

И.И. Сомов

Аналитическая геометрия

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 93
ББК 63.3
И11

И11 **И.И. Сомов**
Аналитическая геометрия / И.И. Сомов – М.: Книга по Требованию, 2020. –
381 с.

ISBN 978-5-518-01370-4

ISBN 978-5-518-01370-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2020

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2020

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

	СТРАН.
46. 47. Упрощеніе уравненія линіи второго порядка, не имѣющей центра, уничтоженіемъ членовъ, содержащихъ ординату въ первой степени, и постояннаго члена. Доказательство, что всѣ линіи 2-го порядка, не имѣющія центра, суть одного рода,— <i>параболы</i> . Построеніе по точкамъ и очертаніе параболы	134
48. 49. 50. 51. 52. Общій видъ уравненія линіи второго порядка при началѣ координатъ въ вершинѣ и при оси абсциссъ, взятой по направленію главной оси кривой. Параметры. Фокусы. Радиусы-векторы и директрисы. Свойства радиусовъ-векторовъ въ каждой линіи 2-го порядка. Способы черченія, основанные на этихъ свойствахъ	140
53. 54. 55. Диаметры, сопряженные хорды, сопряженные диаметры. Эллипсъ и гипербола имѣютъ безчисленное множество сопряженныхъ диаметровъ. Построеніе диаметровъ, составляющихъ данный уголъ	157
56. 57. Уравненіе эллипса и гиперболы, отнесенныхъ къ сопряженнымъ, косоугольнымъ диаметрамъ. Свойства сопряженныхъ диаметровъ этихъ кривыхъ. Построеніе осей эллипса по данной системѣ косоугольныхъ сопряженныхъ диаметровъ	164
58. 59. Диаметры параболы	169
Б. О касательныхъ вообще. Касательныя къ линіямъ 2-го порядка.	
60. 61. 62. Уравненіе касательной и нормали къ линіи второго порядка. Выраженіе подкасательной, поднормали, длины касательной и длины нормали	171
63. Дифференціальный параметръ. Разстояніе отъ касательной точки, смежной съ точкою касанія. Сторона выпуклости или вогнутости кривой	180
64. 65. 66. Свойство угловъ, составленныхъ касательными къ линіямъ второго порядка съ радиусами-векторами, проведенными въ точку касанія. Построеніе касательной къ каждой кривой особенно: а) по данной точкѣ на кривой, б) по данной точкѣ внѣ кривой и с) параллельно данной прямой	184
67. 68. 69. Уравненіе касательной, проведенной чрезъ вышнюю точку. Поляра. Свойства поляры и полюса. Способы проведенія касательной, основанные на этихъ свойствахъ	192
70. Различныя положенія касательной для каждой изъ линій 2-го порядка. Случай, когда точка прикосновенія безконечно удалена отъ начала координатъ. Асимптоты гиперболы, какъ предѣлы касательныхъ	198
71. 72. Уравненіе гиперболы, отнесенное къ асимптотамъ. Свойства отръсковъ пересѣкающей, заключающихся между гиперболою и ея асимптотами. Приложение этого свойства къ проведенію касательной къ гиперболѣ и къ построению самой кривой по точкамъ	201
73. Свойство параллелограмма, построеннаго на сопряженныхъ диаметрахъ гиперболы. Построеніе осей гиперболы по даннымъ асимптотамъ и одной точкѣ гиперболы. Построеніе асимптотъ и осей гиперболы по даннымъ сопряженнымъ диаметрамъ	204
Г. Уравненія линій 2-го порядка въ кратчайшихъ и трilinearныхъ координатахъ.	
74. 75. Общее уравненіе линіи 2-го порядка въ кратчайшихъ координатахъ. Уравненіе линіи 2-го порядка въ однородныхъ обыкновенныхъ координатахъ. Уравненіе въ трilinear-	

88	СТРАН.
ныхъ координатахъ. Уравненіе касательной въ однородныхъ, обыкновенныхъ и трилинейныхъ координатахъ	205
76. 77. Теорема Лава. Простѣйшее уравненіе линіи 2-го порядка въ трилинейныхъ координатахъ. Свойство гомографическихъ пучковъ. Теоремы Паскаля и Маклорена	210
78. Теорема Брианшона	214
79. 80. Приложеніе простѣйшаго уравненія линіи 2-го порядка въ трилинейныхъ координатахъ къ доказательству нѣкоторыхъ свойствъ этихъ линій	215

