

Р. Неванлинна

Однозначные аналитические функции

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
Р11

Р. Невалинна
Р11 Однозначные аналитические функции / Р. Невалинна – М.: Книга по Требованию, 2021. – 388 с.

ISBN 978-5-458-29003-6

Переводом книги Р. Невалинна "Однозначные аналитические функции" заполняется пробел, существовавший до последнего времени в нашей литературе по этому вопросу. Введённые автором понятия гармонической меры и принцип гармонической меры позволили ему с большой простотой и общностью изложить учение об однозначных аналитических функциях. В книге даётся развёрнутое изложение современной теории мероморфных функций и связанного с ней учения о распределении значений и структуре римановых поверхностей. В тесной связи с этим кругом вопросов рассматривается проблема типа и альфорсова теория поверхностей наложения. Отдельная глава посвящена гармоническим нуль-множествам. Книга Р. Невалинна даёт чрезвычайно богатый материал для курсовых и диссертационных работ. Для чтения книги требуется знакомство с университетским курсом теории функций комплексного переменного. Книга снабжена подробным литературным указателем. Ссылка на него в тексте приведены в квадратных скобках. Примечания переводчика и редакторов обозначены звёздочками, примечания автора обозначены цифрами.

ISBN 978-5-458-29003-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Введение	7
I. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей	10
§ 1. Конформное отображение посредством линейных преобразований (10) — § 2. Основы теорема конформных отображений. Отображение универсальной поверхности наложения многосвязной области (14) — § 3. Случай плоскости с p выключенными точками (20) — § 4. Общий случай p -связной области (26).	
II. Решение проблемы Дирихле для однолистной области	27
§ 1. Интеграл Пуассона (27) — § 2. Решение общей краевой задачи (29) — § 3. Интегральное представление решения краевой задачи посредством гармонической меры (31) — § 4. Функция Грина и гармоническая мера (33) — § 5. О линиях уровня гармонической меры (39).	
III. Принцип гармонической меры и его применения	43
§ 1. Установление принципа и его обоснование (43) — § 2. Применение к абсолютному значению аналитической функции (47) — § 3. Принцип гиперболической меры (51) — § 4. Теоремы о круговых областях (58) — § 5. Теоремы Ландау и Шоттки (62) — § 6. Применения к исследованию граничных и предельных значений ограниченных функций (65).	
IV. Соотношения между неевклидовыми и евклидовыми мероопределениями	69
§ 1. Общие замечания (69) — § 2. Принцип Карлемана расширения области (70) — § 3. Оценка гиперболической меры посредством расширения области (87) — § 4. Теоремы Альфорса об искажении (96) — § 5. Проблема Карлемана-Мню (104).	
V. Множества гармонической меры нуль	115
§ 1. Определение множеств гармонической меры нуль (115) — § 2. Множества емкости нуль (123) — § 3. Функция Грина и логарифмический потенциал (131) — § 4. Поведение аналитической функции в окрестности множества гармонической меры нуль (140) — § 5. Леммы об аддитивных функциях множеств (146) — § 6. Метрические свойства множеств гармонической меры нуль (152).	
VI. Первая основная теорема теории мероморфных функций	164
§ 1. Формула Пуассона-Иенсена (164) — § 2. Характеристическая функция (167) — § 3. Геометрическая интерпретация характеристической функции (174) — § 4. Обобщения (180).	
VII. Функции ограниченного вида	185
§ 1. Представление функции с ограниченной характеристикой в виде отношения ограниченных функций (185) — § 2. Представление функций ограниченного вида интегралом Пуассона-Стилтьеса (191) — § 3. Теорема Фату (202) — § 4. О множестве граничных значений функции ограниченного вида (210) — § 5. Применение к конформному отображению универсальной поверхности наложения однолистной области (214).	

