Р.Н. Бончковский

Математическое просвещение. Выпуск 11

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.Н. Бончковский
Р11 Математическое просвещение. Выпуск 11 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 80 с.

ISBN 978-5-458-27047-2

В сборниках помещены задачи и решения, а также указатель математической литературы

ISBN 978-5-458-27047-2

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

из третьей вершины, назовем соответственными. Прямые BM, FD — соответственные, так же как и прямые FE, AN и ED, PC.

Докажем следующую теорему: прямые, соединяющие вершины треугольника оснований с точками пересечения противоположных сторон и соответственных прямых, пересекаются в одной точке.

Рассмотрим три следующие сложные отношения:

$$(ACME)=\frac{MA}{MC}:\frac{EA}{EC}=\frac{MA\cdot EC}{MC\cdot EA},$$

$$(CBND)=\frac{NC}{NB}:\frac{DC}{DB}=\frac{NC\cdot DB}{NB\cdot DC},$$

$$(BAPF)=\frac{PB}{PA}:\frac{FB}{FA}=\frac{PB\cdot FA}{PA\cdot FB};$$

$$(ACME)\cdot(CBND)\cdot(BAPF)=\frac{MA\cdot NC\cdot PB\cdot EC\cdot DB\cdot FA}{MC\cdot NB\cdot PA\cdot EA\cdot DC\cdot FB}.$$

На основании теоремы Чевы имеем:

$$\frac{MA\cdot NC\cdot PB}{MC\cdot NB\cdot PA}=-1,$$

$$\frac{EC\cdot DB\cdot FA}{EA\cdot DC\cdot FB}=-1.$$

Следовательно,

$$(ACME)\cdot(CBND)\cdot(BAPF)=1.$$

Из равенства сложных отношений:

$$(FDM'E')=(ACME),$$

$$(EFN'D')=(CBND),$$

$$(DEP'F')=(BAPF),$$

заключаем, что

$$(FDM'E')\cdot(EFN'D')\cdot(DEP'F')=1,$$

$$\frac{M'F\cdot E'D\cdot N'E\cdot D'F\cdot P'D\cdot F'E}{M'D\cdot E'F\cdot N'F\cdot D'E\cdot P'E\cdot F'D}=1.$$

На основании теоремы Чевы имеем

$$\frac{E'D\cdot D'F\cdot F'E}{E'F\cdot D'E\cdot F'D}=-1.$$

Следовательно,

$$\frac{M'F}{M'D}\cdot\frac{N'E}{N'F}\cdot\frac{P'D}{P'E}=-1.$$

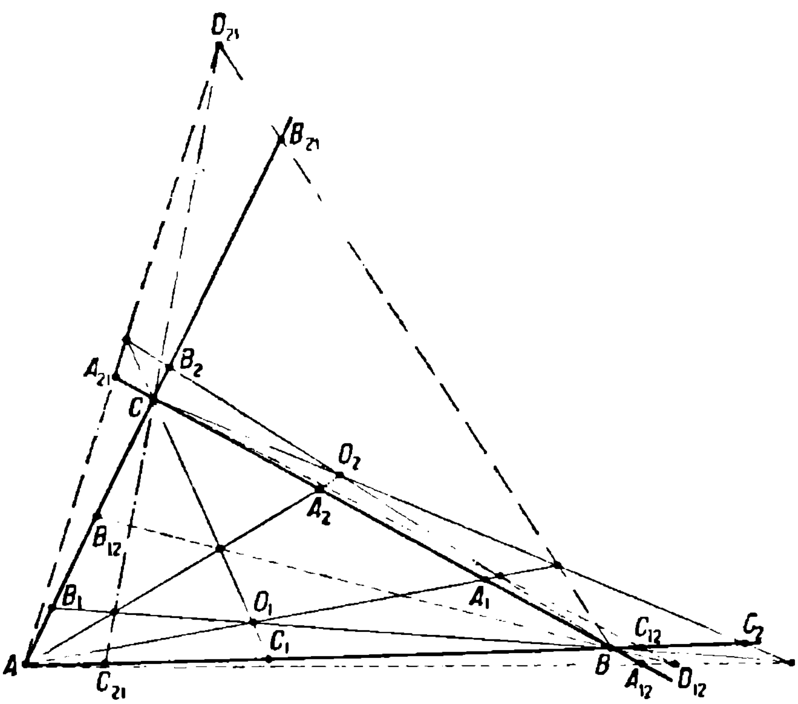
На основании теоремы, обратной теореме Чевы, заключаем, что прямые EM', DN', FP' пересекаются в одной точке (на фиг. 2 — точка S).

