

А.Б. Мигдал

**Качественные методы в
квантовой теории**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
А11

А11 **А.Б. Мигдал**
Качественные методы в квантовой теории / А.Б. Мигдал – М.: Книга по Требованию, 2013. – 336 с.

ISBN 978-5-458-26349-8

Книга посвящена качественным методам теоретической физики (размерные и модельные оценки, изучение предельных случаев, использование аналитических свойств и свойств симметрии физических величин). Применение качественных методов иллюстрируется на многочисленных физических задачах из различных областей квантовой теории. Задача книги - научить начинающих физиков правильному подходу к исследовательской работе в области теоретической физики.

ISBN 978-5-458-26349-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Глава 4

Аналитические свойства физических величин 170

Зависимость момента инерции ядра от деформации (173).

Зависимость частоты звука от волнового вектора (174).

1. Аналитические свойства диэлектрической постоянной 175

Аналитические свойства диэлектрической постоянной в простой модели (178).

2. Аналитические свойства амплитуды рассеяния 181

Унитарность как следствие принципа суперпозиции и сохранения вероятности (181). Дисперсионное соотношение (183). Резонансное рассеяние при малых энергиях (184). Нерезонансное рассеяние при малых энергиях (188). Рассеяние на потенциальной яме (190). Аналитические свойства волновой функции (191). Одночастичные функции сплошного спектра при малой энергии (192).

3. Использование аналитических свойств в физических задачах 194

Теория ядерных реакций с образованием медленных частиц (194). Взаимодействующие частицы в потенциальной яме (198). Теория прямых реакций (201). Пороговые особенности амплитуды рассеяния (203).

Глава 5

Методы задачи многих тел 206

1. Метод квазичастиц и функции Грина 212

Амплитуды перехода (212). Одночастичные функции Грина в системе невзаимодействующих частиц (функции Грина квазичастиц) (215). Функции Грина в системе взаимодействующих частиц (217). Аналитические свойства одночастичной функции Грина (219). Вычисление наблюдаемых величин (222). Распределение ферми-частиц по импульсам (224).

2. Графический метод 225

Графическое изображение процессов (225). Взаимодействие между квазичастицами (237). Локальное взаимодействие квазичастиц (242).

3. Решение задач методом функций Грина 244

Уравнение Дайсона. Обоснование модели оболочек (244). Неустойчивость фермиевского распределения в случае притяжения. Возникновение щели в энергетическом спектре (248). Энергетический спектр бозе-систем. Сверхтекучесть (254).

4. Система во внешнем поле 261

Изменение распределения частиц в поле (263). Спиновая поляризуемость и магнитный момент квазичастицы (264). Звуковые колебания в ферми-системе («нулевой звук») (265). Плазменные колебания. Экранировка заряда в плазме (267). Законы сохранения и заряды квазичастиц для различных полей (268).

Глава 6

Качественные методы в квантовой теории поля . . . 273

1. Конструирование релятивистских уравнений 280

Лоренц-инвариантность (280). Уравнения Максвелла (284). Уравнение Клейна — Гордона — Фока (286). Уравнение Дирака (287). Функция Грина бесспиновых частиц (290). Функция Грина частицы со спином $1/2$ (292). Функция Грина фотона (294).

2. Расходимости и перенормируемость 297

Локальное взаимодействие между частицами (297). Графики Фейнмана в скалярной теории (300). Оценки расходимостей и идея перенормировок (302). Условие перенормируемости (307). Логарифмическое приближение и перенормируемость (310).

3. Квантовая электродинамика на малых расстояниях . . 318

Локальное взаимодействие в квантовой электродинамике (318). Поляризация вакуума (322). Радиационные поправки к закону Кулона (324). Электромагнитное взаимодействие на сверхмалых расстояниях (327).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение большинства задач теоретической физики начинается с применения качественных методов, которые составляют наиболее привлекательную и красивую особенность этой науки. Под качественными методами мы понимаем размерные оценки и оценки с помощью простых моделей, изучение предельных случаев, когда может быть использована малость какого-либо параметра, использование аналитических свойств физических величин и, наконец, извлечение следствий из свойств симметрии, т. е. из инвариантности относительно каких-либо преобразований, например, инвариантности относительно преобразований Лоренца или изотопической инвариантности.

Как показывает педагогический опыт, именно эта сторона теоретической физики труднее всего дается начинающим.

