

**А. Ляв**

# **Математическая теория упругости**

**Москва**  
**«Книга по Требованию»**

УДК 50  
ББК 22  
А11

A11 **А. Ляв**  
Математическая теория упругости / А. Ляв – М.: Книга по Требованию, 2024. – 674 с.

**ISBN 978-5-458-26488-4**

В книге дан развернутый исторический обзор развития теории упругости. Рассмотрена теория деформаций и напряжений, упругие свойства твердых тел, а также теория равновесия изотропных тел.

**ISBN 978-5-458-26488-4**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригиналe, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

Эта книга выходит в четвертом издании; впервые она появилась под тем же названием в двух томах. Когда потребовалось второе издание, книга была почти полностью переработана, и казалось уже, что для следующих изданий не нужны будут столь значительные пересмотры. Но в интервалах между изданиями, с одной стороны, появились новые исследования, а с другой — автор ознакомился с некоторыми старыми работами, раньше ему неизвестными. Случилось, например, так, что большое количество литературы, вышедшей до третьего издания и в годы 1914—1918, не могло быть использовано для этого издания. Желательно, конечно, дать некоторый обзор этих исследований, но при этом объем книги слишком увеличился бы. Автор, однако, стремился к тому, чтобы ограничить это увеличение объема известными пределами. Вместе с тем он надеется все же представить достаточно полно предмет с различных точек зрения, так как эта математическая теория имеет большое значение и для общей физики и для техники.

Настоящее издание отличается от предыдущих дополнениями и переделками. Наиболее важными из них являются: 1) рассмотрение теории прямоугольной пластинки, защемленной по краям и изогнутой давлением, приложенным на одной из ее сторон; 2) рассмотрение теории сопротивления пластинки давлению, когда она так тонка, что растяжением средней поверхности при деформации ее в криволинейную поверхность нельзя преодолеть; 3) изложение вывода соотношений между напряжениями и деформациями, которые вытекают из молекулярной теории строения кристаллического тела. Последний из этих пунктов дан в виде прибавления к примечанию „В“. Это сделано не потому, что автор считает этот вопрос неважным, а потому, что теория, развитая в тексте, по существу должна быть макроскопической; структурная же теория, хотя вообще и желательна, нарушила бы логическое развитие предмета. В этом издании не дано изложение приближенных методов, широко применявшихся в некоторых новых книгах, как, например, в книгах Прескотта, а также Тимошенко и Лессельса, так как обе эти книги появились слишком поздно, чтобы на них можно было сделать в надлежащем месте сноски. Наиболее значительно пересмотрено изложение теории равновесия шара. Оказалось возможным

упростить значительно некоторые по существу несложные вопросы этой теории и таким образом притти к наиболее важным геофизическим приложениям этой теории. Благодаря этому пересмотру пришлось перенумеровать иначе § 170—171. По той же причине пришлось изменить нумерацию § 92 и 93. За исключением этого нумерация такая же, как и в третьем издании, где новые параграфы и главы отличаются буквами А и В. Новые параграфы, добавленные целиком в этом издании, отмечаются буквами, начиная с буквы С, как, например, 335С. Некоторые параграфы были переделаны без указания на это. Были исправлены также некоторые опечатки и ошибки, попадающиеся в третьем издании. Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность корреспондентам, сделавшим ему различные указания:

А. ЛЯВ.

