И. Букур

Введение в теорию категорий и функторов

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И. Букур

И11 Введение в теорию категорий и функторов / И. Букур – М.: Книга по Требованию, 2023. – 259 с.

ISBN 978-5-458-31314-8

Книга румынских математиков представляет собой введение в теорию категорий, методы и язык которой применяются почти во всей современной математике. Приводятся многочисленные примеры ситуаций из различных разделов математики, которые иллюстрируют универсальность рассматриваемых понятий.Книга может служить учебным пособием для изучающих современную алгебру и топологию. Она доступна студентам-математикам старших курсов университетов.

ISBN 978-5-458-31314-8

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Несмотря на интенсивное проникновение идей теории категорий во все возрастающее число областей современной математики, на русском языке до сих пор не было книги, специально посвященной этой теории [1]). Поэтому появление русского перевода книги И. Букура и А. Деляну отвечает давно назревшей потребности.

Первые четыре главы этой книги посвящены общей теории категорий, последние три (занимающие, однако, более половины всего объема книги) — абелевым категориям. Несколько параграфов пятой и шестой глав написал Н. Попеску.

Назначение книги Букура и Деляну, ее место в ряду других руководств по теории категорий и важные положительные черты хорошо освещены в помещенном ниже предисловии, написанном видным специалистом по теории категорий П. Хилтоном.

Но книга не лишена и некоторых недостатков, особенно проявившихся в пятой и шестой главах: изложение местами слишком сжатое или недостаточно аккуратное, в некоторых доказательствах имеются пробелы (или даже ошибки). Поэтому пришлось сопроводить текст книги довольно большим числом примечаний, имеющих целью исправление замеченных дефектов. Помещено также несколько примечаний, содержащих дополнительные сведения. Примечаний авторов в книге нет.

Д. Райков

---

[1]) Лишь в начале 1971 г. издательство МГУ выпустило отпечатанные на ротапринте „Лекции по теории категорий“ М. С. Цаленко и Е. Г. Шульгейфера. Но из-за мизерности тиража (всего 300 экземпляров) это издание так и не поступило в продажу.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория категорий возникла за последние двадцать пять лет и в настоящее время образует самостоятельную отрасль математики. Своим происхождением и первоначальными стимулами развития она обязана алгебраической топологии. Когда Эйленберг и Маклейн впервые сформулировали основные понятия категории, функтора, естественного преобразования и естественной эквивалентности, их непосредственной целью было дать надлежащие рамки для описания того, как применялись, или могли применяться, алгебраические методы в топологии. Разумеется, как авторам, так и другим математикам с самого начала было ясно, что область применения этих понятий выходит далеко за пределы алгебраической топологии. Так, были очевидны многие приложения внутри самой алгебры, и начала оформляться в полноправную математическую дисциплину гомологическая алгебра, имеющая дело с абелевыми категориями и в частности категориями модулей. Тем не менее на первых порах не было ясно, что здесь находится в скрытом виде „чистая“ теория категорий и функторов, способная занять в математике свое достойное место. Конечно, первоначальные основные понятия стали обрастать вспомогательными, подсказанными приложениями этих основных понятий, и обнаружилось, что многие рассуждения, традиционно проводившиеся в более специальном контексте, естественно укладываются в более абстрактные рамки теории категорий. Все же только за последние десять или того менее лет теория категорий стала в значительной степени черпать стимулы для дальнейшего развития в себе самой. Раз начавшись, этот процесс все больше ускорялся, так что в настоящее время объем знаний в этой области необычайно возрос, а вместе с этим продвижением сильно расширилась сфера приложений теории категорий, охватив и такие далеко отстоящие области математики, как фукциональный анализ и математическая логика.

Поэтому представляется, что настало время для книги по теории категорий, пригодной как для желающих заниматься самой этой теорией, так и для тех, кто хочет применять ее — или по крайней мере основные ее идеи — в других математических дисциплинах, таких, как алгебра, топология, алгебраическая геометрия, логика и т. д. Настоящая книга и предназначена служить такой двоякой цели и, надеюсь, будет пригодна не только как справочное руководство, но и как учебник. Требуемая для ее чтения математическая подготовка весьма невелика, во всяком случае не больше, чем имеется у студентов, приступающих к обучению на старших курсах; но нужно с самого начала предупредить читателя, что от него потребуется некоторая изощренность, если он хочет усвоить довольно абстрактные точку зрения и стиль рассуждений теории категорий.