К сожалению, обычно методы теоретической физики излагаются формально математически, а не в той конструктивной форме, в какой ими пользуются в научной работе. Задача книги — восполнить этот пробел, т. е. научить начинающего физика-теоретика правильному подходу к решению научных задач. Эта цель в значительной мере определяет характер изложения. Все общие результаты получаются сначала на частных примерах, на упрощенных до предела моделях.

Формальное изложение, при котором убраны все следы постепенного подхода к результату, все следы «пота», может, как нам кажется, внушить начинающему научному работнику чувство неполноценности. Поэтому автор старался по возможности показать механизм подхода к задаче, особенно на первой стадии работы. Разумеется, при этом приходится отказаться от строгости изложения, но зато раскрываются «секреты» ремесла, т. е. маленькие хитрости, которые ускоряют получение результатов.

Обычная ошибка начинающих — это желание сразу понимать все до конца. В действительности понимание возникает постепенно по мере привыкания к новым понятиям. Одна из трудностей научной работы состоит в том, что нельзя продвигаться вперед без ясного понимания, но понимание возникает только в результате работы. Каждое законченное исследование означает преодоление этого противоречия. Аналогичные трудности неизбежно возникнут при чтении этой книги. Автор надеется, что к концу чтения они будут преодолены.

Каждая из шести глав книги начинается с подробного введения, в котором в простой форме излагается физический смысл полученных в главе результатов.

Первые три главы книги посвящены размерным и модельным оценкам в атомной механике, применениям различных типов теории возмущений и квазиклассическому приближению. Эти главы представляют собой в переработанном виде книгу А. Б. Мигдала и В. П. Крайнова «Приближенные методы квантовой механики» («Наука», 1966 г.).

Четвертая глава посвящена различным задачам, для решения которых необходимо использовать аналитические свойства физических величин.

В пятой главе развивается графический метод и его применение к задаче многих тел.

Наконец, шестая глава посвящена вопросам, связанным со взаимодействием элементарных частиц на малых расстояниях. Именно в этой проблеме квантовой теории поля главную роль играет применение качественных методов.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Мигдалу, А. М. Полякову, В. А. Ходелю за многочисленные советы и обсуждения и В. П. Крайнову за помощь в выборе материала первых трех глав. Автор благодарит также своих друзей и учеников Г. Засецкого, Д. Воскресенского, Н. Кириченко, О. Маркина, И. Мишустина, Г. Сорокина и А. Черноуцана за помощь в подготовке рукописи.

ГЛАВА 1

РАЗМЕРНЫЕ И МОДЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Ни одна задача в физике не решается точно. Всегда приходится пренебрегать влиянием каких-либо воздействий, которые не существенны для изучаемого явления. При этом нужно уметь оценивать отбрасываемые величины. Кроме того, следует до получения количественного результата исследовать изучаемое явление качественно, т. е. оценить порядок изучаемой величины и по возможности найти характер решения.

Для этой цели задача сначала рассматривается в максимально упрощенном виде. Например, если речь идет о движении частицы в кулоновском поле, то вместо этого рассматривается ее движение в прямоугольной потенциальной яме, с соответствующим образом подобранной глубиной и шириной, зависящей от энергии частицы, и т. д. Кроме того, следует рассмотреть все предельные случаи, в которых решение упрощается. Например, если требуется решить задачу о рассеянии частиц произвольной энергии, следует рассмотреть сначала предельные случаи малых и больших энергий и проследить, как сопрягаются соответствующие выражения в промежуточной области энергий.

Цель этой главы — научить читателя получать приближенные решения из размерных оценок с помощью упрощенной модели изучаемого явления.

В некоторых случаях размерные оценки позволяют получить и количественные соотношения. Докажем, например, теорему Пифагора из размерных соображений. Из размерности вытекает, что площадь треугольника (рис. 1) можно записать как квадрат гипотенузы c^2 ,

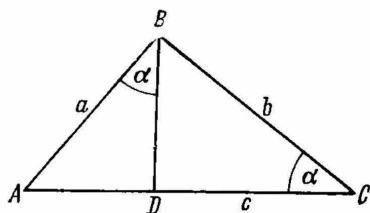


Рис. 1.

умноженный на некоторую функцию угла $f(\alpha)$. То же самое относится к площадям двух подобных треугольников ABD и BCD , для которых роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Поэтому

$$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha).$$

Рассмотрим в виде другого примера задачу о нахождении силы сопротивления при движении тела в вязкой среде с произвольной скоростью.