Оксфорд.  
Октябрь 1926 г.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

### ВВЕДЕНИЕ.

### ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР.

Цель исторического обзора (15). — Изыскания Галилея (15). — Законы Гука (16). — Работы Мариотта (16). — Задача об эластике (16). — Теория устойчивости стержня Эйлера (17). — Исследования Кулона и Юнга (17). — Теория колебания стержня (18). — Попытка построения теории колебания оболочек и пластиночек (18). — Стояние теории упругости к 1820 г. (19). — Исследования Навье, касающиеся общих уравнений (20). — Роль Френеля в развитии теории упругости (21). — Первый мемуар Коши, посвященный теории упругости (21). — Исследования Коши и Пуассона; общие уравнения теории упругости, выведенные ими с помощью молекулярной гипотезы (23). — Введение Грином понятия упругого потенциала (24). — Применение законов термодинамики, сделанное Кельвиным (25). — Критика теории Пуассона, выдвинутая Стоксом (25). — Вопрос о числе упругих постоянных (26). — Методы решения общей проблемы равновесия (28). — Колебания твердых тел (30). — Распространение волн (31). — Технические задачи (32). — Теория изгиба и кручения Сен-Венана (32). — Эквивалентные нагрузки (34). — Упрощение и развитие теории Сен-Венана (34). — Касательное напряжение в балке (34). — Неразрезная балка (35). — Теория пружин Кирхгофа (36). — Критика и применение теории Кирхгофа (37). — Колебания стержней (37). — Удар (38). — Динамическое сопротивление (38). — Задача о пластинах (39). — Теория Кирхгофа-Геринга (39). — Видоизменение этой теории, сделанное Клебшем (41). — Задача об оболочках (41). — Задачи устойчивости в теории упругости (42). — Заключительные замечания (42).

### • ГЛАВА I.

### ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ.

1. Удлинение (44). — 2. Чистый сдвиг (45). — 3. Простой сдвиг (45). — 4. Смещение (46). — 5. Смещения при простом удлинении и простом сдвиге (47). — 6. Однородная деформация (47). — 7. Относительные смещения (48). — 8. Исследование относительных смещений (49). — 9. Деформация в случае малых смещений (50). — 10. Компоненты деформации (51). — 11. Поверхность деформации (52). — 12. Преобразование компонентов деформации (53). — 13. Дополнения (54). — 14. Различные виды деформаций (55). — 15. Соотношения между объемным расширением, вращением и смещением (57). — 16. Разложение любой деформации на объемное расширение и сдвиг (58). — 17. Тождественные соотношения между компонентами деформации (60). — 18. Смещения, соответствующие данной деформации (61). — 19. Ортогональные криволинейные координаты (62). — 20. Компоненты деформации в ортогональных криволинейных координатах (64). — 21. Объемное расширение и вращение в ортогональных криволинейных координатах (66). — 22. Цилиндрические и полярические координаты (67). — 22С. Дальнейшая теория ортогональных криволинейных координат (68).

### ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ I.

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ.

23. Введение (71). — 24. Деформация со смещениями какой угодно величины (71). — 25. Объемное расширение (73). — 26. Взаимный эллипсоид деформации (73). — 27. Изменение угла между двумя кривыми, происходящее в результате деформации (74). — 28. Эллипсоид деформации (75). — 29. Изменение направлений в результате деформации (76). — 30. Приложение к картографии 77), —

31. Условия, которым должны удовлетворять смещения (77). — 32. Конечная однородная деформация (78). — 33. Однородная чистая деформация (79). — 34. Разложение любой однородной деформации на чистую деформацию и на поворот (81). — 35. Поворот (81). — 36. Простое одностороннее удлинение (82). — 37. Простой сдвиг (82). — 38. Дополнения, относящиеся к сдвигу (83). — 39. Сложение деформаций (83). — 40. Дополнения, относящиеся к сложению деформаций (84).

## ГЛАВА II. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ.

41. Введение (86). — 42. Усилие на плоском элементе (86). — 43. Усилия на поверхности и массовые силы (87). — 44. Уравнения движения (87). — 45. Равновесие (88). — 46. Равновесие усилий, приложенных к поверхности элемента объема (89). — 47. Характеристика напряженного состояния в данной точке (89). — 48. Единицы напряжения (91). — 49. Преобразование компонентов напряжения (91). — 50. Поверхность напряжения (92). — 51. Различные типы напряжения (92). — 52. Разложение любого напряжения на всестороннее равномерное растягивающее и срезывающее напряжение (94). — 53. Дополнения (95). — 54. Уравнения движения и равновесия, выраженные в компонентах напряжения (96). — 55. Постоянное и равномерно изменяющееся напряжение (97). — 56. Замечания, относящиеся к уравнениям в компонентах напряжения (98). — 57. Графическое представление напряжений (99). — 58. Уравнения в компонентах напряжения в ортогональных криволинейных координатах (100). — 59. Частные случаи уравнений в компонентах напряжения в криволинейных координатах (102).