По своей цели эта книга отличается от ценных руководств Фрейда и Митчелла (см. библиографию). Книга Фрейда посвящена почти исключительно абелевым категориям, а книга Митчелла по охвату материала, акцентам и направлению также довольно сильно отличается от настоящей. Для того чтобы сделать предлагаемую книгу как можно более полезной для специалистов различных областей и передать возможно явственней сам аромат теории, ее авторы наряду с такими основными темами, как представимость и пропредставимость функторов и теоремы вложения категорий, включили также более специальные вопросы, например топологии Гротендика и теорию пучков. Авторы вплотную подводят читателя к современной теории троек, универсальных алгебр и их многообразий (хотя в самой книге этого материала нет) и приводят обширную библиографию для последующего чтения.

Я с большим удовольствием представляю читателю книгу двух моих коллег и друзей Иона Букура и Аристида Деляну.

Курантовский институт математических наук,
Нью-Йоркский и Корнельский университеты,
август 1968

Питер Хилтон

ОТ АВТОРОВ

Авторам доставляет удовольствие выразить свою признательность доктору Николае Попеску, написавшему § 10 главы 5 и §§ 5, 6 и 8 главы 6.

Они приносят также благодарность Симоне Паску, превосходно выполнившей работу по напечатанию рукописи.

Ион Букур
Аристид Деляну

Июль 1968

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Понятие категории. Двойственность. Подкатегории. Примеры

Понятия категории и функтора были введены в математику С. Эйленбергом и С. Маклейном в 1944 году, в связи с проблемой аксиоматизации теории групп гомологий и когомологий топологических пространств. Эти понятия постепенно нашли применение и в других областях математики.

Определение. Будем говорить, что задана *категория* $\mathscr{C}$, если задан класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ элементов, называемых *объектами*, причем

1. Для каждой пары объектов (A, B) из $\mathscr{C}$ задано множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, называемое множеством *морфизмов* A в B (вместо $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ мы будем часто писать $u\colon A \to B$ или $A \xrightarrow{u} B$)[1].

2. Для каждой тройки объектов (A, B, C) из $\mathscr{C}$ задано отображение

$$\mu\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C)$$

(образ $\mu(u, v)$ пары (u, v), где $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$, будет обозначаться $v \circ u$ или vu и называться *композицией* морфизмов u и v).

3. Множества $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ и композиция морфизмов удовлетворяют следующим аксиомам:

(α) Композиция ассоциативна: для каждой тройки морфизмов $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$

$$w(vu) = (wv)u.$$

(β) Для каждого объекта A из $\mathscr{C}$ существует морфизм $1_A\colon A \to A$ (называемый *тождественным морфизмом* или *единицей* объекта A), такой, что $1_A u = u$ и $v 1_A = v$ для любых морфизмов $B \xrightarrow{u} A$, $A \xrightarrow{v} C$.

(γ) Если пары (A, B), (A', B') различны, то пересечение множеств $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', B')$ пусто.

Примеры категорий

1. Категория $\mathscr{E}ns$. Объекты этой категории — множества. Для любых двух множеств A, B под $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}ns}(A, B)$ понимается

---

[1] A называют *областью* морфизма u, а B — его *кообластью*.

множество всех отображений A в B, а под композицией $(f, g) \to gf$ — обычная композиция отображений.

2. Категория $\mathcal{Top}$. Объекты этой категории — топологические пространства. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y)$ для любых двух топологических пространств X, Y есть множество всех непрерывных отображений X в Y. Под композицией понимается обычная композиция отображений (композиция двух непрерывных отображений также непрерывна).

3. Категория $\mathcal{G}$. Объекты категории $\mathcal{G}$ — группы. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(A, B)$ для любых двух групп A, B есть множество всех гомоморфизмов группы A в группу B. Под композицией понимается обычная композиция гомоморфизмов.

4. Категория $\mathcal{Ab}$. Объекты этой категории — абелевы группы, а морфизмы — снова гомоморфизмы.

5. Категория ${}_\Lambda\mathcal{C}$. Пусть Λ — кольцо с единицей. Объектами категории ${}_\Lambda\mathcal{C}$ являются унитарные [1]) левые Λ-модули, морфизмами — гомоморфизмы Λ-модулей, а композицией — снова обычная композиция гомоморфизмов.

