**А. С. Смогоржевский**

# О геометрии Лобачевского

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С51

**Смогоржевский А.С.**
С51 О геометрии Лобачевского / А. С. Смогоржевский – М.: Книга по Требованию, 2013. – 68 с.

**ISBN 978-5-458-35768-5**

Цель книги состоит в том, чтобы ознакомить читателя с основными положениями неевклидовой геометрии Лобачевского. Автор даёт в книге краткий очерк жизни и деятельности Н.И. Лобачевского и останавливается на вопросе о происхождении аксиом и их роли в геометрии.Для понимания книги необходимо знание элементарной геометрии (в её планиметрической части) и тригонометрии в объёме курса средней школы. Кроме того, автор пользуется инверсией - специальным геометрическим преобразованием, основные свойства которого выясняются в одном из первых параграфов книги.Автор является крупным специалистом по геометрии Лобачевского, и его книги представляет интерес не только для школьников - любителей математики, но и для студентов младших курсов педагогических институтов и университетов.

**ISBN 978-5-458-35768-5**

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

## § 1. КРАТКИЙ ОЧЕРК ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Николай Иванович Лобачевский родился 20 ноября (по новому стилю — 1 декабря) 1792 года в семье бедного чиновника. Николай Лобачевский и два его брата рано остались на попечении матери, женщины энергичной и разумной. Несмотря на крайнюю скудость средств, она определила всех своих сыновей в Казанскую гимназию.

Н. И. Лобачевский учился в Казанской гимназии с 1802 по 1807 год, в Казанском университете — с 1807 по 1811 год. Обладая блестящими математическими способностями, Лобачевский успешно прошел курс обучения и после окончания университета был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию, в котором и был утвержден в 1816 году.

Педагогическая деятельность Лобачевского оставила яркий след в памяти его учеников. Его лекции отличались отчетливостью и полнотой изложения. Познания Лобачевского в различных областях науки были обширными и разносторонними, что позволяло ему брать на себя чтение лекций не только по предметам математического цикла, но и по механике, физике, астрономии, геодезии, топографии.

Избранный в 1827 году ректором Казанского университета, Лобачевский состоял в этой должности почти двадцать лет. Талантливый и энергичный администратор, хорошо понимавший задачи высшего образования, он сумел превратить Казанский университет в образцовое высшее учебное заведение того времени. По его почину университет приступил к изданию «Ученых записок». При Лобачевском широко развернулось строительство университетских зданий и была открыта астрономическая обсерватория университета.

Всемирную славу принесла Лобачевскому его научная деятельность. Он обессмертил свое имя созданием неевклидовой геометрии, которую в настоящее время по имени ее основоположника называют геометрией Лобачевского [1]).

11 (23) февраля 1826 года на заседании Отделения физико-математических наук Казанского университета Лобачевский выступил с докладом, в котором впервые сообщил о сделанном им открытии неевклидовой геометрии. Первым изложением ее основ, появившимся в печати, был мемуар Лобачевского «О началах геометрии», опубликованный в 1829—1830 годах в журнале «Казанский вестник».

Открытие Лобачевского не было понято большинством его современников; его геометрические труды получили отрицательные отзывы как в России, так и за границей. Идеи великого русского ученого были слишком смелыми и резко расходились с господствовавшими тогда в науке воззрениями; поэтому протекло немало времени, пока они завоевали общее признание, пришедшее лишь после смерти Лобачевского.

Лобачевский не был разубежден нападками критики в правильности своих выводов и с присущей ему энергией и настойчивостью продолжал заниматься разработкой созданной им геометрической системы. Он публикует ряд работ, посвященных вопросам неевклидовой геометрии. Последняя из них, законченная Лобачевским незадолго до смерти, была записана под его диктовку; сам он уже не мог писать из-за поразившей его в старости слепоты.

Научная деятельность Лобачевского не ограничивалась геометрическими исследованиями: ему принадлежит также несколько фундаментальных трудов в области алгебры и математического анализа. Весьма остроумен и практичен найденный Лобачевским метод приближенного решения алгебраических уравнений.