G. Обвертывающія линіи. Тангенціальныя координаты.

81. Выводъ уравненія обертки по данному уравненію обертываемой линіи и по условію, которому должны удовлетворять параметры. Тангенціальныя координаты. Уравненіе точки въ тангенціальныхъ координатахъ. Раздѣленіе линій на классы. Доказательство, что линіи 2-го класса суть линіи 2-го порядка	220
82. 83. Обертка полярны. Ваимныя линіи. Начало двойственности и приложеніе его къ доказательству двойственныхъ свойствъ линій 2-го порядка. Приложеніе этихъ свойствъ къ рѣшенію задачъ, относящихся къ построенію линій 2-го порядка по даннымъ точкамъ или даннымъ касательнымъ	225

H. Полярныя координаты.

84. 85. 86. Полярныя координаты. Преобразование прямоугольныхъ координатъ въ полярныя, и обратно. Уравненіе линій 2-го порядка въ полярныхъ координатахъ	230
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

I. Коническія сѣченія.

87. 88. 89. Доказательство, что кривыя, происходящія отъ сѣченія прямого конуса плоскостью, суть линіи 2-го порядка и что проекція круга на данной плоскости есть эллипсъ. Обратныя предложенія	234
Доказательство, что конусъ, имѣющій основаніемъ какую-нибудь линію 2-го порядка, пересѣкается плоскостью по линіи 2-го порядка	242

ОТДѢЛЪ III.

Геометрическія мѣста въ пространствѣ трехъ измѣненій

A. Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ. Уравненіе поверхности и линіи. Расстояніе между двумя точками. Плоскость и прямая линія.

90. 91. Прямолинейныя координаты точки. Проекціи на прямоугольныхъ осяхъ координатъ расстоянія точки отъ начала и вообще расстоянія между двумя точками. Выраженіе для расстоянія между двумя точками. Выраженіе произведенія двухъ линій на косинусъ угла, между ними заключающагося. Выраженіе для косинуса угла двухъ прямыхъ	243
92. 93. Уравненіе поверхности въ прямолинейныхъ координатахъ. Уравненіе линіи. Примѣры: уравненіе шара, уравненія плоскостей координатъ и плоскостей, имъ параллельныхъ	251
94. 95. Уравненіе плоскости. Углы, составляемые съ осями координатъ перпендикуляромъ къ плоскости. Расстояніе плоскости отъ начала координатъ. Доказательство, что уравненіе	

§§	СТРАН.
первой степени относительно прямолинейных координат принадлежат плоскости. Частные случаи. Построение плоскости по данному уравнению. Определение уравнения плоскости помощью координат точек пересечений ее с осями.	255
96. Уравнение прямой. Следы ее на плоскостях координат и углы, составляемые ею с осями	259
97. Задачи: I. Найти координаты точки пересечения двух данных прямых. Условие, что две данные прямые лежат в одной плоскости. II. Вычислить угол, составляемый двумя прямыми. Условие перпендикулярности прямых. III. Вывести уравнения прямой, проведенной через две данные точки. IV. Найти уравнения прямой; проходящей через данную точку и параллельной данной прямой. V. Найти уравнения прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой. VI. Найти пересечение прямой с плоскостью. Условия параллельности и совместности прямой с плоскостью. VII. Найти пересечение двух плоскостей. VIII. Вычислить угол, составляемый двумя плоскостями. Условие перпендикулярности. IX. Вычислить угол, составляемый прямой с плоскостью. X. Провести плоскость через три данные точки. XI. Провести плоскость через две данные прямые. XII. Провести плоскость через точку и прямую. XIII. Провести плоскость через данную точку параллельно данной плоскости. XIV. Провести плоскость через данную точку перпендикулярно к данной прямой. XV. Провести через данную точку прямую, перпендикулярную к данной плоскости, и определить расстояние точки от плоскости. XVI. Найти кратчайшее расстояние точки от прямой. XVII. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми	262
98. Пространства, выражаемые линейными неравенствами. Кратчайшие координаты в пространстве. Тетраэдрические координаты	282
В. Перемена прямолинейных координат в прямолинейныя. Полярныя координаты.	
99. Перемена начала координат	287
100. Перемена направления осей при том же началѣ	287
101. Выражения косинусовъ угловъ, составляемыхъ прямоугольною системою осей с другою прямоугольною, помощью трехъ угловъ, определяющихъ положеніе одной системы относительно другой	290
102. Перемена начала и направлений осей координатъ	292
103. Полярныя координаты	292
С. О кривыхъ поверхностяхъ. Поверхности второго порядка.	
104. 105. 106. Раздѣленіе поверхностей на алгебраическія и трансцендентныя. Независимость этого раздѣленія отъ системы осей координатъ. Число членовъ въ полномъ уравненіи алгебраической поверхности. Число точекъ, определяющихъ алгебраическую поверхность. Порядокъ линіи пересѣченія алгебраической поверхности съ плоскостью. Число точекъ пересѣченія алгебраической поверхности съ прямою	294
107. Общій видъ уравненія поверхности 2-го порядка. Число точекъ, ее определяющихъ. Пересѣченіе ее съ плоскостью. Число точекъ пересѣченія ее съ прямою. Диаметральная пло-	