Начнем с предельного случая малых скоростей. Тогда сила сопротивления будет определяться вязкостью среды. Параметр, определяющий понятие малой или большой скорости, найдется, если составить из вязкости, плотности среды и размеров тела величину, имеющую размерность скорости. Предположим, что тело имеет приблизительно одинаковые размеры по всем направлениям. Тогда для оценок размеры тела можно характеризовать, как и в случае шара, одной длиной R . Из вязкости η , плотности ρ , длины R и скорости v можно составить только одну безразмерную комбинацию, называемую числом Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{vR}{\nu},$$

где $\nu = \eta/\rho$. Так как поток количества движения равен $\eta \nabla v$, то оценка силы, действующей на единицу поверхности, есть $P \sim \eta \frac{v}{R}$. Градиент скорости оценивается как $\nabla v \sim v/R$. Действительно, на поверхности тела скорость жидкости равна v , вдали от тела на расстояниях порядка R жидкость покоится, $\nabla v \sim \frac{\Delta v}{R} \sim \frac{v}{R}$. Если оценить поверхность тела как $S \sim 4\pi R^2$, то полная сила сопротивления

$$F \sim 4\pi \eta v R.$$

Заметим, что точное решение задачи для сферического тела дает в случае малой скорости

$$F = 6\pi \eta v R.$$

В случае произвольной скорости это выражение следует помножить на функцию от безразмерного параметра Re

$$F = 6\pi \eta v R \Phi\left(\frac{vR}{\nu}\right).$$

Рассмотрим теперь предельный случай очень больших скоростей. В этом случае сила сопротивления не зависит от вязкости и определяется количеством движения, которое сообщается за единицу времени столбу жидкости, находящемуся впереди тела с площадью основания, равной площади поперечного сечения тела

$$F \sim \pi R^2 \rho v^2.$$

Следовательно, при больших скоростях функция $\Phi(x) \sim \frac{1}{6}x$.

Грубо характер решения при всех скоростях определяется из интерполяционной формулы

$$F \sim 6\pi\eta v R \left(1 + \frac{1}{6} \frac{vR}{\nu}\right).$$

Согласно такой оценке переход от одного режима к другому должен был бы произойти при $Re \sim 6$. В действительности переход в турбулентный режим, когда сила сопротивления не зависит от вязкости, происходит при $Re \sim 100$. Мы сталкиваемся здесь со случаем, который довольно редко встречается — обычно переход от одного предельного случая к другому характеризуется значением соответствующего безразмерного параметра порядка единицы.

Другой пример, который мы приведем, относится к возможности построения теории, связывающей гравитацию и электродинамику. Такая теория, если бы она существовала, должна была бы определить значение безразмерного параметра, связывающего гравитационную постоянную g с величинами, характеризующими электромагнитные процессы, т. е. с зарядом электрона e и его массой m , скоростью света c и постоянной Планка $\hbar$. Из этих величин можно составить два безразмерных соотношения

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad \xi = \frac{gm^2}{\hbar c} = 2 \cdot 10^{-15}.$$

Как уже упоминалось, безразмерные параметры, которые возникают в результате решения уравнений, обычно оказываются порядка единицы. Поэтому величина ξ должна входить таким образом, чтобы получалось число порядка единицы, например,

$$\alpha \ln (1/\xi) \sim 1.$$

Именно в такой форме входят параметры α и ξ в оценки, которые дают надежду на установление связи между электродинамикой и гравитацией.

Приведем еще один пример того, как оценки помогают ориентироваться в сложных задачах. Ответим на вопрос: начиная с каких напряженностей полей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ уравнения Максвелла в пустоте сделаются нелинейными? Причина нелинейности уравнений связана с возмущением вакуума внешним полем. Составим величину, имеющую размерность поля, из величин, характеризующих вакуумные флуктуации электрон-позитронного поля. Так как $e\mathcal{E}$ имеет размерность энергии, деленной на длину, то

$$e\mathcal{E}_к \sim mc^2 / \frac{\hbar}{mc}, \quad \mathcal{E}_к \sim \frac{m^2 c^3}{e\hbar}.$$

Из этого выражения ясно, что критическое поле определяется частицами с наименьшей массой, т. е. электрон-позитронным полем. Величина $\mathcal{E}_к$, как мы видим, есть напряженность, при которой на комптоновской длине возникает разность потенциалов порядка энергии пары. Подстановка численных значений e , m , $\hbar$, c дает $\mathcal{E}_к \sim 10^{16}$ в/см.

1. ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Прежде чем производить оценки физических величин, посмотрим, как делать более простые оценки, а именно — оценки математических выражений. Принцип подобных оценок состоит в определении области переменных, вносящих главный вклад в результат, в выделении быстро и медленно меняющихся в этой области частей математического выражения, а также в использовании асимптотических выражений.

Оценка производной. В самом простом случае, когда существенная область изменения функции $F(x)$ характеризуется одним параметром l , производная имеет порядок $F'(x) \sim F(l)/l$.

Например, если $F(x) = \exp(-x^2/l^2)$, то производная $F'(x) = -\frac{2x}{l^2} \exp(-x^2/l^2)$ и, следовательно, $F'(l) \sim F(l)/l$.

Однако для x , много больших l , такая оценка не годится.

Для степенной функции $F(x) = x^n$ область существенного изменения определяется самой переменной x . Действительно,

$$F'(x) = nx^{n-1} \sim nF(x)/x.$$

В некоторых случаях существенная длина l различна на различных участках изменения переменной x . Тогда

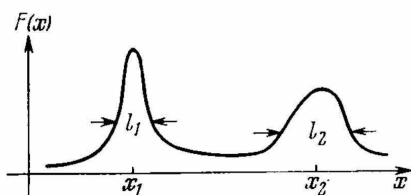


Рис. 2.

в каждой области переменной x производная

$$F'(x) \sim F(x)/l(x),$$

где $l(x)$ — длина, на которой $F(x)$ существенно меняется в этой области. Пусть, например, $F(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 2. Тогда

$$F'(x - x_1) \sim F(x_1)/l_1, \quad \text{а} \quad F'(x - x_2) \sim F(x_2)/l_2.$$

В более сложных случаях, когда $F(x)$ можно хотя бы примерно нарисовать, ее производную лучше всего оценивать из графика.

Оценки интегралов. Продемонстрируем методы оценок интегралов на нескольких примерах.

1. Часто можно получать приближенные значения интегралов, разлагая в ряд подинтегральную функцию. Например,

$$\begin{aligned} \int_0^x \exp(-t^2) dt &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4/2 - \dots) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \end{aligned}$$

Этот ряд сходится для всех x . Для оценки интеграла можно ограничиться несколькими первыми членами ряда. Разумеется, такая оценка удобна при $x \lesssim 1$.

Как оценить тот же интеграл при больших x ? Интегрируя несколько раз по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^x &= \int_0^\infty - \int_x^\infty = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left[\frac{\exp(-x^2)}{2x} - \int_x^\infty \frac{\exp(-t^2)}{2t^2} dt \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \exp(-x^2) \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \dots \right]; \end{aligned}$$

где n -й член ряда имеет вид $(-1)^n (2n-1)!!/2^{n+1} x^{2n+1}$. Легко видеть, что ряд расходится. Действительно, при $n \rightarrow \infty$ факториал $(2n-1)!!$ растет быстрее степенного члена x^{2n+1} .

Рассматриваемый ряд представляет собой пример так называемого асимптотического ряда (подробнее см. стр. 124). Так как он расходится, то брать очень большое число членов для оценки интеграла невыгодно: при этом уменьшится точность. Как найти оптимальное число членов ряда? Заметим, что при больших x члены рассматриваемого ряда сначала убывают по абсолютной величине, а затем начинают расти. Оптимальное число членов ряда, очевидно, определяется из условия минимума остаточного члена ряда. Легко видеть, что остаточный член имеет порядок $(n+1)$ -го члена ряда. Поэтому рецепт состоит в суммировании до минимального члена ряда. Условие минимума можно приближенно записать в форме равенства n -го и $(n+1)$ -го членов ряда:

$$\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} x^{2n+1}} \sim \frac{(2n+1)!!}{2^{n+2} x^{2n+3}}.$$

Отсюда $n \sim x^2$.

ЗАДАЧА

Показать, что при оценке интеграла $\int_x^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt$ в случае $x \gg 1$ оптимальное число членов асимптотического ряда равно x .

2. Многие интегралы можно оценить, выделяя наиболее существенную часть в подинтегральном выражении. Рассмотрим примеры:

$$1) \quad I(x) = \int_0^x \frac{\exp(t^2)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt.$$