Философские воззрения Лобачевского имели ярко выраженную материалистическую направленность. Лобачевский считал, что наиболее надежным средством проверки теоретических выводов является опыт, практика. Он требовал такого преподавания математики, которое приучало бы видеть за математическими действиями реальные явления жизни.

В 1846 году Лобачевский был отстранен от работы в университете и назначен помощником попечителя Казанского учебного округа. Хотя формально это было повыше-

---

[1]) Другое ее название — *гиперболическая геометрия* — связано с тем, что в ней прямая линия, как и гипербола евклидовой геометрии, имеет две бесконечно удаленные точки (см. § 4).

нием по службе, но фактически таким путем высшее начальство постаралось избавиться от прогрессивно настроенного и потому неугодного ему ректора; на новом посту, подчиненный попечителю учебного округа, Лобачевский был намного больше стеснен в своих действиях, чем в бытность ректором университета. Лобачевский тяжело переживал уход из университета, с которым была связана вся его жизнь.

Скончался Лобачевский 12 (24) февраля 1856 года. В 1896 году в Казани против здания университета был сооружен памятник этому выдающемуся ученому [1]).

---

[1]) Более полные биографические сведения о Лобачевском читатель может найти в следующих книгах:

В. Ф. Каган, Лобачевский, М. — Л., 1948. Этот обширный труд (506 страниц текста), кроме обстоятельно написанной биографии Лобачевского, содержит также обзор его произведений.

В. Ф. Каган, Великий ученый Н. И. Лобачевский и его место

## § 2. О ПРОИСХОЖДЕНИИ АКСИОМ И ИХ РОЛИ В ГЕОМЕТРИИ

Для выяснения роли аксиом рассмотрим в общих чертах наиболее важные этапы развития геометрии с древнейших времен.

Родиной геометрии являются страны Древнего Востока, где несколько тысячелетий тому назад в связи с потребностями землемерия, архитектуры и астрономии были выработаны важные в практическом отношении правила измерения углов, площадей некоторых фигур и объемов простейших тел. Эти правила вырабатывались эмпирически (опытным путем) и, по-видимому, передавались устно: в древнейших дошедших до нас математических текстах мы нередко встречаем применения геометрических правил, но не находим попыток формулировать их.

С течением времени, когда расширился круг объектов, к которым прилагались приобретенные геометрические знания, выяснилась необходимость формулирования геометрических правил, и притом в наиболее общем виде, что обусловило переход в геометрии от конкретных понятий к абстрактным. Например, правило, выработанное для измерения площади прямоугольного земельного участка, оказалось пригодным для измерения площади ковра, поверхности стены и т. п., в результате чего возникло абстрактное понятие — прямоугольник.

Так сложилась система знаний, получившая название геометрии. На первой стадии своего развития геометрия была эмпирической наукой, т. е. такой, все результаты которой выводятся непосредственно из опыта.

Развитие геометрии пошло по новому пути, когда было подмечено, что некоторые ее предложения не нуждаются в эмпирическом обосновании, поскольку они могут быть выведены из других ее предложений посредством умозаключений, построенных по законам логики. В геометрии

---

в мировой науке, М. — Л., 1943. Небольшая популярно написанная книжка.

П. А. Широков, В. Ф. Каган, Строение неевклидовой геометрии. Выпуск 1 серии «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей», М. — Л., 1950. В одном из разделов этой книги дано краткое, хорошо выполненное изложение начал геометрии Лобачевского, доступное широкому кругу читателей.

См. также статью «Лобачевский» в 25 томе Большой Советской Энциклопедии (2-е издание, стр. 314—317).

начали различать предложения двух родов: установленные опытным путем (позднее они были названы аксиомами) и доказуемые логически на основе аксиом (теоремы).

Так как логическое обоснование, не требующее ни специальных приборов, ни многочисленных утомительных измерений, в техническом отношении значительно проще эмпирического, то перед учеными античного мира встала, естественно, задача свести к минимуму количество предложений первого рода (аксиом), чтобы тем самым облегчить работу геометра, перенеся основную ее тяжесть в сферу логического мышления. Эта цель оказалась достижимой, так как геометрия абстрагируется от всех свойств тел, за исключением протяженности, — свойства весьма существенного, но настолько простого, что всевозможные геометрические соотношения могут быть выведены по законам логики из ограниченного количества предпосылок — аксиом.