скость и сопряженные съ нею хорды. Выводъ уравненія диаметральной плоскости. Главная диаметральная плоскость и главные хорды. Отысканіе главныхъ хордъ. Упрощеніе вида уравненія поверхности 2-го порядка, когда одна изъ прямоугольныхъ осей координатъ взята по направленію главной хорды, а двѣ прочія оси по направленіямъ осей пересѣченія поверхности съ плоскостью, перпендикулярною къ главной хордѣ	297
108. Центръ поверхности. Упрощеніе уравненія поверхности второго порядка чрезъ перенесеніе начала координатъ въ центръ. Раздѣленіе поверхностей 2-го порядка на поверхности съ центромъ и безъ центра	300
109. Разборъ различныхъ видовъ поверхностей 2-го порядка, имѣющихъ центръ	302
110. Разборъ поверхностей 2-го порядка, не имѣющихъ центра	315
111. 112. 113. Линейчатая поверхность 2-го порядка	319
D. Касательныя плоскости и нормали къ поверхностямъ.	
114. 115. 116. Условіе касанія прямой къ поверхности. Касательная плоскость. Нормаль и дифференціальный параметръ. Разстояніе точки отъ касательной плоскости. Условія выпуклости и вогнутости поверхности. Пересѣченіе поверхности съ касательною плоскостью. Двойныя касательныя. Касательныя плоскости къ поверхностямъ 2-го порядка. Поляра	329
117. Тангенціальныя координаты. Обертка поляры. Взаимныя поверхности 2-го порядка	342
E. Сопряженные диаметры поверхностей 2-го порядка.	
118. Уравненіе поверхности 2-го порядка, имѣющей центръ, отнесенной къ системѣ косоугольныхъ диаметровъ	344
119. Диаметральныя плоскости и диаметры параболоидовъ	347
Прибавленіе I. Опредѣлители и приложеніе ихъ къ рѣшенію совокупныхъ уравненій первой степени	349
Прибавленіе II (къ § 41.)	363
Прибавленіе III (къ §§ 107 и 108)	366

Примѣчаніе. Мѣста текста, отмѣченныя знаками —* *—, могутъ быть, при первоначальномъ изученіи предмета, пропущены безъ нарушенія послѣдовательности.

ОТДѢЛЪ I

Приложеніе начальной алгебры къ рѣшенію опредѣленныхъ геометрическихъ вопросовъ

А. Предметъ Аналитической Геометріи. Примѣры на рѣшеніе геометрическихъ вопросовъ помощью Алгебры. Однородность и построеніе формулъ.

1. Аналитическая Геометрія имѣетъ предметомъ рѣшеніе помощью Математическаго Анализа вопросовъ, относящихся къ изслѣдованію свойствъ и къ измѣренію протяженій. Приложеніе Алгебры къ рѣшенію вопросовъ этого рода составляетъ основаніе Аналитической Геометріи.

Протяженія разсматриваются въ Аналитической Геометріи, какъ числа.

Означая какую-либо линію буквою, напр., a , мы должны подразумѣвать подъ этою буквою число, показывающее отношеніе разсматриваемой линіи къ другой, взятой за единицу, данной или произвольной. Число, означающее линію, мы будемъ называть *линейнымъ*, а всякую алгебраическую формулу, обозначающую линію, — *линейною формулою*. Если a и b означаютъ линейныя числа, то $2a - b$ будетъ линейная формула.