## ГЛАВА III. УПРУГИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

60. Введение (103). — 61. Работа и энергия (103). — 62. Существование упругого потенциала (105). — 63. Косвенный характер экспериментальных данных (106). — 64. Закон Гука (107). — 65. Аналитическая форма упругого потенциала (108). — 66. Упругие постоянные (110). — 67. Методы определения напряжений (110). — 68. Упругий потенциал изотропного тела (111). — 69. Упругие постоянные и модули изотропных тел (113). — 70. Замечания, относящиеся к соотношениям между напряжениями и деформациями в изотропном теле (114). — 71. Численные величины упругих постоянных и модулей для некоторых изотропных тел (115). — 72. Упругие постоянные в общем случае (116). — 73. Модули упругости (117). — 74. Термоупругие постоянные (118). — 75. Начальное напряжение (120).

## ГЛАВА IV. ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ УПРУГОСТИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКОЙ.

76. Ограничения математической теории (123). — 77. Диаграммы зависимости между напряжениями и деформациями (124). — 78. Предел пропорциональности, предел упругости и критическая точка (125). — 79. Влияние времени. Пластичность (127). — 79A. Мгновенные напряжения (128). — 80. Вязкость твердых тел (128). — 81. Анизотропия вследствие остаточной деформации (129). — 82. Повторная нагрузка (129). — 82A. Упругий гистерезис (130). — 83. Гипотезы относительно условий разрушения (131). — 84. Цели математической теории упругости (133).

## ГЛАВА V. РАВНОВЕСИЕ ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

85. Обзор общей теории (136). — 86. Напряжения, линейно зависящие от координат (137). — 87. Изгиб балки при помощи пар (140). — 88. Анализ решения для случая изгиба балки при помощи пары, приложенной на конце (141). — 89. Причины Сен-Венаана (142). — 90. Прямоугольная пластинка, изгибаемая парами (143). — 91. Уравнения равновесия в компонентах смещения (144). — 92. Соотношения между компонентами напряжения (145). — 93. Дополнительные результаты (146). — 94. Плоская деформация и плоское напряженное состояние (148). — 95. Изгиб узкой прямо-

угольной балки силой, приложенной на конце (149). — 96. Уравнения, выраженные в ортогональных криволинейных координатах (151). — 97. Полярные координаты (152). — 98. Радиальные смещения (152). — 99. Смещения, симметричные относительно оси (153). — 100. Труба под давлением (154). — 101. Приложение к конструкций дул артиллерийских орудий (156). — 102. Вращающийся цилиндр (157).

## ГЛАВА VI.

## РАВНОВЕСИЕ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

103. Симметрия строения (160). — 104. Геометрическая симметрия (160). — 105. Упругая симметрия (162). — 106. Изотропное твердое тело (166). — 107. Симметрия кристаллов (166). — 108. Классификация кристаллов (168). — 109. Упругость кристаллов (170). — 110. Различные типы симметрии (172). — 111. Материалы, обладающие тремя ортогональными плоскостями симметрии. Модули упругости (173). — 112. Раастяжение и изгиб стержня (174). — 113. Упругие постоянные кристаллов. Результаты экспериментов (174). — 114. Криволинейная анизотропия (176).

## ГЛАВА VII.

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ.