Так геометрия из науки эмпирической превратилась в дедуктивную науку с характерным для ее современного состояния аксиоматическим изложением [1]).

Первым дошедшим до нас систематическим изложением основных положений геометрии были «Начала» Евклида, написанные около 300 года до нашей эры. Этот труд построен по следующей схеме: после определений и аксиом приводятся доказательства теорем и решения задач, причем каждая новая теорема доказывается на основе аксиом и ранее доказанных теорем. Аксиомы не доказываются, а только формулируются.

В течение двух тысячелетий «Начала» Евклида пользовались в ученом мире непререкаемым авторитетом. Однако одно место этого труда казалось не вполне оправданным. Мы имеем в виду аксиому параллельности, которую Евклид сформулировал так:

*Если две прямые при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то эти две прямые, продолженные неограниченно, встретятся с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых углов* [2]).

---

[1]) Дедукция — вывод. Дедуктивной называется такая наука, в которой новые положения выводятся чисто логическим путем из предшествующих.

[2]) В школьных учебниках геометрии аксиома параллельности Евклида заменена следующим равносильным ей предложением:

Справедливость аксиомы параллельности Евклида не возбуждала сомнений. Неясность в отношении этой аксиомы заключалась в другом: законно ли отнесена она к категории аксиом? нельзя ли доказать ее с помощью других аксиом евклидовых «Начал» и, таким образом, перевести в разряд теорем?

Первоначально попытки доказать аксиому параллельности отражали отмеченное выше стремление уменьшить количество геометрических предложений, требующих эмпирического обоснования. С течением времени положение изменилось: было забыто опытное происхождение аксиом, и они стали трактоваться как истины, очевидные сами по себе, вне зависимости от какого бы то ни было опыта [1]). Такая точка зрения породила уверенность в том, что аксиома параллельности, которую трудно признать самоочевидной из-за ее сложности, не является в действительности аксиомой и, следовательно, можно найти доказательство содержащегося в ней утверждения. Однако многочисленные усилия в этом направлении не давали положительных результатов; аксиома параллельности, словно заколдованный клад, не открывала исследователям своей тайны. Обреченные на неудачу попытки доказать ее, потребовавшие огромной затраты умственного труда многих поколений ученых, были расплатой за идеалистическое толкование сущности аксиом.

Наиболее распространенным типом ошибочного доказательства аксиомы параллельности Евклида была замена ее равносильным ей предложением, например: *перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой пересекаются*; или: *существует треугольник, подобный данному треугольнику, но не равный ему;* или: *геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой и лежащих по одну сторону ее, есть прямая*; или: *через любые три точки*

---

*Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.*

Две аксиомы евклидовой или иной геометрии считаются равносильными (эквивалентными), если из них вытекают одни и те же следствия при условии, что все остальные аксиомы этой геометрии сохраняют силу.

[1]) Известно, что слепорожденные, которым в зрелом возрасте операционным путем возвращено зрение, не могут на первых порах после операции отличить куб от шара, не ощупав их. Этим доказывается необходимость опыта для правильного восприятия геометрических образов, без чего не могут выработаться геометрические понятия.

*можно провести либо прямую, либо окружность.* Позже мы покажем, что все эти предложения ложны, если аксиома параллельности Евклида не имеет места. Следовательно, принимая любое из перечисленных предложений за аксиому, мы тем самым уже считаем справедливой евклидову аксиому параллельности, т. е. исходим из справедливости того, что требовалось доказать.