Справедлива и обратная теорема: *если в треугольнике оснований провести три прямые Чевы, то прямые, исходящие из вершин данного треугольника и проходящие через соответственные точки сторон треугольника оснований, пересекутся в одной точке.*

О ДВУХ ПУЧКАХ ЧЕВИАН И ДВУХ ТРАНСВЕРСАЛЯХ ТРЕУГОЛЬНИКА

Р. Н. Бончковский (Москва)

§ 1. Пусть в треугольнике ABC (фиг. 1) проведены прямые AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке O_1, и прямые AA_2, BB_2, CC_2, пересекающиеся в одной точке O_2. Прямые этих двух



Фиг. 1.

пучков чевиан пересекаются в шести точках (если не считать вершины треугольника). Через эти точки пересечения и вершины треугольника ABC проведем прямые, именно:

через	точку	пересечения	прямых	AA_1	и	BB_2	прямую	CC_{12}
»	»	»	»	BB_1	и	CC_2	»	AA_{12}
»	»	»	»	CC_1	и	AA_2	»	BB_{12}
»	»	»	»	AA_2	и	BB_1	»	CC_{21}
»	»	»	»	BB_2	и	CC_1	»	AA_{21}
»	»	»	»	CC_2	и	AA_1	»	BB_{21}

Я утверждаю, что прямые AA_{12}, BB_{12}, CC_{12} проходят через одну точку и точно так же прямые AA_{21}, BB_{21}, CC_{21} проходят через одну точку. Доказательство заключается в следующем.

Так как прямые AA_1, BB_2, CC_{12} проходят через одну точку, то по теореме Чевы

$$AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 = C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A.$$

Подобные же равенства можно написать для остальных троек прямых, проходящих через одну точку. Так получим шесть равенств:

$$\begin{aligned}
AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 &= C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A,\\
AC_2 \cdot BA_{12} \cdot CB_1 &= C_2B \cdot A_{12}C \cdot B_1A,\\
AC_1 \cdot BA_2 \cdot CB_{12} &= C_1B \cdot A_2C \cdot B_{12}A,\\
AC_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_1 &= C_{21}B \cdot A_2C \cdot B_1A,\\
AC_1 \cdot BA_{21} \cdot CB_2 &= C_1B \cdot A_{21}C \cdot B_2A,\\
AC_2 \cdot BA_1 \cdot CB_{21} &= C_2B \cdot A_1C \cdot B_{21}A.
\end{aligned}$$

Перемножив почленно первые три равенства и сделав то же самое с тремя последними равенствами, получим два равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&AC_{12} \cdot BA_{12} \cdot CB_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot BA_2 =\\
&\quad = C_{12}B \cdot A_{12}C \cdot B_{12}A \cdot A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot A_2C,\\
&AC_{21} \cdot BA_{21} \cdot CB_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot BA_1 =\\
&\quad = C_{21}B \cdot A_{21}C \cdot B_{21}A \cdot A_2C \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot A_1C.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Применив теорему Чевы к прямым AA_1, BB_1, CC_1 и к прямым AA_2, BB_2, CC_2, получим

$$\begin{aligned}
BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 &= A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B,\\
CB_2 \cdot AC_2 \cdot BA_2 &= B_2A \cdot C_2B \cdot A_2C.
\end{aligned}$$