Означая буквою поверхность, надо подразумѣвать подъ этою буквою число поверхностныхъ единицъ въ разсматриваемой поверхности. За единицу поверхности обыкновенно берутъ квадратъ, у котораго сторона есть линейная единица. Число квадратныхъ единицъ въ площади прямоугольника есть произведеніе двухъ линейныхъ чиселъ, выражающихъ основаніе и высоту прямоугольника; т.-е., если a есть число линейныхъ единицъ въ основаніи, а b есть число тѣхъ же единицъ въ высотѣ, то число квадратныхъ единицъ въ прямоугольникѣ будетъ ab . Всякую другую поверхность можно также выразить произведеніемъ двухъ линейныхъ чиселъ, потому что всегда можно себѣ представить прямоугольникъ, равномѣрный

сь данной поверхностью. Напр., боковая поверхность прямого цилиндра равна произведенію изъ окружности основанія и изъ высоты, т.-е. она равна площади прямоугольника, у котораго основаніе равно окружности основанія цилиндра, а высота—высотѣ цилиндра.

Означая буквою объемъ, мы должны подразумѣвать подъ этою буквою отношеніе разсматриваемаго объема къ другому, взятому за единицу. За единицу объемовъ обыкновенно берутъ кубъ, у котораго ребро есть линейная единица. Число кубическихъ единицъ въ прямоугольномъ параллелепипедѣ выражается произведеніемъ изъ трехъ линейныхъ чиселъ, изображающихъ ребра; т.-е., если буквы a , b и c изображаютъ три смежныя ребра параллелепипеда, то произведеніе abc выражаетъ объемъ. Всякій другой объемъ можно выразить также произведеніемъ трехъ линейныхъ чиселъ, которыя представляютъ ребра прямоугольнаго параллелепипеда, равномѣрнаго съ разсматриваемымъ объемомъ. Напр., объемъ прямого цилиндра выражается произведеніемъ высоты на полуокружность основанія и на радіусъ основанія, т.-е. онъ равномѣренъ съ объемомъ прямоугольнаго параллелепипеда, у котораго три смежныя ребра равны этимъ тремъ длинамъ.

Линейныя числа, отъ перемноженія которыхъ происходитъ число, выражающее поверхность или объемъ, называются измѣреніями поверхности или объема. Собственно въ этомъ смыслѣ можно назвать всякую поверхность величиною двухъ измѣреній, а объемъ—величиною трехъ измѣреній.

Вообще, въ произведеніи нѣсколькихъ линейныхъ чиселъ $abcd \dots$, линейныя числа a, b, c, d , называются измѣреніями произведенія, если даже множителей будетъ болѣе трехъ.

Отношеніе двухъ линій разсматривается, какъ отвлеченное число, которое не зависитъ отъ линейной мѣры. Такимъ образомъ, если a и b означаютъ линіи, то $\frac{a}{b}$ представляетъ отвлеченное число, которое будетъ то же, въ какихъ бы линейныхъ единицахъ ни были выражены a и b , въ футахъ, дюймахъ и т. п. То же самое должно сказать объ отношеніи двухъ поверхностей или двухъ объемовъ.

Натуральный *синусъ*, *косинусъ*, *тангенсъ* и пр. какого-либо угла суть отвлеченныя числа, показывающія отношеніе тригонометрическихъ линій къ радіусу дуги, измѣряющей уголъ.

2. Линейныя числа могутъ быть положительныя и отрицательныя; на чертежѣ они представляются противоположными длинами.

Пусть будут (I) на одной линии три длины: AB , BC и BC' , выраженные числами a , b , b' , такъ что

$$AC = a + b, \quad AC' = a - b'.$$

Положительному числу $+b$ и отрицательному $-b'$ соответствуют длины: BC и BC' , отложенныя въ противныя стороны относительно точки B ; поэтому, если въ вычисленіе, относящееся къ какой-либо фигурѣ, входило число b , означающее длину BC , и надобно это вычисленіе приложить къ другой фигурѣ, которая можетъ быть выведена изъ