В своих исследованиях по теории параллельных линий Лобачевский пошел по иному пути. Начав с попыток доказать аксиому параллельности, он вскоре заметил, что одна из них приводит к совершенно неожиданным результатам. Эта попытка состояла в использовании метода доказательства от противного и основывалась на следующем соображении: если аксиома параллельности Евклида есть следствие других аксиом «Начал» и если, вопреки ей, допустить, что *через точку вне прямой в определяемой ими плоскости можно провести по меньшей мере две прямые, не пересекающие данной прямой*, то это допущение рано или поздно, в его ближайших или отдаленных следствиях, должно привести к противоречию. Между тем, рассматривая всё новые и новые следствия сделанного им допущения, парадоксальные с точки зрения евклидовой геометрии, Лобачевский убеждался, что они образуют стройную непротиворечивую систему теорем, способных составить основу новой научной теории.

Так был заложен фундамент неевклидовой геометрии; ее аксиома параллельности отличается от евклидовой и совпадает с приведенным выше допущением, которое в дальнейшем мы будем называть аксиомой параллельности Лобачевского [1]).

Всё же оставалось неясным, можно ли с уверенностью утверждать, что ни одно из бесчисленного множества возможных следствий аксиомы параллельности Лобачевского не приведет к противоречию. Лобачевский наметил решение этого вопроса: он указал, что непротиворечивость открытой им геометрии должна вытекать из возможности арифметизировать ее, т. е. возможности привести решение любого геометрического вопроса к арифметическим вычислениям и аналитическим преобразованиям, используя для этого формулы гиперболической тригонометрии, выведенные им же.

---

[1]) Впоследствии выяснилось, что, кроме геометрии, открытой Лобачевским, можно построить много других неевклидовых геометрий.

Позднее другими учеными были найдены строгие доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Исследования Лобачевского в области гиперболической геометрии весьма обширны: они охватывают элементарную ее часть, тригонометрию, аналитическую и дифференциальную геометрию. Используя методы созданной им геометрии, Лобачевский нашел свыше 200 новых формул для вычисления определенных интегралов.

Открытие Лобачевского расценивалось его современниками и даже его учениками как чудовищная нелепость, как дерзкий вызов законам логики и здравому смыслу [1]). Не приходится удивляться такому отношению к гениальной идее, ломавшей привычные представления. Ведь так же враждебно была встречена и гелиоцентрическая теория Коперника, отрицавшая то, что казалось совершенно очевидным, и утверждавшая то, что казалось немыслимым. Требовались очень глубокие соображения, чтобы понять допустимость сосуществования двух различных геометрий. К изложению некоторых из этих соображений, наиболее доступных пониманию, мы и перейдем.

В школьных учебниках геометрии в разделе «Планиметрия» изучается плоскость независимо от окружающего ее пространства; иными словами, планиметрия есть геометрия евклидовой плоскости. Хорошо изучены также геометрии некоторых криволинейных поверхностей; примером может служить сферическая геометрия, находящая широкое применение в астрономии и других отраслях знания.

В каждой науке важное значение имеют простейшие понятия. В евклидовой геометрии такими понятиями являются точка, прямая, плоскость. Эти наименования сохраняются и

---

[1]) Нельзя, конечно, огульно заподозрить современных Лобачевскому ученых в неспособности понять его открытие: многие не высказали своего мнения о нем по той, возможно, причине, что область исследований Лобачевского не входила в круг их научных интересов; известно также, что знаменитый немецкий математик Карл Гаусс и выдающийся венгерский геометр Янош Больаи, пришедшие независимо от Лобачевского к мысли о возможности построить неевклидову геометрию, разделяли его взгляды. Однако Гаусс, опасаясь быть непонятым и осмеянным, ни разу не выступил в печати с поддержкой идей Лобачевского, а Больаи, видя, что его собственные исследования по неевклидовой геометрии (опубликованные в 1832 году) не получили признания, отошел от занятий математикой. Таким образом, Лобачевскому пришлось в полном одиночестве бороться за правоту своих идей.

в неевклидовых геометриях, причем «прямой» называется линия, по которой измеряется кратчайшее расстояние между двумя точками, а «плоскостью» — поверхность, обладающая следующим свойством: если две точки «прямой» принадлежат этой поверхности, то ей принадлежат и все остальные точки той же «прямой». Например, в сферической геометрии «плоскостью» и «прямыми» мы называем соответственно сферу и окружности ее больших кругов. Эта терминология вполне уместна, так как в любой геометрии «прямая» есть простейшая из линий, а «плоскость» — простейшая из поверхностей, причем первая обладает наиболее важным свойством евклидовой прямой, вторая — наиболее важным свойством евклидовой плоскости [1]).