	Стр.
VIII. Мероморфные функции конечного порядка	219
§ 1. Порядок мероморфной функции (219) — § 2. Каноническое представление мероморфной функции конечного порядка (224) — § 3. Некоторые свойства канонических произведений (228) — § 4. Жанр мероморфной функции (236).	
IX. Вторая основная теорема в теории мероморфных функций	240
§ 1. Вводные замечания (240) — § 2. Фундаментальное соотношение (247) — § 3. Лемма о логарифмической производной мероморфной функции. Вторая основная теорема (252) — § 4. Прямое доказательство второй основной теоремы с помощью фундаментального соотношения (257).	
X. Применения второй основной теоремы	265
§ 1. Теорема Пикара-Бореля (265) — § 2. Соотношения дефектов (269) — § 3. Теоремы о разветвленных значениях (281).	
XI. Односвязные римановы поверхности	286
§ 1. Об особенностях функций однолистных односвязных на поверхностях (286) — § 2. Римановы поверхности, точки ветвления которых расположены вад конечным числом точек (295) — § 3. Римановы поверхности с конечным числом точек ветвления (304) — § 4. О связи между порядком мероморфной функции и критическими точками обратной функции (310).	
XII. Тип римановой поверхности	314
§ 1. Разветвленность римановой поверхности (314) — § 2. Соотношения дефектов и разветвленность (319) — § 3. Достаточные условия для параболического типа (323).	
XIII. Альфорсова теория поверхностей наложения	330
§ 1. Основные топологические понятия (330) — § 2. Введение метрики (334) — § 3. Метрические свойства поверхностей наложения (337) — § 4. Основная теорема о конечных поверхностях наложения (341) — § 5. Обращение основной теоремы (348) — § 6. Теоремы о регулярно исчерпываемых открытых поверхностях наложения (350) — § 7. Применения к конформным отображениям односвязных римановых поверхностей (358) — § 8. Обобщения на отображения с ограниченным эксцентриситетом (363).	
Приложение	365
Литературный указатель	380
Предметный указатель	386

ВВЕДЕНИЕ.

Однозначные аналитические функции можно изучать с различных точек зрения. Вопросы, подлежащие рассмотрению в настоящей работе, группируются вокруг одной большой основной проблемы. Этой центральной постановке вопроса здесь следует предпослать несколько общих замечаний.

Представим себе неограниченно продолженным заданный элемент аналитической функции. Если предположить, что полученная таким образом аналитическая функция $w = w(z)$ однозначна, то существует область G_z со следующими свойствами.

1. Всякой внутренней точке z области G_z соответствует один и только один элемент *рационального характера* функции $w(z)^*$.

2. Всякая граничная точка z^* области G_z является существенно особой для функции $w(z)$.

Если G_z совпадает с полной плоскостью (эллиптический случай), то $w(z)$ есть рациональная функция. Исключая этот простейший случай, мы должны различать два случая в зависимости от того, будет ли G_z односвязна или многосвязна. Мы ограничиваемся первым из них; при этом мы должны учитывать дальнейшие две возможности: граница Γ_z области G_z есть или одна точка (параболический случай) или континуум (гиперболический случай).

Функция $w = w(z)$ отображает область G_z на некоторую риманову поверхность G_w , расположенную над плоскостью w . Функция $z = z(w)$, обратная к функции $w(z)$, однозначна и в силу однозначности $w(z)$ *однолистка* на поверхности G_w , т. е. центрам двух различных элементов функции $z(w)$ отвечают всегда две различные точки z .

Обратно, в силу основной теоремы теории конформных отображений произвольная односвязная риманова поверхность, расположенная над плоскостью w , может быть взаимно однозначно и конформно отображена на одну из следующих трех нормальных областей G_z : 1) на полную плоскость (эллиптический случай); 2) на плоскость с выключенной точкой (параболический случай) и 3) на единичный круг или, более обще, на произвольную область, ограниченную континуумом (гиперболический случай).

Учение о распределении значений однозначных аналитических функций занимается изучением систем (z_a) точек области G_z , в ко-

*) $w(z) = (z - z_0)^\nu f(z)$, где ν — целое число положительное, отрицательное или нуль, а $f(z)$ — функция, голоморфная в точке z_0 .