Аналогично определяется категория $\mathcal{C}_\Lambda$ правых Λ-модулей.

Определение. Пусть $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ — семейство категорий. Определим их произведение $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{C}_i$ следующим образом:

Объекты категории $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{C}_i$ — всевозможные семейства $(X_i)_{i \in I}$, где X_i для каждого $i \in I$ — объект категории $\mathcal{C}_i$;

$$\mathrm{Hom}_{\prod\limits_{i \in I} \mathcal{C}_i}\big((X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}\big) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i).$$

Если

$$(u_i)_{i \in I} \in \mathrm{Hom}_{\prod\limits_{i \in I} \mathcal{C}_i}\big((X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}\big)$$

и

$$(v_i)_{i \in I} \in \mathrm{Hom}_{\prod\limits_{i \in I} \mathcal{C}_i}\big((Y_i)_{i \in I}, (Z_i)_{i \in I}\big),$$

то

$$(v_i)_{i \in I} \circ (u_i)_{i \in I} = (v_i \circ u_i)_{i \in I}.$$

Определение. Для каждой категории $\mathcal{C}$ следующим образом определяется *дуальная категория* $\mathcal{C}^\circ$:

(I) Объекты категории $\mathcal{C}^\circ$ — те же, что у категории $\mathcal{C}$, т. е. $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

---

[1]) В дальнейшем слово „унитарные“ обычно опускается (хотя всюду предполагается, что Λ — кольцо с единицей и модуль унитарен, т. е. $1x = x$).

(II) За множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(A, B)$ по определению принимается $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$.

(III) Композиция

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(A, C)$$

определяется так: если

$$u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(A, B) \quad \text{и} \quad v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(B, C),$$

то

$$v \underset{\mathscr{C}^\circ}{\circ} u = u \underset{\mathscr{C}}{\circ} v.$$

Ясно, что $(\mathscr{C}^\circ)^\circ = \mathscr{C}$.

Возможность ассоциировать с каждой категорией $\mathscr{C}$ дуальную категорию $\mathscr{C}^\circ$ позволяет дуализировать каждое понятие или утверждение, относящееся к категории $\mathscr{C}$, сопоставляя ему дуальное понятие или утверждение, относящееся к категории $\mathscr{C}^\circ$ (получающееся путем „обращения стрелок").

Определение. *Подкатегорией* категории $\mathscr{C}$ называют категорию $\mathscr{C}'$, удовлетворяющую следующим условиям:

(I) $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}' \subset \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

(II) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$.

(III) Композиция морфизмов в $\mathscr{C}'$ индуцируется их композицией в $\mathscr{C}$.

(IV) Все тождественные морфизмы из $\mathscr{C}'$ — тождественные морфизмы в $\mathscr{C}$.

Определение. Подкатегория $\mathscr{C}'$ категории $\mathscr{C}$ называется *полной*, если

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$$

для каждой пары (A, B) объектов из $\mathscr{C}'$.

§ 2. Мономорфизмы, эпиморфизмы, изоморфизмы

Пусть $u\colon A \to B$ — морфизм категории $\mathscr{C}$. Для каждого объекта X категории $\mathscr{C}$ рассмотрим отображение

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B), \tag{1}$$

сопоставляющее всякому элементу $v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$ элемент $uv \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B)$.

Определение. Морфизм u называется *мономорфизмом*, если отображение (1) инъективно для любого объекта X из $\mathscr{C}$.

Примеры. 1. Пусть $\mathscr{C}$ — одна из категорий $\mathscr{E}ns$ или ${}_{\Lambda}\mathscr{C}$ (где Λ — произвольное кольцо с единицей) и $u\colon A \to B$ — морфизм из $\mathscr{C}$. Следующие два утверждения равносильны:

(a) u — мономорфизм;

(б) u инъективен, т. е. для любых $x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$ влечет $u(x_1) \neq u(x_2)$.