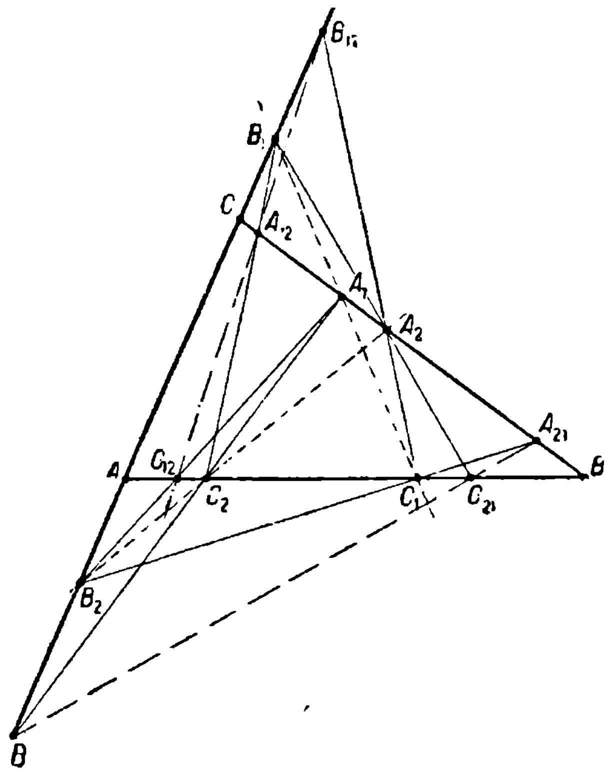
Поэтому после необходимых сокращений равенства (1) дают

$$\begin{aligned}
AC_{12} \cdot BA_{12} \cdot CB_{12} &= C_{12}B \cdot A_{12}C \cdot B_{12}A,\\
AC_{21} \cdot BA_{21} \cdot CB_{21} &= C_{21}B \cdot A_{21}C \cdot B_{21}A.
\end{aligned}$$

Отсюда по теореме, обратной теореме Чевы, делаем заключение, что прямые AA_{12}, BB_{12}, CC_{12} проходят через одну точку и что прямые AA_{21}, BB_{21}, CC_{21} также проходят через одну точку. На чертеже (фиг. 1) первая точка обозначена через D_{12}, а вторая — D_{21}.

Так как теорема Чевы верна независимо от того, находится ли точка пересечения внутри или вне треугольника, то и доказанное нами предложение справедливо при любом положении центров двух пучков чевиан.

§ 2. Пусть теперь стороны треугольника ABC пересечены двумя трансверсалями, пересекающими стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 (фиг. 2). Проведем прямые A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 и назовем точки их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и CA треугольника через C_{12}, A_{12}, B_{12}. Я утверждаю, что точки C_{12}, A_{12}, B_{12} лежат на одной прямой. Точно так же, если мы проведем прямые A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1, то точки C_{21}, A_{21}, B_{21} их пересечения соответственно со сторонами AB, BC и CA лежат на одной прямой. Доказательство заключается в следующем.



Фиг. 2.

Так как точки A_1, B_2, C_{12} лежат на одной прямой, то по теореме Менелая

$$AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 = -C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A.$$

Подобные же равенства можно написать для каждой из остальных пяти прямых: $B_1C_2A_{12}$, $C_1A_2B_{12}$, $A_2B_1C_{21}$, $B_2C_1A_{21}$, $C_2A_1B_{21}$. Всего получаем шесть равенств:

$$\begin{aligned}
AC_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_2 &= -C_{12}B \cdot A_1C \cdot B_2A,\\
AC_2 \cdot BA_{12} \cdot CB_1 &= -C_2B \cdot A_{12}C \cdot B_1A,\\
AC_1 \cdot BA_2 \cdot CB_{12} &= -C_1B \cdot A_2C \cdot B_{12}A,\\
AC_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_1 &= -C_{21}B \cdot A_2C \cdot B_1A,\\
AC_1 \cdot BA_{21} \cdot CB_2 &= -C_1B \cdot A_{21}C \cdot B_2A,\\
AC_2 \cdot BA_1 \cdot CB_{21} &= -C_2B \cdot A_1C \cdot B_{21}A.
\end{aligned}$$

