

В.Д. Чистяков

**Сборник старинных задач по
элементарной математике с
историческими экскурсами и
подробными решениями**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В.Д. Чистяков
В11 Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями / В.Д. Чистяков – М.: Книга по Требованию, 2013. – 201 с.

ISBN 978-5-458-53122-1

ISBN 978-5-458-53122-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Велением бога он мальчиком был шестую часть
своей жизни;

В двенадцатой части затем пришла его светлая
юность.

Седьмую часть жизни прибавим — пред нами очаг
Гименея.

Пять лет протекли, и прислал Гименей ему сына.
Но горе ребенку! Едва половину он прожил

Тех лет, что отец, как скончался несчастный.

Четыре года страдал Диофант от утраты такой
тяжелой

И умер, прожив для науки. Скажи мне,

Скольких лет достигнув, смерть воспринял Диофант?

13. Задача из «Греческой антологии».

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три женщины.

14. Задача из «Арифметики» Диофанта. Найти три числа так, чтобы наибольшее превышало среднее на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ наименьшего, чтобы среднее превышало меньшее на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ наибольшего и чтобы наименьшее превышало число 10 на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ среднего числа.

15. Задача из «Арифметики» Диофанта. Решить систему

$$\begin{cases} x + y = 10; \\ x^2 + y^2 = 68. \end{cases}$$

16. **Задача Архимеда.** Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

17. **Задача Гипсикла Александрийского.** Доказать, что в арифметической прогрессии с четным числом членов сумма членов второй половины превышает сумму членов первой половины на число, кратное квадрату половины числа членов.
18. **Задача Никомаха.** Показать, что если разбить ряд всех нечетных чисел на группы, в которых число членов будет возрастать как ряд натуральных чисел, то сумма членов каждой группы будет равна кубу числа членов.
19. **Задача Евклида.** На данной конечной прямой AB построить равносторонний треугольник.
20. **Задача Евклида.** Разделить произвольный угол на две равные части.
21. **Задача Евклида.** Построить параллелограмм, стороны которого наклонены под данным углом так, чтобы он был равновелик данному треугольнику.
22. **Задача Евклида.** В данный круг вписать треугольник, равноугольный данному треугольнику.
23. **Задача Паппа Александрийского.** Дана точка D на биссектрисе угла. Провести через эту точку прямую линию так, чтобы отрезок ее внутри угла имел данную длину.
24. **Задача Диофанта Александрийского.** Катет прямоугольного треугольника есть точный куб, другой катет представляет разность между этим кубом и его стороной (т. е. первой степенью), а гипотенуза есть сумма куба и его стороны. Найти стороны.



Архимед (около 287—212 до н. э.)

25. **Задача Герона.** Определить площадь треугольника, если даны три его стороны: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

26. **Задача Архимеда.** Цилиндр, в основании которого большой круг шара, а высота — диаметр этого шара, имеет объем, равный $\frac{3}{2}$ объема, и поверхность, равную $\frac{3}{2}$ поверхности шара.

27. **Задача из «Греческой антологии».**

Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает:

«Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!»

«Яблоко я нес с Геликона немало,— Эрот отвечает,—
Музы, отколь ни возьмись, напали на сладкую
ношу.

Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио
Пятую долю взяла. Талия — долю восьмую.

С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть
взяла Терпсихора,

С частью седьмою Эрато от меня убежала.

Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня и двад-
цать

Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа.

Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками.

Только полсотни плодов мне оставили музы на
долю».

28. **Задача из «Греческой антологии».** Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили 9 муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько было плодов у каждой из граций до встречи с музами?



Евклид (III до н. э.)

29. Задача из «Греческой антологии».

Вот Полифема циклопа из меди статуя отлита.
Руку, уста и единое око ваятель сделал на диво,
Скрывши в них трубы: водой великан истекает как
будто.

Хитрое в трубах устройство: ведущая в руку спо-
собна

Весь водоем до краев через три дня наполнить.

Оку — достаточно дня, а устам и всего лишь две
пятых,

Вместе все три водоем скоро ли могут наполнить?

30. Задача из «Греческой антологии». Ослица и мул
шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Осли-
ца жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу.
«Чего ты жалуешься? — ответил ей мул. — Ведь
если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет
вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с
моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы
одинакова с моей». Сколько мешков несла ослица
и сколько нес мул?