торых функция $w(z)$ принимает заданное значение $w = a$; при этом рассматриваются всевозможные значения a . Классическим результатом в этой области является знаменитая теорема Пикара (Picard), согласно которой функция, мероморфная в плоскости с выключенной точкой, принимает бесконечное число раз всякое значение a , исключая самое большее два значения. Сюда примыкает учение о распределении значений Адамара (Hadamard), Бореля (Borel), Жюлиа (Julia) и др. Однако, при этих далеко идущих обобщениях и углублениях теоремы Пикара точка зрения конформных отображений играет второстепенную роль. Постановка и изучение вопроса совершаются без учета римановой поверхности G_w , на которую мероморфная функция отображает область G_z , т. е. плоскость с выключенной точкой. В свою очередь, первые исследования римановых поверхностей целых и мероморфных функций [Гурвиц (Hurwitz), Бутру (Boutroux), Иверсен (Iversen), Гросс (Gross) и др.] имели лишь немногие точки соприкосновения с результатами учения о распределении значений.

Новое обоснование теории мероморфных функций проложило мост между этими двумя направлениями исследования. На место вейерштрассовского канонического представления целых и мероморфных функций выступают более сильные вспомогательные средства теории функций и теории потенциала. На новой основе просто излагается и углубляется теория Адамара-Бореля. Однако, важнейшим успехом является то, что новые аналитические понятия имеют одновременно и геометрическое значение. Основные величины (характеристика, дефект, индекс разветвления) связывают асимптотическое поведение однозначной аналитической функции $w(z)$ со свойствами римановой поверхности G_w , на которую она конформно отображает свою область существования G_z . Это позволяет рассматривать теорему Пикара и ее обобщения как определенные высказывания о характере разветвления поверхности G_w . Новое направление переносит центр тяжести исследования распределения значений на изучение отображения $G_z \rightarrow G_w$ с точки зрения искажения внутри и, прежде всего, на границе; таким образом, вопрос идет о далеко идущих обобщениях классических теорем об искажении и соответствии границ при конформном отображении областей, подобных однолистным.

Учение о распределении значений включается, таким образом, в общую теорию конформных отображений. С этой точки зрения центральным вопросом учения о распределении значений является *проблема типа* — интересная и сложная задача, оставшаяся открытой в классической теории униформизации. На основании метрико-топологических особенностей открытой односвязной римановой поверхности следует определить, принадлежит ли она к параболическому или к гиперболическому типу, т. е. можно ли ее конформно отобразить на плоскость с выключенной точкой или на единичный круг. Те обобщения теоремы Пикара, которые обычно объединяются

под названием „соотношения дефектов“, содержат необходимые признаки для параболического типа. Однако, хотя и известны различные достаточные критерии, мы еще даже для сравнительно простых классов римановых поверхностей не имеем полного решения проблемы типа.

Среди римановых поверхностей параболического типа особо выделяются простыми свойствами ветвления те из них, которые соответствуют мероморфным функциям конечного порядка. К ним принадлежат, между прочим, поверхности с конечным числом точек ветвления.

Также и среди поверхностей гиперболического типа выделяются заслуживающие внимания классы поверхностей. Для характеристики отображающей функции можно указать предельный порядок роста, выше которого еще справедливы теорема Пикара и все соотношения дефектов. С понижением порядка роста характеристики степень разветвленности римановой поверхности возрастает. Наконец, вполне определенный класс образует поверхности *ограниченного вида* (*beschränktartige*), которым соответствуют ограниченные характеристики. Для точного описания особенностей поверхности ограниченного вида нужно привлечь на помощь понятие множества емкости нуля. Эти множества играют важную роль и в других вопросах учения о распределении значений. В нашем изложении понятие емкости входит в теорию так называемой гармонической меры. Благодаря введению и систематическому применению этой меры, инвариантной относительно взаимно однозначных конформных отображений, становится возможным единое и наглядное изучение отдельных вопросов, близко связанных с теорией распределения значений.

I. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОСВЯЗНЫХ И МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ.