первой, перемѣною длины BC на противоположную BC' , выраженную числомъ b' , то должно перемѣнить въ вычисленіи b на $-b'$. Напр., пусть даны два треугольника ACB и $AC'B$ (II), у которыхъ CD и $C'D'$ суть высоты, и положимъ, что уголь CAB тупой, а уголь $C'AB$ острый. Означивъ чрезъ a , b , c , x соответственно стороны BC , CA , AB и отрѣзокъ AD , найдемъ по известной формулѣ

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

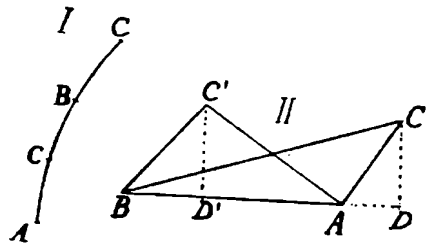
Эта же формула можетъ быть приложена и къ треугольнику $AC'B$, который отъ перваго отличается тѣмъ, что вмѣсто AD въ немъ находится противоположная длина AD' ; но, означивъ опять буквами a , b , c , x стороны BC' , $C'A$, AB и отрѣзокъ AD' , мы должны въ формулѣ перемѣнить x на $-x$, т.-е. положить, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

3. Рѣшеніе помощью Алгебры геометрическаго вопроса, въ которомъ предложено найти одну или нѣсколько величинъ, состоитъ изъ двухъ главныхъ приемовъ:

- а) Изъ составленія по условіямъ вопроса уравненій между неизвѣстными и данными величинами и
- б) Изъ рѣшенія этихъ уравненій.

При составленіи уравненій изъ условій вопроса, должно поступать слѣдующимъ образомъ: во-первыхъ, надо ясно представить себѣ геометрическую фигуру, показывающую расположеніе и свойства искомымъ и даннымъ величинъ; для большей наглядности



Фиг. 1

можно на самомъ дѣлѣ начертить фигуру отъ руки; затѣмъ слѣдуетъ внимательно разсмотрѣть, посредствомъ какихъ извѣстныхъ истинъ можно перейти отъ данныхъ величинъ къ искомымъ, или обратно, рассматривая безъ различія всѣ величины, какъ извѣстныя. Такимъ образомъ мы отыщемъ зависимость между величинами: и выразимъ ее уравненіями. Впрочемъ, по разнообразію условий, каждый вопросъ требуетъ особенныхъ соображеній, которыя нельзя подвести подъ общія правила. Иногда приходится рассматривать вспомогательныя величины, находящіяся въ зависимости отъ данныхъ и искомымъ и облегчающія составленіе уравненій.

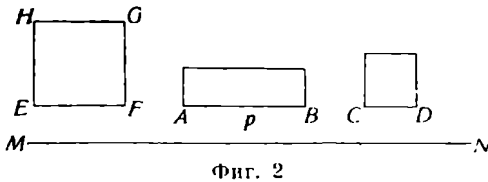
Для рѣшенія составленныхъ такимъ образомъ уравненій, должно выбирать наивыгоднѣйшіе способы и брать за неизвѣстныя такія величины, которыя ведутъ кратчайшимъ путемъ къ рѣшенію вопроса.

Когда вопросъ опредѣленный, число уравненій не должно быть менѣ числа неизвѣстныхъ.

По формуламъ, выведеннымъ изъ уравненій, можно найти неизвѣстныя величины или *вычисленіемъ* (какъ это дѣлается въ Тригонометріи) или *построеніемъ*, начертивъ на самомъ дѣлѣ, помощью циркуля и линейки, фигуру, заключающую искомыя величины.

4. Для поясненія изложеннаго, рѣшимъ нѣсколько вопросовъ.

1. *Построить на данныхъ основаніяхъ AB и CD два прямоугольника такъ, чтобы сумма ихъ площадей была равна площади даннаго квадрата $EFGH$, а сумма периметровъ данной длины MN .*



Положимъ $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, и означимъ черезъ x и y неизвѣстныя высоты прямоугольниковъ. Для площа-

дей искомымъ прямоугольниковъ получимъ числа: ax и by , сумма которыхъ, по условію вопроса, должна быть равна числу c^2 , выражающему площадь даннаго квадрата; слѣдовательно,

$$ax + by = c^2$$

Числа: $2x + 2a$, $2y + 2b$ выражаютъ периметры прямоугольниковъ и въ суммѣ должны составить длину p , поэтому

$$2x + 2a + 2y + 2b = p;$$

откуда выводимъ

$$x + y = \frac{p}{2} - a - b$$

или

$$x + y = m,$$

означивъ для сокращенія черезъ m длину $\frac{p}{2} - a - b$, которую легко найти.