Перемножив почленно первые три равенства и сделав то же с тремя последними равенствами, получим два равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&AC_{12} \cdot BA_{12} \cdot CB_{12} \cdot BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot BA_2 =\\
&\quad = -C_{12}B \cdot A_{12}C \cdot B_{12}A \cdot A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot A_2C,\\
&AC_{21} \cdot BA_{21} \cdot CB_{21} \cdot BA_2 \cdot CB_2 \cdot AC_2 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot BA_1 =\\
&\quad = -C_{21}B \cdot A_{21}C \cdot B_{21}A \cdot A_2C \cdot B_2A \cdot C_2B \cdot B_1A \cdot C_1B \cdot A_1C.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Применим теорему Менелая к прямым $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$:

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = -C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A,$$

$$AC_2 \cdot BA_2 \cdot CB_2 = -C_2B \cdot A_2C \cdot B_2A;$$

поэтому после необходимых сокращений равенства (2) дают

$$AC_{12}\cdot BA_{12}\cdot CB_{12}=-C_{12}B\cdot A_{12}C\cdot B_{12}A,$$
$$AC_{21}\cdot BA_{21}\cdot CB_{21}=-C_{21}B\cdot A_{21}C\cdot B_{21}A.$$

Отсюда по теореме, обратной теореме Менелая, делаем заключение, что три точки A_{12}, B_{12}, C_{12} лежат на одной прямой и три точки A_{21}, B_{21}, C_{21} также лежат на одной прямой.

§ 3. Теорема о трансверсалях (§ 2) была доказана независимо от теоремы о двух пучках чевиан (§ 1). Между тем эти теоремы тесно связаны друг с другом; именно, одна получается из другой по принципу двойственности. До сих пор это обстоятельство проявилось лишь в том, что доказательства этих двух теорем были основаны на двух двойственных теоремах — теореме Чевы и теореме Менелая. Покажем теперь, как можно при помощи принципа двойственности получить одну теорему непосредственно из другой.

Около произвольного треугольника ABC опишем окружность и рассмотрим треугольник $A'B'C'$, взаимный треугольнику ABC относительно этой окружности. Точка A' будет полюсом прямой BC; B' — полюсом прямой AC; C' — полюсом прямой AB; $A'B'$ будет полярой точки C, т. е. будет касательной к окружности в точке C; $B'C'$ — полярой точки A; $C'A'$ — полярой точки B. Вообще, при взаимном преобразовании каждой прямой соответствует определенная точка, именно, — ее полюс; каждой точке — прямая, ее поляра.

В треугольнике ABC проведем три прямые AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке; в треугольнике $A'B'C'$ им будут соответствовать три точки A'_1, B'_1, C'_1 лежащие, на сторонах треугольника $A'B'C'$ и лежащие на одной прямой. Другой тройке чевиан AA_2, BB_2, CC_2 соответствует другая тройка точек A'_2, B'_2, C'_2, лежащих на одной прямой.

Точкам пересечения двух троек чевиан соответствуют прямые $A'_1B'_2$, $B'_1C'_2$, $C'_1A'_2$; $A'_2B'_1$, $B'_2C'_1$, $C'_2A'_1$. Прямым AA_{12}, BB_{12}, CC_{12}; AA_{21}, BB_{21}, CC_{21}, проходящим через вершины треугольника ABC и через точки пересечения чевиан, соответствуют точки пересечения прямых $A'_1B'_2$, . . . , $C'_2A'_1$ со сторонами треугольника $A'B'C'$; это будут точки C'_{12}, A'_{12}, B'_{12}; C'_{21}, A'_{21}, B'_{21}. Тому обстоятельству, что прямые AA_{12} BB_{12}, CC_{12}, а также и прямые AA_{21}, BB_{21}, CC_{21} пересекаются в одной точке, соответствует то, что точки A'_{12}, B'_{12}, C'_{12} расположены на одной прямой, так же как точки A'_{21}, B'_{21}, C'_{21}.

Таким образом обе фигуры действительно двойственны между собой.

