параллелепипедѣ выражается произведеніемъ изъ трехъ линейныхъ чиселъ, изображающихъ ребра; т.-е., если буквы a, b и c изображаютъ три смежныя ребра параллелепипеда, то произведеніе abc выражаетъ объемъ. Всякій другой объемъ можно выразить также произведеніемъ трехъ линейныхъ чиселъ, которыя представляютъ ребра прямоугольнаго параллелепипеда, равномѣрнаго съ разсматриваемымъ объемомъ. Напр., объемъ прямого цилиндра выражается произведеніемъ высоты на полуокружность основанія и на радіусъ основанія, т.-е. онъ равномѣренъ съ объемомъ прямоугольнаго параллелепипеда, у котораго три смежныя ребра равны этимъ тремъ длинамъ.

Линейныя числа, отъ перемноженія которыхъ происходитъ число, выражающее поверхность или объемъ, называются измѣреніями поверхности или объема. Собственно въ этомъ смыслѣ можно назвать всякую поверхность величиною двухъ измѣреній, а объемъ—величиною трехъ измѣреній.

Вообще, въ произведеніи нѣсколькихъ линейныхъ чиселъ $abcd\ldots$, линейныя числа a, b, c, d, называются измѣреніями произведенія, если даже множителей будетъ болѣе трехъ.

Отношеніе двухъ линій разсматривается, какъ отвлеченное число, которое не зависитъ отъ линейной мѣры. Такимъ образомъ, если a и b означаютъ линіи, то $\frac{a}{b}$ представляетъ отвлеченное число, которое будетъ то же, въ какихъ бы линейныхъ единицахъ ни были выражены a и b, въ футахъ, дюймахъ и т. п. То же самое должно сказать объ отношеніи двухъ поверхностей или двухъ объемовъ.

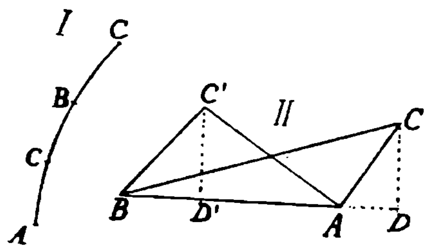
Натуральный *синусъ*, *косинусъ*, *тангенсъ* и пр. какого-либо угла суть отвлеченныя числа, показывающія отношеніе тригонометрическихъ линій къ радіусу дуги, измѣряющей уголъ.

2. Линейныя числа могутъ быть положительныя и отрицательныя; на чертежѣ они представляются противоположными длинами.

Пусть будутъ (I) на одной линіи три длины: AB, BC и BC', выраженныя числами a, b, b', такъ что

$$AC = a + b, \quad AC' = a - b'.$$

Положительному числу $+b$ и отрицательному $-b'$ соотвѣтствуютъ длины: BC и BC', отложенныя въ противныя стороны относительно точки B; поэтому, если въ вычисленіе, относящееся къ какой-либо фигурѣ, входило число b, означающее длину BC, и надобно это вычисленіе приложить къ другой фигурѣ, которая можетъ быть выведена изъ первой, перемѣною длины BC на противоположную BC', выраженную числомъ b', то должно перемѣнить въ вычисленіи b на $-b'$. Напр., пусть даны два треугольника ACB и $AC'B$ (II), у которыхъ CD и $C'D'$ суть высоты, и положимъ, что уголъ CAB тупой, а уголъ $C'AB$ острый. Означивъ чрезъ a, b, c, x соотвѣтственно стороны BC, CA, AB и отрѣзокъ AD, найдемъ по извѣстной формулѣ



Фиг. 1

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

Эта же формула можетъ быть приложена и къ треугольнику $AC'B$, который отъ перваго отличается тѣмъ, что вмѣсто AD въ немъ находится противоположная длина AD'; но, означивъ опять буквами a, b, c, x стороны BC', $C'A$, AB и отрѣзокъ AD', мы должны въ формулѣ перемѣнить x на $-x$, т.-е. положить, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

3. Рѣшеніе помощью Алгебры геометрическаго вопроса, въ которомъ предложено найти одну или нѣсколько величинъ, состоитъ изъ двухъ главныхъ пріемовъ:

a) Изъ составленія по условіямъ вопроса уравненій между неизвѣстными и данными величинами и

b) Изъ рѣшенія этихъ уравненій.

При составленіи уравненій изъ условій вопроса, должно поступать слѣдующимъ образомъ: во-первыхъ, надо ясно представить себѣ геометрическую фигуру, показывающую расположеніе и свойства искомыхъ и данныхъ величинъ; для большей наглядности можно на самомъ дѣлѣ начертить фигуру отъ руки; затѣмъ слѣдуетъ внимательно разсмотрѣть, посредствомъ какихъ извѣстныхъ истинъ можно перейти отъ данныхъ величинъ къ искомымъ, или обратно, разсматривая безъ различія всѣ величины, какъ извѣстныя. Такимъ образомъ мы отыщемъ зависимость между величинами и выразимъ ее уравненіями. Впрочемъ, по разнообразію условій, каждый вопросъ требуетъ особенныхъ соображеній, которыя нельзя подвести подъ общія правила. Иногда приходится разсматривать вспомогательныя величины, находящіяся въ зависимости отъ данныхъ и искомыхъ и облегчающія составленіе уравненій.

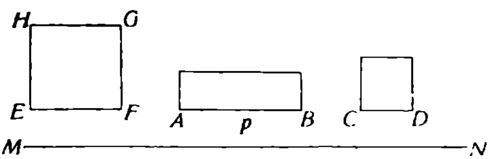
Для рѣшенія составленныхъ такимъ образомъ уравненій, должно выбирать наивыгоднѣйшіе способы и брать за неизвѣстныя такія величины, которыя ведутъ кратчайшимъ путемъ къ рѣшенію вопроса.