Итакъ, для опредѣленія неизвѣстныхъ x и y имѣемъ два уравненія:

$$ax + by = c^2, \quad x + y = m,$$

изъ которыхъ выходитъ

$$x = \frac{c^2 - bm}{a - b}, \quad y = \frac{am - c^2}{a - b}$$

По этимъ формуламъ легко вычислить искомыя числа, подставивъ вмѣсто буквъ, означающихъ данныя длины, соответственныя извѣстныя числа. Если для примѣра положимъ $a = 2$ дюймамъ, $b = 1$, $c = 3$, $p = 16$, то найдемъ:

$$m = \frac{p}{2} - a - b = 5,$$

$$x = 4, \quad y = 1.$$

По свойству вопроса x и y должны быть положительныя; поэтому, если $a > b$ (что можно допустить, означивъ буквою a большее изъ данныхъ оснований), то данныя числа должны удовлетворять условіямъ:

$$c^2 > bm \text{ и } am > c^2;$$

въ противномъ случаѣ задача невозможна.

Задача также невозможна, когда $a = b$, а c^2 неравно bm или am , потому что тогда величины x и y безконечны.

Задача будетъ неопредѣленная, когда $a = b$ и $c^2 = am = bm$.

Если, рѣшая уравненія, мы получимъ отрицательное число, то, перемѣнивъ въ уравненіяхъ знакъ у той неизвѣстной, для которой вышло это рѣшеніе, мы будемъ имѣть новыя уравненія, изъ которыхъ выведемъ положительное рѣшеніе вмѣсто прежняго отрицательнаго. Эти новыя уравненія будутъ выражать условія новаго вопроса (см. нач. Алгебру).

Положимъ напр., что въ послѣднемъ примѣрѣ при $a > b$ будетъ $c^2 < bt$; тогда x отрицательное, а y положительное. Переимѣнивъ x на $-x$, мы получимъ вмѣсто уравненій

$$ax + by = c^2 \text{ и } x + y = m$$

слѣдующія:

$$by - ax = c^2, \quad y - x = m, \quad (a)$$

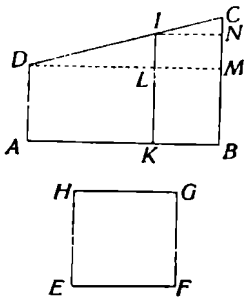
изъ которыхъ выведемъ положительныя величины:

$$x = \frac{bt - c^2}{a - b} \quad y = \frac{at - c^2}{a - b}$$

Уравненія (а) выражаютъ условія слѣдующаго вопроса:

Построить на данныхъ основаніяхъ a и b два прямоугольника такъ, чтобы разность ихъ площадей была равна данному квадрату c^2 , а разность высотъ данной линіи m .

II. Отъ трапеціи $ABCD$, съ которой стороны AD и BC перпендикулярны къ AB , отрубить часть, равную площади прямоугольника $EFGH$, посредствомъ прямой, перпендикулярной къ AB .



Фиг. 3

Пусть будетъ IK прямая, перпендикулярная къ AB , проведенная такъ, что $ADIK = EFGH$. Здѣсь данныя величины суть стороны трапеціи $ABCD$ и прямоугольника $EFGH$.

Положимъ: $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $FG = m$, $EF = n$, а за неизвѣстныя возьмемъ $IK = x$ и $AK = y$.

Для площади трапеціи $ADIK$ найдемъ число $\frac{(a+x)y}{2}$, которое, по условію вопроса,

должно быть равно mn , площади прямоугольника $EFGH$; слѣдовательно,

$$\frac{(a+x)y}{2} = mn \quad \text{или} \quad (a+x)y = 2mn. \quad (1)$$

Легко видѣть, что вопросъ долженъ быть опредѣленный. Въ самомъ дѣлѣ, съ удаленіемъ прямой IK отъ AD , площадь $ADIK$ непремѣнно увеличивается, а, съ приближеніемъ къ AD , уменьшается и обращается въ нуль, когда IK совпадаетъ съ AD ; потому,