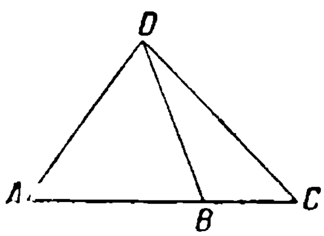
О ВЫЧИСЛЕНИИ ДЛИНЫ „ПРЯМОЙ n“

Д. А. Делнбаш (Баку)

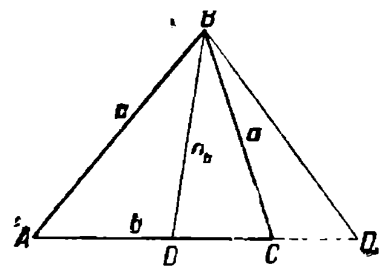
В первом выпуске „Математического просвещения“ была помещена статья Зетеля „О свойствах прямых n“, в которой автор рассматривает их свойства и дает способ их построения. Мы же зададимся целью вычислить длину „прямой n“. Для этого нам понадобится теорема Стюарта [1]), устанавливающая зависимость между тремя точками, находящимися на одной прямой, и четвертой вне ее. Эта зависимость заключается в том, что если A, B и C — три указанные точки и D — точка, находящаяся вне прямой AC (фиг. 1), то существует следующее тождественное соотношение:

$$AD^2\cdot BC + CD^2\cdot AB = BD^2\cdot AC + AC\cdot AB\cdot BC.$$

Пусть теперь задан треугольник ABC, в котором проведена из вершины B „прямая n“, т. е. прямая BD или BD_1, делящая



Фиг. 1.



Фиг. 2.

сторону AC в отношении n-х степеней прилежащих сторон AB и BC (фиг. 2).

Обозначим внутреннюю „прямую n“ BD через n_b, а внешнюю BD_1 через n_b'. Тогда по теореме Стюарта имеем

$$n_b^2\cdot AC = AB^2\cdot DC + BC^2\cdot AD - AC\cdot AD\cdot DC$$

и

$$(n_b')^2\cdot AC = BC^2\cdot AD_1 + AC\cdot AD_1\cdot CD_1 - AB^2\cdot CD_1.$$

Обозначая AB, BC, AC соответственно через c, a, b и зная, что $\frac{AD}{DC} = \frac{c^n}{a^n}$ и $\frac{AD_1}{CD_1} = \frac{c^n}{a^n}$, откуда

$$AD = \frac{bc^n}{a^n + c^n}, \quad DC = \frac{ba^n}{a^n + c^n} \quad \text{и} \quad AD_1 = \frac{bc^n}{c^n - a^n}, \quad CD_1 = \frac{ba^n}{c^n - a^n},$$

мы получим

$$n_b^2 = \frac{a^nc^2 + a^2c^n}{a^n + c^n} - \frac{a^nb^2c^n}{(a^n + c^n)^2} =$$

$$= \frac{a^2c^2}{(a^n + c^n)^2}\left[(a^{n-2} + c^{n-2})(a^n + c^n) - a^{n-2}b^2c^{n-2}\right]$$

[1]) Доказательство теоремы Стюарта можно найти в книге Шаль. Высшая геометрия, изд. 1910, стр. 202 и сл. (*Прим. ред.*)

и

$$(n_b')^2 = \frac{a^2c^2}{(c^n - a^n)^2} \cdot [(c^{n-2} - a^{n-2})(c^n - a^n) + a^{n-2} b^2 c^{n-2}],$$

или окончательно

$$n_b = \frac{ac}{a^n + c^n} \sqrt{(a^{n-2} + c^{n-2})(a^n + c^n) - a^{n-2} b^2 c^{n-2}} \qquad (1)$$

и

$$n_b' = \frac{ac}{a^n - c^n} \sqrt{(a^{n-2} - c^{n-2})(a^n - c^n) + a^{n-2} b^2 c^{n-2}}. \qquad (2)$$

Рассмотрим частные случаи:

1. $n = 0$; тогда $AD = DC$, т. е. BD — медиана и ее длина

$$m_b = \frac{ac}{2} \sqrt{(a^{-2} + c^{-2}) \cdot 2 - a^{-2} b^2 c^{-2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}.$$