115. Вариационное уравнение движения (177). — 116. Применение вариационного уравнения (178). — 117. Общая задача равновесия (180). — 118. Однозначность решения (181). — 119. Теорема о минимуме энергии (182). — 120. Теорема о потенциальной энергии деформации (183). — 121. Теорема взаимности (184). — 122. Определение средних значений компонентов деформации (185). — 123. Среднее значение компонентов деформации в изотропном твердом теле (185). — 124. Общая задача о колебаниях. Однозначность решения (186). — 125. Поток энергии при колебательных движениях (188). — 126. Свободные колебания упругого твердого тела (189). — 127. Общие теоремы о свободных колебаниях (190). — 128. Мгновенная нагрузка и мгновенное обращение действия сил (192).

## ГЛАВА VIII.

## ПЕРЕДАЧА СИЛЫ.

129. Введение (193). — 130. Сосредоточенная сила (193). — 131. Элементарное решение первого типа (195). — 132. Типы решений, обладающих особыми точками (196). — 133. Местные возмущения (200). — 134. Элементарные решения второго типа (200). — 135. Сила, приложенная в точке плоской граничной поверхности (201). — 136. Распределенное давление (203). — 137. Давление двух касающихся тел. Геометрические соображения (204). — 138. Решение задачи о давлении двух касающихся тел (205). — 139. Теория удара Герца (209). — 140. Удар двух шаров (211). — 141. Деформации, соответствующие решениям, имеющим особые точки; применение полярных координат (211). — 142. Задачи о равновесии конусов (213).

## ГЛАВА IX.

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

143. Введение (215). — 144. Смещения при плоской деформации (215). — 145. Смещения в случае плоского напряженного состояния (217). — 146. Обобщенное плоское напряженное состояние (219). — 147. Введение деформации, имеющей особые точки (219). — 148. Сосредоточенная сила (220). — 149. Сила, действующая в какой-либо точке границы (221). — 150. Случай прямолинейной границы (222). — 151. Дальнейшие результаты (222). — 152. Типичные частные решения, обладающие особыми точками; случай двух измерений (224). — 153. Преобразование плоской деформации (226). — 154. Инверсия (226). — 155. Равновесие круглой пластики, нагруженной силами, лежащими в ее плоскости (228). — 156. Примеры преобразования плоского деформированного состояния (230).

## ДОБАВЛЕНИЯ К ГЛАВАМ VIII И IX.

156A. Теория дислокации Вольтерра (232).

## ГЛАВА X.

**ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА.**

157. Постановка задачи (240). — 158. Некоторые результаты теории потенциала (240). — 159. Метод интегрирования Бетти (244). — 160. Формулы для расширения (244). — 161. Вычисление объемного расширения по условиям на поверхности (246). — 162. Формулы для компонентов вращения (247). — 163. Вычисление вращения по условиям на поверхности (247). — 164. Тело, ограниченное плоскостью. Формулы для расширения (248). — 165. Тело, ограниченное плоскостью. Задано смещение на границе (250). — 166. Тело, ограниченное плоскостью. Задано напряжение на поверхности (252). — 167. Исторические указания (254). — 168. Тело, ограниченное плоскостью. Дальнейшие результаты (255). — 169. Формулы для смещения и деформации (256). — 170. Другие методы интегрирования (258).

## ГЛАВА XI.

**РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ СФЕРЫ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ.**

171. Введение (261). — 172. Частные решения в сферических функциях (261). — 173. Применение полученных результатов (263). — 174. Шар, подверженный действию массовых сил (265). — 175. Обобщения и частные случаи предыдущих решений (266). — 176. Гравитирующий несжимаемый шар (267). — 177. Деформация гравитирующего несжимаемого шара под действием внешних массовых сил (269). — 178. Гравитирующие тела приблизительно сферической формы (272). — 179. Вращающийся шар под действием сил взаимного притяжения (272). — 180. Приливная деформация. Приведенный модуль сдвига для Земли (273). — 181. Общее решение уравнений равновесия (275). — 182. Применение и обобщение предыдущих решений (276). — 183. Сфера, на которой заданы смещения (277). — 184. Обобщение предыдущего решения (278). — 185. Сфера, на которой заданы напряжения (279). — 186. Плоская деформация в круговом цилиндре (282). — 187. Применение криволинейных координат (284). — 188. Симметрическая деформация в теле вращения (286). — 189. Симметричная деформация в цилиндре (288).