Доказательство. Мы ограничимся доказательством для категории ${}_\Lambda\mathscr{C}$, поскольку для категории $\mathscr{E}ns$ оно аналогично. Докажем импликацию (а)$\Rightarrow$(б). Пусть $N = u^{-1}(0)$. Допустим, что $N \neq \{0\}$; тогда отображение $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(N, B)$, порождаемое морфизмом u, не инъективно. В самом деле, рассмотрим элементы $v_1, v_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N, A)$, определяемые следующим образом:

$$v_1(\xi) = 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in N,$$

$$v_2(\xi) = \xi \quad \text{для всех} \quad \xi \in N.$$

Из предположения вытекает, что $v_1 \neq v_2$, однако их образы при отображении $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(N, B)$ совпадают.

Докажем теперь импликацию (б)$\Rightarrow$(а). Допустим, что существуют левый Λ-модуль M и $v \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, A)$, такие, что $v \neq 0$, но при отображении $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, B)$ v переходит в нулевой гомоморфизм. Тогда существует $\xi \in M$, такое, что $v(\xi) \neq 0$, но $u(v(\xi)) = 0$, а это противоречит (б).

2. 1_A: $A \to A$ есть мономорфизм для любого объекта A произвольной категории $\mathscr{C}$.

Предложение 1.1. *Композиция двух мономорфизмов есть мономорфизм.*

Доказательство немедленно следует из того, что композиция двух инъективных отображений инъективна.

Предложение 1.2. *Если vu — мономорфизм, то u — мономорфизм.*

Доказательство очевидно.

Пусть теперь u: $A \to B$ — произвольный морфизм и X — произвольный объект категории $\mathscr{C}$; рассмотрим отображение

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X), \tag{2}$$

сопоставляющее каждому элементу $v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, X)$ элемент $vu \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, X)$.

Определение. Морфизм u называется *эпиморфизмом*, если отображение (2) инъективно для любого объекта X категории $\mathscr{C}$.

Очевидно, u — эпиморфизм тогда и только тогда, когда, рассматриваемый как элемент из $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(B, A)$, он — мономорфизм. Другими словами, понятие эпиморфизма получается дуализацией понятия мономорфизма.

Предложение 1.1°. *Композиция двух эпиморфизмов есть эпиморфизм.*

Предложение 1.2°. *Если vu — эпиморфизм, то v — эпиморфизм.*

Примеры. 1. В категориях $\mathscr{E}ns$ и ${}_\Lambda\mathscr{C}$ понятия эпиморфизма и отображения *на* или гомоморфизма *на* совпадают.

Мы ограничимся случаем категории ${}_\Lambda\mathscr{C}$. Предположим, что u: $A \to B$, где A, B — Λ-модули, — гомоморфизм на. Если гомоморфизмы v, w: $B \to C$ различны, то существует хотя бы один элемент $x \in B$, такой, что $v(x) \neq w(x)$. Но существует хотя бы один элемент $y \in A$, для которого $u(y) = x$. Поэтому

$$(vu)(y) = v(u(y)) = v(x) \neq w(x) = w(u(y)) = (wv)(y),$$

т. е. $vu \neq wu$, следовательно, u — эпиморфизм.

Обратно, предположим, что u: $A \to B$ — эпиморфизм, и допустим, что $u(A)$ — собственный подмодуль модуля B. Пусть C — прямая сумма двух Λ-модулей B_1 и B_2, изоморфных B, и v_i: $B \to C$ ($i = 1, 2$) — композиция изоморфизма B на B_i и канонической инъекции $B_i \to C$. Пусть, далее, D — фактормодуль модуля C по подмодулю, порожденному всеми элементами вида $v_1(x) - v_2(x)$, где $x \in u(A)$, и w: $C \to D$ — каноническая проекция. Тогда $wv_1 \neq wv_2$ и $(wv_1)u = (wu_2)u$ в противоречие с тем, что u — эпиморфизм. Следовательно, $u(A) = B$, т. е. u — гомоморфизм на.

2. Пусть $\mathscr{C}$ — категория отделимых топологических абелевых групп с непрерывными гомоморфизмами в качестве морфизмов. Для морфизма u: $A \to B$ из $\mathscr{C}$ следующие утверждения равносильны:

(а) u — эпиморфизм,

(б) $\overline{u(A)} = B$.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Допустим, что $\overline{u(A)} = B_1 \neq B$. Рассмотрим морфизмы v_1, v_2: $B \to B/B_1$, где v_1 — каноническое отображение B на B/B_1, а v_2 — нулевой гомоморфизм. Так как $B_1 \neq B$, то $v_1 \neq v_2$; но $v_1 u = v_2 u$ в противоречие с (а).