§ 1. Конформное отображение посредством линейных преобразований.

1. Группа взаимно однозначных и конформных отображений полной плоскости самой на себя аналитически определяется совокупностью дробнолинейных преобразований

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0). \quad (1)$$

Действительно, всякое линейное преобразование производит такое отображение, и, обратно, всякая функция $t(z)$, которая производит однозначное и конформное отображение плоскости самой на себя, имеет вид (1): в самом деле, такая функция должна быть регулярна во всякой точке плоскости z за исключением единственной точки z_0 , соответствующей значению $t = \infty$; таким образом, единственной особенностью этой функции является полюс первого порядка, откуда на основании элементарной теоремы из теории функций следует, что функция $t(z)$ есть рациональная функция первого порядка.

2. Если посредством стереографической проекции перейти от плоскости z к сфере Римана (Riemann) диаметра 1, касающейся плоскости в начале координат, то совокупность преобразований (1) перейдет в совокупность конформных отображений сферы самой на себя. Среди этих отображений особого внимания заслуживает группа вращений сферы. Общая форма преобразования вращения, переводящего точки z и ζ , соответственно $z = a$ и $\zeta = b$, друг в друга, определяется соотношением

$$\frac{z - a}{1 + \bar{a}z} = e^{i\alpha} \frac{\zeta - b}{1 + \bar{b}\zeta}, \quad (2)$$

где черта сверху означает переход к сопряженной комплексной величине, а α — действительный параметр*).

Совершая предельный переход $z \rightarrow a$, $\zeta \rightarrow b$, мы получим соотношение

$$\frac{|dz|}{1 + |z|^2} = \frac{|d\zeta|}{1 + |\zeta|^2},$$

*) Чтобы в этом убедиться, полезно заметить, что две точки z_1, z_2 , которым на сфере соответствуют диаметрально противоположные точки, связаны соотношением $z_1 z_2 = -1$.

откуда видно, что выражение

$$d\sigma = \frac{ds}{1+r^2}, \quad (2')$$

где ds — элемент евклидовой длины, а r — расстояние от нулевой точки до элемента дуги в плоскости z , остается инвариантным относительно преобразования вращения сферы. Геометрически это объясняется тем, что выражение $(2')$ представляет *сферическую длину* рассматриваемого элемента дуги. В метрике, определяемой выражением $(2')$, геодезическими линиями являются окружности в плоскости z ; соответствующие большим кругам на сфере; они характеризуются тем, что пересекают единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках.

Для дальнейших применений заметим еще, что логарифм отношения сферической длины элемента дуги к евклидовой его длине

$$u(z) = \log \frac{d\sigma}{ds} = \log \frac{1}{1+r^2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u = -4e^{2u}, \quad (2'')$$

где Δ — оператор Лапласа.

3. Кроме преобразований вращения сферы заслуживает особого внимания группа линейных преобразований, отображающих единичный круг (а тем самым и его внешнюю часть) самого на себя. Общая форма такого преобразования, переводящего точки $z = a$ и $\zeta = b$ друг в друга ($|a| < 1$, $|b| < 1$), определяется соотношением

$$\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = e^{i\alpha} \frac{\zeta-b}{1-\bar{b}\zeta}. \quad (3)$$

Обратно, всякое взаимно однозначное и конформное отображение $\zeta = \zeta(z)$ единичного круга самого на себя достигается линейным преобразованием (3). В самом деле, преобразуя переменные z и ζ посредством подходящих линейных преобразований группы (3), добьемся сперва того, чтобы точки $z = 0$ и $\zeta = 0$ соответствовали друг другу. На окружности $|z| = r$ ($0 < r < 1$) абсолютная величина функции $\frac{\zeta}{z}$, регулярной в круге $|z| < r$, не превосходит $\frac{1}{r}$; в силу принципа максимума это справедливо и в круге $|z| \leq r$. Отсюда при $r \rightarrow 1$ следует, что $|\zeta| \leq |z|$ для всех $|z| < 1$. Если переменить местами переменные z и ζ , то аналогично докажем, что $|z| \leq |\zeta|$, откуда следует, что $|\zeta| = |z|$, т. е. $\zeta = e^{i\alpha} z$. Так как обратный переход к первоначальным переменным совершается посредством линейных преобразований (3), то и последние связаны линейным соотношением (3).