## ГЛАВА XII.

**ВИБРАЦИЯ ШАРОВ И ЦИЛИНДРОВ.**

190. Введение (290). — 191. Решение при помощи сферических функций (291). — 192. Установление граничных условий для вибрирующего шара (293). — 193. Несжимаемый материал (296). — 194. Уравнение частот для вибрирующего шара (296). — 195. Колебания первого класса (297). — 196. Колебания второго класса (298). — 197. Дальнейшие исследования о колебаниях шара (299). — 198. Радиальные колебания полого шара (299). — 199. Колебания кругового цилиндра (300). — 200. Крутильные колебания (301). — 201. Продольные колебания (302). — 202. Поперечные колебания (304).

## ГЛАВА XIII.

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ.**

203. Введение (306). — 204. Волны расширения и волны искажения (306). — 205. Движение поверхности разрыва. Кинематические условия (308). — 206. Движение поверхности разрыва. Динамические условия (309). — 207. Скорость распространения волны в изотропной среде (310). — 208. Скорость распространения волны в анизотропной твердой среде (311). — 209. Волновые поверхности (312). — 210. Движение, определяемое волновым уравнением (314). — 211. Произвольные начальные условия (316). — 212. Движение, происходящее от массовых сил (317). — 213. Дополнительные результаты, относящиеся к движению под действием массовых сил (319). — 214. Волны, распространяющиеся по поверхности изотропного упругого твердого тела (321).

## ГЛАВА XIV.

## КРУЧЕНИЕ.

215. Напряжения и деформации в цилиндрическом теле при кручении (325). — 216. Проблема кручения (326). — 217. Метод решения проблемы кручения (328). — 218. Гидродинамические аналогии (328). — 219. Распределение касательных напряжений (329). — 220. Сопротивление кручению (330). — 221. Решения проблемы кручения для некоторых контуров (331). — 222. Дополнительные результаты (333). — 223. Графическое представление результатов (335). — 224. Аналогия с формой, принимаемой натянутой и равномерно нагруженной мембраной (336). — 225. Крутящий момент (337). — 226. Кручение анизотропной призмы (339). — 226A. Стержень переменного круглого сечения (340). — 226B. Распределение напряжений на концевом сечении (342).

## ГЛАВА XV.

## ИЗГИБ БАЛКИ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА КОНЦЕ.

227. Напряжения в изогнутой балке (345). — 228. Постановка задачи (345). — 229. Касательные напряжения при изгибе балки (345). — 230. Формулы для смещений (349). — 231. Решение задачи об изгибе для различных контуров поперечных сечений (351). — 232. Исследование смещений (354). — 233. Распределение касательных напряжений (357). — 234. Обобщение предыдущей теории (359). — 234A. Аналогия с формой растянутой мембранны под действием переменного давления (361). — 235. Критическое рассмотрение различных методов (362).

## ГЛАВА XVI.

## ИЗГИБ РАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННОЙ БАЛКИ.

236. Введение (366). — 237. Равномерное напряжение состояния вдоль балки (366). — 238. Напряжение, меняющееся линейно вдоль балки (368). — 239. Равномерно нагруженная балка. Приведение к задаче о плоской деформации (371). — 240. Постоянные, входящие в предыдущее решение (374). — 241. Напряжение и деформация элемента балки (375). — 242. Соотношения между кривизной и изгибающим моментом (377). — 243. Удлинение оси балки (379). — 244. Пояснения и примеры к теории (379).

## ГЛАВА XVII.

## ТЕОРИЯ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ.

245. Обобщение теории изгиба балки (388). — 245A. Дальнейшие исследования (386). — 246. Приближенная теория балки (386). — 247. Балка на двух опорах (388). — 248. Теорема о трех моментах (391). — 249. Графическое решение задачи о неразрезной балке (393). — 250. Выполнение графического построения (395).

## ГЛАВА XVIII.

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ.