(б)$\Rightarrow$(а). Пусть C — произвольный объект категории $\mathscr{C}$, а v_1, v_2: $B \to C$ таковы, что $v_1 u = v_2 u$. Следовательно, v_1, v_2 — непрерывные отображения, совпадающие на множестве $u(A)$, всюду плотном в B, а потому $v_1 = v_2$.

3. 1_A: $A \to A$ есть эпиморфизм для любого объекта A произвольной категории $\mathscr{C}$.

Определение. Морфизм u: $A \to B$ в произвольной категории $\mathscr{C}$, являющийся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, называется *биморфизмом*.

Определение. Морфизм u: $A \to B$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм v: $B \to A$, такой, что

$$vu = 1_A, \qquad uv = 1_B.$$

Предложение 1.3. *Каждый изоморфизм есть биморфизм.*

Доказательство. Так как $vu = 1_A$, а 1_A — мономорфизм, то, согласно предложению 1.2, u — мономорфизм. С другой стороны, так как $uv = 1_B$, а 1_B — эпиморфизм, то, согласно предложению 1.2°, u — эпиморфизм.

Замечание. Существуют биморфизмы, не являющиеся изоморфизмами. Например, рассмотрим в категории отделимых топологических абелевых групп морфизм u: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{Q}$—аддитивная топологическая группа рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — аддитивная топологическая группа вещественных чисел и u — тождественное вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Используя пример 2, легко проверить, что u — биморфизм. С другой стороны, не будучи отображением на, u не может быть изоморфизмом.

Предложение 1.4. *Композиция двух изоморфизмов есть изоморфизм.*

Доказательство очевидно.

Пусть A — объект категории $\mathscr{C}$. Рассмотрим мономорфизмы u: $U \to A$ и v: $V \to A$. Мы будем говорить, что мономорфизм u *мажорирует* мономорфизм v, и писать $u \geqslant v$ (или $v \leqslant u$), если существует морфизм v_1: $V \to U$, такой, что $uv_1 = v$.

Если такой морфизм v_1 существует, то, поскольку v — мономорфизм, из предложения 1.2 вытекает, что v_1 — мономорфизм, а так как u — мономорфизм, то из определения мономорфизма непосредственно следует, что v_1 однозначно определен.

Определенное так отношение „$\geqslant$“ рефлексивно и транзитивно.

Предположим теперь, что также $v \geqslant u$. В этом случае существуют однозначно определенные изоморфизмы u_1: $U \to V$ и v_1: $V \to U$, такие, что $v = uv_1$, $u = vu_1$. Действительно, по предыдущему существуют мономорфизмы u_1 и v_1, удовлетворяющие этим соотношениям. Но тогда $v = v(u_1v_1)$, $u = u(v_1u_1)$, и так как u и v—мономорфизмы, то заключаем, что $u_1v_1 = 1_V$, $v_1u_1 = 1_U$.

Два мономорфизма u: $U \to A$, v: $V \to A$, для которых $u \geqslant v$ и $v \geqslant u$, мы будем называть *эквивалентными*.

В каждом классе эквивалентных мономорфизмов выберем раз и навсегда по представителю (используя, например, аксиому выбора)[1]. Полученные так мономорфизмы мы будем называть *подобъектами* объекта A. Таким образом, подобъекты объекта A — не просто объекты категории $\mathscr{C}$, а некоторые пары вида (U, u), где u: $U \to A$ — мономорфизм; он будет называться *каноническим мономорфизмом* U в A. Но чтобы не усложнять запись и речь, мы всюду, где это не сможет повлечь путаницы, будем вместо (U, u) писать просто U.

Дуальным образом определяются понятия *факторобъекта* и *канонического эпиморфизма* [2]).

---

[1]) В качестве представителя класса мономорфизмов, эквивалентных 1_A (т. е. класса всех изоморфизмов с кообластью A), далее принимается 1_A.

[2]) При этом исходят из отношения мажорирования для эпиморфизмов с общей областью, определяемого следующим образом: $u \geqslant v$, если существует морфизм v_1, такой, что $v_1u = v$ (т. е. если в дуальной категории мономорфизм u мажорирует мономорфизм v).