Как и в п. 2, при предельном переходе $z \rightarrow a$, $\zeta \rightarrow b$ из (3) следует инвариантность дифференциального выражения

$$d\tau = \frac{ds}{1-r^2} \quad (3')$$

относительно преобразований группы (3). Если это выражение рассматривать как длину элемента дуги, то, как это впервые показал Пуанкаре (Poincaré) [1], мы придем к некоторой метрике, удовлетворяющей в круге $|z| < 1$ законам гиперболической (Болля-Лобачевского) геометрии; при этом роль кратчайших линий будут играть дуги окружностей, ортогональных к единичной окружности $|z| = 1$, представляющей „бесконечно-далекое“ неевклидовой плоскости¹⁾.

Легко убедиться в том, что логарифм отношения неевклидовой длины элемента дуги к евклидовой его длине удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, подобному уравнению (2). Именно, если положить $u = \log \frac{ds}{ds'}$, то в силу (3')

$$\Delta u = 4e^{2u}. \quad (3'')$$

4. Другой важный инвариант мы получим, если найдем логарифмическую производную соотношения (3)

$$\frac{1 - |a|^2}{(z - a)\left(\frac{1}{z} - \bar{a}\right)} \frac{dz}{z} = \frac{1 - |b|^2}{(\zeta - b)\left(\frac{1}{\zeta} - \bar{b}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

и в полученном выражении будем считать, что точка z стремится к граничной точке $e^{i\varphi}$. При этом ζ будет стремиться к соответствующей граничной точке $e^{i\theta}$, а дифференциальное отношение $\frac{d \log z}{d \log \zeta}$ к $\frac{d\varphi}{d\theta}$; отсюда получим

$$\frac{1 - |a|^2}{|e^{i\varphi} - a|^2} d\varphi = \frac{1 - |b|^2}{|e^{i\theta} - b|^2} d\theta.$$

Таким образом дифференциальное выражение

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

сохраняет свое значение, если точки $z = re^{i\varphi}$ и $w = e^{i\theta}$ одновременно подвергаются преобразованию группы (3).

Выражение

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} = \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}$$

является действительной частью функции $\frac{w + z}{w - z}$ и потому есть гармоническая функция точки (Aufpunkt) z . Это выражение имеет простое геометрическое значение, впервые указанное Шварцем (Schwarz) [1]. Именно, в силу одной элементарной геометрической теоремы имеем

$$1 - |z|^2 = |w - z| |w' - z|,$$

¹⁾ Для кратчайшего „расстояния“ между точками O и z получается величина $\frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$. [Более подробно см. у Каратеодори, Конформное отображение, М.—Л., 1934.]

где w' — второй конец хорды единичного круга, определяемой точками w и z (см. фиг. 1); так как далее

$$\frac{d\vartheta}{|w-z|} = \frac{d\omega}{|w'-z|},$$

где $d\omega$ — длина элемента дуги единичной окружности, описываемого точкой w' при бесконечно малом вращении хорды вокруг точки z , то

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}.$$

Линиями уровня этого выражения служит семейство окружностей, касающихся единичной окружности в точке $e^{i\vartheta}$; с точки зрения неевклидовой геометрии — это орициклы или предельные линии, ортогональные к семейству параллельных „прямых“ (окружности, ортогональные к единичной окружности), направленных в „бесконечно удаленную“ точку $e^{i\vartheta}$.