**31. — Хроноса [бог времени] вестник, скажи, какая
часть дня миновала?**

— Дважды две трети того, что прошло, остается.

[У древних греков день делился на 12 часов.]

32. Задача Пифагора. Сумма любого числа последова-
тельных нечетных чисел, начиная с единицы, есть
точный квадрат.

33. Задача Пифагора. Всякое нечетное число, кроме
единицы, есть разность двух квадратов.

34. Задача Пифагора. С именем Пифагора связано пра-
вило для вычисления сторон прямоугольного тре-
угольника в целых числах. Согласно этому правилу
за меньший катет принимается нечетное число. Если
возвести его в квадрат, вычесть единицу и остаток



Пифагор (около 580—500 до н. э.)

разделить пополам, получим больший катет. Прибавив к полученному результату единицу, найдем гипотенузу.

Требуется, во-первых, доказать справедливость этого правила; во-вторых, пользуясь этим правилом, составить таблицу сторон прямоугольных треугольников в целых числах.

35. **Задача Архимеда (из трактата «О шаре и цилиндре»).** Поверхность шарового сегмента равна площади круга, имеющего радиусом прямую, которая проведена от вершины сегмента, служащей ему основанием.
36. **Задача Архимеда (из трактата «Леммы»).** Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг вдвое больше вписанного.
37. **Задача Архимеда (из трактата «О шаре и цилиндре»).** Найти шар, имеющий объем данного конуса или цилиндра.
38. **Задача Архимеда (из трактата «О шаре и цилиндре»).** Отрезать от шара плоскостью такой сегмент, чтобы отношение его объема к объему конуса, имеющего основание и высоту сегмента, было данное.
39. **Задача Архимеда (из трактата «О спиралях»).** Найти сумму квадратов n первых чисел натурального ряда.
40. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Требуется число 100 разделить два раза так, чтобы большая часть его от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления и чтобы большая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.
41. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти два числа, сумма которых 20, а произведение 96.

42. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти два числа, отношение которых 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.
43. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти три числа, если дано, что произведение суммы первых двух на третье есть 35, суммы первого с третьим на второе — 27, а суммы второго с третьим на первое — 32.
44. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа.
45. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти три числа так, чтобы суммы всех трех и каждой двух были квадратами.
46. **Задача Паппа Александрийского (из трактата «Математические коллекции»).** Показать, что в кругах площади подобных сегментов относятся как квадраты хорд, служащих им основаниями.
47. **Задача об удвоении куба.** Требуется построить ребро куба, который по объему был бы в два раза больше данного куба. Выполнить построение при помощи «вставок» (см. указания).
48. **Задача о трисекции угла.** Требуется произвольный угол разделить на три равные части. Выполнить построение способом Архимеда при помощи циркуля и передвижной линейки с двумя отметками (см. указания).
49. **Задача о квадратуре круга.** Построить квадрат, площадь которого была бы равновелика площади данного круга. Решить задачу приближенно при помощи «треугольника Бинга» (см. указания).
50. **Задача Аполлония.** Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

51. **Задача Архимеда** (из трактата «Измерение круга»). Архимед доказал: 1) каждый круг равновелик прямоугольному треугольнику, если радиус равен одному из катетов, а выпрямленная окружность равна другому катету; 2) круг относится к квадрату своего диаметра, как 11 к 14.

Покажите, что оба положения Архимеда тождественны с современным правилом вычисления: площадь круга равна $\frac{22}{7}r^2$

52. **Задача Архимеда** (из трактата «Исчисление песчинок»). Назвать некоторые числа, не только превосходящие число песчинок в куче, равной земному шару, но даже число песчинок в куче, равной всей Вселенной.

ЗАДАЧИ КИТАЯ

53. В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.
54. Имеется поле шириною в 2 ли, длиною в 3 ли. Спрашивается каково поле?
55. **Сокращение дробей.** Имеется $\frac{49}{91}$. Спрашивается, сколько получится, если сократить?
56. **Сложение дробей.** Имеется $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. Спрашивается, сколько получится, если их сложить?
57. **Вычитание дробей.** Имеется $\frac{3}{4}$, вычти $\frac{1}{3}$. Спрашивается, каков остаток?
58. **Сравнение дробей.** Имеется $\frac{8}{21}$, $\frac{17}{50}$. Спрашивается, которая из дробей больше и на сколько больше?