2. $n = 1$; тогда $\frac{AD}{DC} = \frac{c}{a}$, т. е. BD — внутренняя биссектриса и ее длина

$$l_b = \frac{ac}{a+c} \sqrt{(a^{-1} + c^{-1})(a+c) - a^{-1} b^2 c^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{a+c} \sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]},$$

или, полагая $a + b + c = 2p$, получим, что

$$l_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}.$$

Длина внешней биссектрисы вычислится по формуле (2), она будет

$$l_b' = \frac{ac}{a-c} \sqrt{(a^{-1} - c^{-1})(a-c) + a^{-1} b^2 c^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{a-c} \sqrt{ac[b^2 - (a-c)^2]} = \frac{2}{a-c} \sqrt{ac(p-a)(p-c)}.$$

(См. статью Зетеля в журнале „Математика и физика в средней школе“, № 4 за 1934 г.)

3. $n = 2$; тогда $\frac{AD}{DC} = \frac{c^2}{a^2}$, т. е. BD — симедиана и ее длина

$$k_b = \frac{ac}{a^2 + c^2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} = \frac{2ac}{a^2 + c^2} m_b$$

и

$$k_b' = \frac{abc}{a^2 - c^2}.$$

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ РЯДА ФИБОНАЧЧИ

С. И. Городов (Ленинград)

В изданной в 1202 г. книге Леонарда Пизанского (Фибоначчи) Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano дан ряд, который позднее получил большое значение в математике, в особенности в теории рекуррентных рядов и в так называемой аддитивной теории чисел. В настоящей статье будут доказаны некоторые свойства этого целочисленного рекуррентного ряда — ряда Фибоначчи.

Напомним, что ряд $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называется целочисленным рекуррентным рядом, если каждый его член является некоторой целочисленной линейной функцией предыдущих членов. Впервые целочисленными рекуррентными рядами начал заниматься Кассини (Cassini), затем Муавр (Moivre) и в дальнейшем Люка (Lucas). В частности, в ряде Фибоначчи каждый последующий член равен сумме двух предыдущих:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots$$

Следовательно, закон образования членов ряда Фибоначчи таков:

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}.$$

Уравнение

$$x^2 = x + 1$$

называется скалой этого ряда; оно играет большую роль в исследовании ряда Фибоначчи. Корни скалы суть

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

С помощью корней скалы n-й член s_n ряда Фибоначчи можно представить в следующем виде:

$$s_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}.$$

Эта формула [1]) впервые была выведена французским математиком Бине (Binet).

[1]) Убедимся в правильности этой формулы. Для $n = 1, 2$ она проверяется непосредственно:

$$s_1 = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1,$$

$$s_2 = \frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Далее, достаточно доказать рекуррентное соотношение

$$\frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}},$$

После этих предварительных замечаний мы перейдем к выводу интересующих нас свойств членов ряда Фибоначчи.

1. $$s_1 + s_3 + \ldots + s_{2n+1} = s_{2n+2}.$$

Действительно,

$$s_1 + s_3 + \ldots + s_{2n+1} = \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^3 - a_2^3}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{a_1^{2n+1} - a_2^{2n+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_1^3 + \ldots + a_1^{2n+1}) - (a_2 + a_2^3 + \ldots + a_2^{2n+1})}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{a_1(a_1^{2n+2} - 1)}{a_1^2 - 1} - \frac{a_2(a_2^{2n+2} - 1)}{a_2^2 - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{(a_1 a_2^2 - a_1)(a_1^{2n+2} - 1) - (a_1^2 a_2 - a_2)(a_2^{2n+2} - 1)}{(a_1^2 - 1)(a_2^2 - 1)}\right].$$

Но из уравнения скалы видно, что $a_1^2 - 1 = a_1$, $a_2^2 - 1 = a_2$, $a_1 a_2 = -1$ $a_1 + a_2 = 1$; поэтому $a_1 a_2^2 - a_1 = a_1^2 a_2 - a_2 = -1$, и мы получаем

$$s_1 + s_3 + \ldots + s_{2n+1} = \frac{a_1^{2n+2} - a_2^{2n+2}}{\sqrt{5}} = s_{2n+2}.$$