251. Введение (398). — 252. Кинематика тонких стержней (398). — 253. Кинематические формулы (399). — 254. Уравнения равновесия (402). — 255. Обычная приближенная теория (405). — 256. Природа деформации в изогнутом и закрученном стержне (406). — 257. Приближенные формулы для компонентов деформации (408). — 258. Рассмотрение обычной приближенной теорией (410). — 258A. Малые смещения (412). — 259. Стержень, искривленный в начальном состоянии (413).

## ГЛАВА XIX.

## ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ.

- 260.** Кинетические аналогии Кирхгофа (416). — **261.** Распространение теоремы о кинетической аналогии на стержни, имеющие кривизну в начальном состоянии (417). — **262.** Задача об эластике (418). — **263.** Классификация форм эластики (419). — **264.** Продольный изгиб длинной тонкой стойки под действием вертикальной нагрузки (421). — **265.** Вычисление энергии деформации стержня (423). — **266.** Сопротивление продольному изгибу (426). — **267.** Устойчивость деформированных упругих тел (427). — **267А.** Метод Саусэлла (427). — **268.** Устойчивость эластики с точками перегиба (429). — **269.** Стержень, закрученный и изогнутый силами, действующими на конце (430). — **270.** Стержень, изогнутый по винтовой линии (431). — **271.** Теория спиральной пружины (433). — **272.** Дальнейшие результаты (434). — **273.** Изгиб стержни силами, распределенными вдоль его длины (435). — **273А.** Влияние жесткости на форму подвешенной проволоки (440). — **274.** Стержень, изогнутый равномерным давлением в одной плоскости (441). — **275.** Устойчивость кругового кольца при нормальном давлении (443). — **276.** Устойчивость колонны, деформированной своим собственным весом (443).

## ГЛАВА XX.

## КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ. ЗАДАЧА О ДИНАМИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ.

- 277.** Введение (445). — **278.** Продольные колебания (446). — **279.** Крутильные колебания (447). — **280.** Поперечные колебания (448). — **281.** Стержень, закрепленный на одном конце и подвергнутый продольному удару на другом конце (449). — **282.** Стержень, свободный на одном конце и испытывающий удар на другом (454). — **283.** Мгновенная нагрузка стержня (455). — **284.** Продольный удар двух стержней (457). — **284А.** Удар и колебания (460). — **285.** Задача о динамическом сопротивлении при наяании поперечных колебаний (461). — **286.** Вращающиеся валы (462).

## ГЛАВА XXI.

## МАЛАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КРИВЫХ СТЕРЖНЕЙ.

- 287.** Введение (463). — **288.** Смещение (463). — **289.** Положение главных осей кручения и изгиба (464). — **290.** Кривизна и степень кручения (465). — **291.** Упрощенные формулы (466). — **292.** Задачи о равновесии (467). — **293.** Колебания кругового кольца (470).

## ГЛАВА XXII.

## РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ ПЛАСТИНОК.

- 294.** Определение напряжения в пластинке (474). — **295.** Преобразование упругого усилия и изгибающего и крутящего моментов (475). — **296.** Уравнения равновесия (476). — **297.** Границные условия (478). — **298.** Соотношения между изгибающим моментом и кривизной (483).

## ТЕОРИЯ ТОЛСТЫХ ПЛАСТИНОК.

- 299.** Метод определения напряжений в пластинках (485). — **300.** Плоское напряжение (487). — **301.** Растяжение пластинки силами, лежащими в ее плоскости (488). — **302.** Изогнутая пластинка в плоском напряженном состоянии (490). — **303.** Обобщенное плоское напряжение (492). — **304.** Изогнутая пластинка в общем плоском напряженном состоянии (493). — **305.** Круговая пластинка,

нагруженная в центре (495). — 306. Пластиинка, у которой напряжение постоянно, либо меняется линейно (496). — 307. Изгиб пластиинки под равномерным односторонним давлением (498). — 308. Изгиб пластиинки под влиянием давления, меняющегося линейно (501). — 309. Изгиб опертой по краям круговой пластиинки, на которую действует равномерное давление (502). — 310. Изгиб закрепленной по краям пластиинки под действием равномерного давления (504). — 310С. Дополнительный прогиб, связанный со способом закрепления концов (506). — 311. Изгиб закрепленной по краям пластиинки под действием давления, меняющегося линейно (507). — 312. Изгиб пластиинки от собственного веса (508). — 312С. Замечания по поводу теории толстой пластиинки (509).

#### ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК.

818. Изгиб тонкой пластиинки поперечными силами (509). — 814. Применение приближенной теории (511).

#### ГЛАВА XXIII.

#### ДЕФОРМАЦИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИНОК ИЛИ ОБОЛОЧЕК БЕЗ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ.

815. Введение (522). — 316. Изменение кривизны при деформации без растяжений и сжатий (523). — 317. Типичная деформация изгиба (525). — 818. Способ вычисления изменения кривизны (527). — 319. Деформация цилиндрической оболочки без растяжения и сжатия (528). — 320. Деформация сферической оболочки без растяжения и сжатия (531). — 321. Колебания оболочек без растяжения и сжатия (536).

#### ГЛАВА XXIV.

#### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК.

322. Формулы для кривизны поверхности (540). — 323. Более простые формулы для кривизны поверхности (542). — 324. Растяжение и изгиб средней поверхности оболочки (542). — 325. Метод вычисления упругостей и изменений кривизны (544). — 326. Формулы для случая малых смещений (546). — 327. Характер деформации в изогнутой пластиинке или оболочке (550). — 328. Напряжения в изогнутой пластиинке или оболочке (554). — 329. Приближенные формулы для компонентов деформации, усилий и моментов (555). — 330. Второе приближение для случая кривой пластиинки или оболочки (559). — 331. Уравнения равновесия (561). — 332. Границные условия (563). — 332А. Продольный изгиб прямоугольной пластиинки (564). — 333. Теория колебаний тонких оболочек (566). — 334. Колебания тонкой цилиндрической оболочки (570). — 335. Колебания тонкой сферической оболочки (576).

#### ГЛАВА XXIVA.

#### РАВНОВЕСИЕ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК.

335С. Большие деформации пластиинок и оболочек (580). — 335D. Пластиинка, изогнутая в форме цилиндра (580). — 335E. Большая тонкая пластиинка, подверженная давлению (584). — 335F. Длинная полоса. Опертые концы (586). — 335G. Длинная полоса с закрепленными краями (590).

#### РАВНОВЕСИЕ ТОНКИХ ОВОЛОЧЕК.

336. Малые смещения (592). — 337. Случай, когда средняя поверхность будет поверхностью вращения (592). — 338. Кручение (594).

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОВОЛОЧКА.**

**339.** Симметричая деформация (595). — **340.** Труба под внешним давлением (597). — **341.** Устойчивость деформации трубы под действием внешнего давления (600). — **342.** Поперечные силы (602). — **343.** Общие несимметричные условия (607).

**СФЕРИЧЕСКАЯ ОВОЛОЧКА.**

**344.** Деформации, сопровождаемые удлинениями (612). — **345.** Краевой эффект Симметричные условия (615).

**КОНИЧЕСКАЯ ОВОЛОЧКА.**

**343.** Деформации, удлиняющие. Симметричные условия (619). — **347.** Краевой эффект. Симметричные условия (620). — **348.** Поперечные силы. Деформация удлинений (622). — **349.** Поперечные силы. Краевой эффект (623). — **350.** Деформация удлинений. Несимметричные условия (630). — **351.** Приближенное решение для деформации без удлинений (631). — **352.** Краевой эффект. Несимметричные условия (634).

**ПРИМЕЧАНИЯ.**

**А. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ (642).**

**Б. ПОНЯТИЕ НАПРЯЖЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ (644).**

**С. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДВИЖНЫХ ОСЕЙ (657).**

**УКАЗАТЕЛЬ АВТОРОВ (663).**

**ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ (667)**