Когда вопросъ опредѣленный, число уравненій не должно быть менѣе числа неизвѣстныхъ.

По формуламъ, выведеннымъ изъ уравненій, можно найти неизвѣстныя величины или *вычисленіемъ* (какъ это дѣлается въ Тригонометріи) или *построеніемъ*, начертивъ на самомъ дѣлѣ, помощью циркуля и линейки, фигуру, заключающую искомыя величины.

4. Для поясненія изложеннаго, рѣшимъ нѣсколько вопросовъ.

I. *Построить на данныхъ основаніяхъ AB и CD два прямоугольника такъ, чтобы сумма ихъ площадей была равна площади даннаго квадрата $EFGH$, а сумма периметровъ данной длинѣ MN.*



Фиг. 2

Положимъ $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, и означимъ черезъ x и y неизвѣстныя высоты прямоугольниковъ. Для площадей искомыхъ прямоугольниковъ получимъ числа: ax и by, сумма которыхъ, по условію вопроса, должна быть равна числу c^2, выражающему площадь даннаго квадрата; слѣдовательно,

$$ax + by = c^2$$

Числа: $2x + 2a$, $2y + 2b$ выражаютъ периметры прямоугольниковъ и въ суммѣ должны составить длину p, поэтому

$$2x + 2a + 2y + 2b = p;$$

откуда выводимъ

$$x + y = \frac{p}{2} - a - b$$

или

$$x + y = m,$$

означивъ для сокращенія черезъ m длину $\frac{p}{2} - a - b$, которую легко найти.

Итакъ, для опредѣленія неизвѣстныхъ x и y имѣемъ два уравненія:

$$ax + by = c^2, \quad x + y = m,$$

изъ которыхъ выходитъ

$$x = \frac{c^2 - bm}{a - b}, \quad y = \frac{am - c^2}{a - b}$$

По этимъ формуламъ легко вычислить искомыя числа, подставивъ вмѣсто буквъ, означающихъ данныя длины, соотвѣтственныя извѣстныя числа. Если для примѣра положимъ $a = 2$ дюймамъ, $b = 1$, $c = 3$, $p = 16$, то найдемъ:

$$m = \frac{p}{2} - a - b = 5,$$

$$x = 4, \quad y = 1.$$

По свойству вопроса x и y должны быть положительныя; поэтому, если $a > b$ (что можно допустить, означивъ буквою a большее изъ данныхъ основаній), то данныя числа должны удовлетворять условіямъ:

$$c^2 > bm \text{ и } am > c^2;$$

въ противномъ случаѣ задача невозможна.

Задача также невозможна, когда $a = b$, а c^2 неравно bm или am, потому что тогда величины x и y безконечны.

Задача будетъ неопредѣленная, когда $a = b$ и $c^2 = am = bm$.

Если, рѣшая уравненія, мы получимъ отрицательное число, то, перемѣнивъ въ уравненіяхъ знакъ у той неизвѣстной, для которой вышло это рѣшеніе, мы будемъ имѣть новыя уравненія, изъ которыхъ выведемъ положительное рѣшеніе вмѣсто прежняго отрицательнаго. Эти новыя уравненія будутъ выражать условія новаго вопроса (см. нач. Алгебру).

Положимъ напр., что въ послѣднемъ примѣрѣ при $a > b$ будетъ $c^2 < bm$; тогда x отрицательное, а y положительное. Перемѣнивъ x на $-x$, мы получимъ вмѣсто уравненій

$$ax + by = c^2 \text{ и } x + y = m$$

слѣдующія:

$$by - ax = c^2, \quad y - x = m, \qquad (a)$$

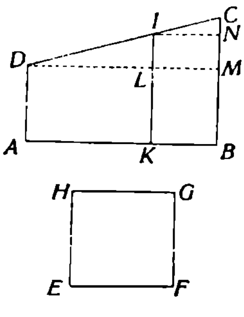
изъ которыхъ выведемъ положительныя величины:

$$x = \frac{bm - c^2}{a - b} \qquad y = \frac{am - c^2}{a - b}$$

Уравненія (a) выражаютъ условія слѣдующаго вопроса:

Построить на данныхъ основаніяхъ a и b два прямоугольника такъ, чтобы разность ихъ площадей была равна данному квадрату c^2, а разность высотъ данной линіи m.

II. *Отъ трапеціи $ABCD$, въ которой стороны AD и BC перпендикулярны къ AB, отрѣзать часть, равную площади прямоугольника $EFGH$, посредствомъ прямой, перпендикулярной къ AB.*



Фиг. 3

Пусть будетъ IK прямая, перпендикулярная къ AB, проведенная такъ, что $ADIK = EFGH$. Здѣсь данныя величины суть стороны трапеціи $ABCD$ и прямоугольника $EFGH$.

Положимъ: $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $FG = m$, $EF = n$, а за неизвѣстныя возьмемъ $IK = x$ и $AK = y$.

Для площади трапеціи $ADIK$ найдемъ число $\frac{(a + x)y}{2}$, которое, по условію вопроса, должно быть равно mn, площади прямоугольника $EFGH$; слѣдовательно,

$$\frac{(a + x)y}{2} = mn \quad \text{или} \quad (a + x)y = 2mn. \qquad (1)$$

Легко видѣть, что вопросъ долженъ быть опредѣленный. Въ самомъ дѣлѣ, съ удаленіемъ прямой IK отъ AD, площадь $ADKI$ непремѣнно увеличивается, а, съ приближеніемъ къ AD, уменьшается и обращается въ нуль, когда IK совпадаетъ съ AD; потому,