2. $$1 + s_2 + s_4 + \ldots + s_{2n} = s_{2n+1}.$$

Действительно,

$$s_2 + s_4 + \ldots + s_{2n} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^4 - a_2^4}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{a_1^{2n} - a_2^{2n}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{(a_1^2 + a_1^4 + \ldots + a_1^{2n}) - (a_2^2 + a_2^4 + \ldots + a_2^{2n})}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{a_1^{2n+2} - a_1^2}{a_1^2 - 1} - \frac{a_2^{2n+2} - a_2^2}{a_2^2 - 1}\right].$$

Но $a_1^2 - 1 = a_1$, $a_2^2 - 1 = a_2$, поэтому полученное выражение принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{a_1^{2n+2} - a_1^2}{a_1} - \frac{a_2^{2n+2} - a_2^2}{a_2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[a_1^{2n+1} - a_2^{2n+1} - (a_1 - a_2)\right] =$$

$$= s_{2n+1} - 1.$$

Следовательно,

$$1 + s_2 + s_4 + \ldots + s_{2n} = s_{2n+1}.$$

что сделать нетрудно:

$$\frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^{n-2}(a_1 + 1) - a_2^{n-2}(a_2 + 1)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{a_1^{n-2} \cdot a_1^2 - a_2^{n-2} \cdot a_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}.$$

Что $a_1 + 1 = a_1^2$, $a_2 + 1 = a_2^2$, видно из уравнения скалы. (*Прим. ред.*)

3. $$s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Действительно,

$$s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1} = \left(\frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left[a_1^{2n} + a_2^{2n} - 2a_1^n a_2^n - a_1^{2n} + a_1^{n-1}a_2^{n+1} + a_1^{n+1}a_1^{n-1} - a_2^{2n}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[-2a_1^n a_2^n + a_1^{n-1}a_2^{n-1}(a_1^2 + a_2^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[-2(a_1a_2)a_1^{n-1}a_2^{n-1} + 3a_1^{n-1}a_2^{n-1}\right] =$$

$$= a_1^{n-1}a_2^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

4. $$s_{n-1}^2 + s_n^2 = s_{2n-1}.$$

Действительно,

$$s_{n-1}^2 + s_n^2 = \left(\frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left[a_1^{2n-2} + a_2^{2n-2} + a_1^{2n} + a_2^{2n}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{a_1} + a_1\right)a_1^{2n-1} + \left(\frac{1}{a_2} + a_2\right)a_2^{2n-1}\right].$$

Но, как видно из уравнения скалы,

$$a_1 + \frac{1}{a_1} = 2a_1 - 1 = \sqrt{5} \quad \text{и} \quad a_2 + \frac{1}{a_2} = 2a_2 - 1 = -\sqrt{5};$$

поэтому предыдущее выражение принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a_1^{2n-1} - a_2^{2n-1}\right) = s_{2n-1}.$$

5. $$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + s_n^2 = s_n s_{n+1}.$$

Имеем

$$s_1^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2}{5}, \quad s_2^2 = \frac{a_1^4 + a_2^4 - 2a_1^2a_2^2}{5}, \quad \ldots, \quad s_n^2 = \frac{a_1^{2n} + a_2^{2n} - 2a_1^n a_2^n}{5}$$

Следовательно,

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + s_n^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left[(a_1^2 + a_1^4 + \ldots + a_1^{2n}) + (a_2^2 + a_2^4 + \ldots + a_2^{2n})\right] -$$

$$- \frac{2}{5}\left[a_1a_2 + a_1^2a_2^2 + a_1^3a_2^3 + \ldots + a_1^n a_2^n\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{a_1^2(a_1^{2n} - 1)}{a_1^2 - 1} + \frac{a_2^2(a_2^{2n} - 1)}{a_2^2 - 1} - 2 \cdot \frac{a_1a_2(a_1^n a_2^n - 1)}{a_1a_2 - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{a_1^2(a_1^{2n} - 1)}{a_1} + \frac{a_2^2(a_2^{2n} - 1)}{a_2} - 2 \cdot \frac{a_1a_2(a_1^n a_2^n - 1)}{-2}\right] =$$