5. В силу инвариантности дифференциала $d\omega$ относительно преобразований группы (3) этим же свойством обладает и интеграл

$$\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta,$$

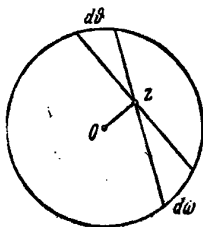
взятый между двумя произвольными пределами ϑ_1, ϑ_2 ($0 \leq \vartheta_2 - \vartheta_1 \leq 2\pi$); это значит, что если точки $z = re^{i\varphi}$ ($0 \leq r < 1$), $e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2}$ подвергнуть одному и тому же преобразованию группы (3), переводящему их в некоторые точки $z', e^{i\vartheta'_1}, e^{i\vartheta'_2}$, то будет иметь место равенство

$$\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2) = \omega(z'; \vartheta'_1, \vartheta'_2).$$

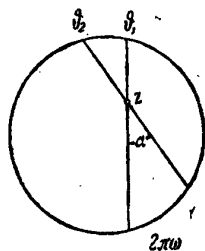
Из рассмотренного выше геометрического значения $d\omega$ следует, что $\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2)$ равно деленной на 2π длине дуги, отсекаемой на единичной окружности хордами, проведенными из точек $e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2}$ через точку z (фиг. 2). Если α — величина угла, образованного этими хордами, то непосредственно видно, что

$$2\pi\omega = 2\alpha - (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Отсюда становится очевидным, что величина $\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2)$ в круге $|z| < 1$ изменяется между 0 и 1; линиями уровня этой величины служит семейство дуг окружностей, соединяющих точки $e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2}$. В интерпретации Пуанкаре эти линии играют роль эквидистант, т. е. линий, находящихся на постоянном неевклидовом расстоянии



Фиг. 1.



Фиг. 2.

друг от друга. На дуге $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ величина ω равна 1, на дополнительной дуге $\vartheta_2 < \vartheta < \vartheta_1 + 2\pi$ она равна 0.

Для $z=0$ величина ω равна деленной на 2π длине дуги $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ единичной окружности $|z|=1$. Если же z изменять, то значение ω можно рассматривать как обобщенную „длину“ дуги $(\vartheta_1, \vartheta_2)$, измеренную относительно подвижной внутри единичного круга точки z .

Так как, кроме того, ω является гармонической функцией от z , то мы ее называем „гармонической мерой дуги $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ в точке z относительно единичного круга“.

Гармоническая мера $\omega(z, \alpha)$ дуги α окружности $|z|=1$ относительно единичного круга обладает, таким образом, следующими свойствами:

1) $\omega(z, \alpha)$ в круге $|z| < 1$ есть ограниченная гармоническая функция.

2) ω принимает граничное значение 1 во всякой внутренней точке дуги α и значение 0 на дополнительной дуге β .

Применяя принцип максимума и минимума гармонической функции, мы тотчас убеждаемся, что указанными двумя свойствами гармоническая мера определяется однозначно.

6. Неподвижные точки c_1, c_2 преобразования группы (3) или зеркально симметричны относительно единичной окружности (эллиптический случай) или обе лежат на единичной окружности (гиперболический случай), где они также могут совпадать (параболический случай). Нормальная форма соответствующих преобразований следующая:

эллиптическое преобразование:

$$\frac{z - c_1}{z - c_2} = e^{i\vartheta} \frac{\zeta - c_1}{\zeta - c_2} \quad (|c_1| \neq 1, c_1 \bar{c}_2 = 1, \vartheta \text{ действительно}),$$

гиперболическое преобразование:

$$\frac{z - c_1}{z - c_2} = \lambda \frac{\zeta - c_1}{\zeta - c_2} \quad (|c_1| = |c_2| = 1, \lambda > 0),$$

параболическое преобразование:

$$\frac{1}{z - c} = \frac{1}{\zeta - c} + i\lambda \bar{c} \quad (|c| = 1, \lambda \text{ действительно}).$$

§ 2. Основная теорема конформных отображений. Отображение универсальной поверхности наложения многосвязной области.

7. Относительно отображения областей более общих, чем рассмотренные в § 1, мы предполагаем известной прежде всего следующую теорему:

А. Всякая односвязная однолистная область G , граница Γ которой содержит более одной точки, может быть отображена взаимно однозначно и конформно на единичный круг.