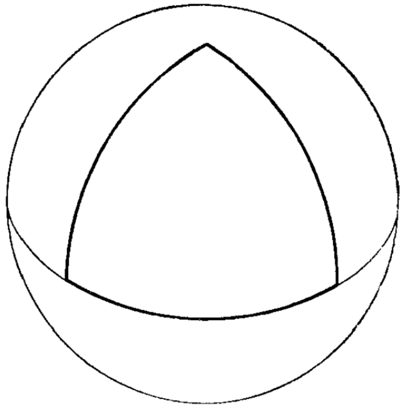

Рис. 1.

Отметим некоторые особенности сферической геометрии. Для наглядности будем рассматривать ее как геометрию поверхности глобуса. Нетрудно сообразить, что две «прямые» этой геометрии (например, два меридиана) всегда пересекаются в двух диаметрально противоположных точках глобуса. Далее, сумма углов сферического треугольника больше $2d$; например, у треугольника, ограниченного четвертью экватора и дугами двух меридианов (рис. 1), все три угла прямые [2]).

Известно, что в географии, наряду с глобусом, используются карты земной поверхности. Это равносильно изучению сферической геометрии путем рассмотрения карт сферы, что вполне возможно, если только указано, как по изображениям линий на карте находить их действительные длины и действительные величины углов между ними. Дело в том, что на карте получаются искаженные изображения, и характер

---

[1]) Заметим, что в проективной геометрии отсутствует понятие расстояния между двумя точками; в случае геометрий такого рода данная выше трактовка понятий «прямая» и «плоскость» не применима.

[2]) Углом между двумя линиями в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.

искажения не везде одинаков. Например, на карте земной поверхности, исполненной в проекции Меркатора[1]) (рис. 2), меридианам соответствуют параллельные прямые, к которым перпендикулярны прямые, соответствующие географическим параллелям, причем отрезок, изображающий $1^\circ$ параллели, имеет, независимо от ее широты, одну и ту же длину,

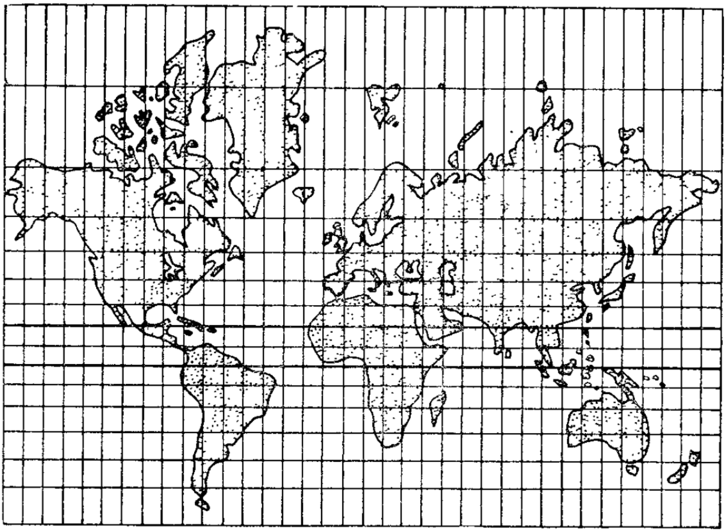

Рис. 2.

тогда как в действительности длина градуса параллели тем меньше, чем выше ее широта.

Поскольку поверхность имеет два измерения, то геометрию, изучающую фигуры, лежащие на определенной поверхности, принято называть двумерной, а самое поверхность — двумерным пространством. Издавна известны два вида двумерных геометрий: евклидова (для плоскости) и сферическая. Факту существования двумерной неевклидовой геометрии, а именно сферической, математики не придавали особого

[1]) Герград Меркатор (1512—1594) — выдающийся фламандский картограф. Предложенная им в 1569 году картографическая проекция получила всеобщее распространение, и с тех пор в этой проекции составляются морские карты.