А.В. Балакришнан

Теория фильтрации Калмана

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.В. Балакришнан

А11 Теория фильтрации Калмана / А.В. Балакришнан – М.: Книга по Требованию, 2021. – 164 с.

ISBN 978-5-458-27730-3

Книга известного американского математика содержит введение в теорию и методы стохастической фильтрации. В ней дан обзор линейных систем, изложены основы теории случайных процессов и стохастического оценивания, что упрощает усвоение материала.

Книга оригинальна и по структуре изложения, которое строится на рассмотрении фильтра Калмана как линейной системы. Приведено много задач и примеров, иллюстрирующих теорию. Для математиков-прикладников, инженеров-исследователей, аспирантов и студентов вузов.

Воспроизведено в оригинальной авторской орфографии издания 1988 года (издательство "Мир").

ISBN 978-5-458-27730-3

Глава 1

Обзор теории линейных систем

Фильтр Калмана является линейной системой. Данная глава представляет собой краткий обзор теории линейных систем с точки зрения «пространства состояний», поскольку фильтр Калмана лучше всего описывается с этих позиций. В качестве начального курса теории пространства состояний читателю рекомендуется монография [2] (см. также [1]*. — Ред.). Более расширенные курсы можно найти в монографиях [7], [12], [20], [2]* и других.

Система характеризуется своим «входом», своим «состоянием» и «выходом». Это функции времени. Время может быть непрерывным или дискретным — в последнем случае оно указывается целочисленными индексами. В этой книге мы будем иметь дело только с дискретным случаем.

Пусть $\{u_n\}$ обозначает входную последовательность, а $\{v_n\}$ — выходную. Тогда для наших целей линейную систему можно полностью охарактеризовать уравнением «состояние — вход»

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n \tag{1.1}$$

и уравнением «выход — состояние — вход»

$$v_n = C_n x_n + D_n u_n, \tag{1.2}$$

где A_n — квадратная матрица, а B_n, C_n, D_n — прямоугольные матрицы. Если размерность пространства состояний равна p, то A_n имеет размер $p \times p$. Если входная последовательность такова, что каждое u_n имеет размерность $q \times 1$, то размер B_n будет $p \times q$. Если выходная последовательность такова, что каждое v_n является вектором размера $m \times 1$, то C_n будет иметь размер $m \times p$, а D_n — $m \times q$. Мы можем «решить» (1.1), (1.2), т. е. выразить значения на выходе через значение состояния в некоторый начальный момент времени и значения на входе. Таким образом, считая k начальным моментом времени, имеем

$$x_n = \psi_{n,k} x_k + \sum_{l=k}^{n-1} \psi_{n,\,l+1} B_l u_l, \tag{1.3}$$

где $\psi_{n,k}$ называется *переходной матрицей состояний* и определяется следующим образом:

$$\psi_{n,k} = A_{n-1} \ldots A_k, \quad k \leqslant n-1;$$
$$\psi_{n,n} = I \text{ (единичная матрица)}^{1)}. \tag{1.4}$$

Отметим, что она обладает свойством «переходности»:

$$\psi_{n,k}\psi_{k,m} = \psi_{n,m}, \quad m \leqslant k \leqslant n. \tag{1.5}$$

Из уравнения (1.3), которое задает состояние в произвольный момент времени n, $n \geqslant k$, легко находится явное выражение для выхода в зависимости от начального состояния и текущих значений на входе:

$$v_n = C_n\psi_{n,k}x_k + \sum_{i=k}^{n-1} C_n\psi_{n,\,i+1}B_iu_i + D_nu_n. \tag{1.6}$$

Здесь первый член — отклик на начальное состояние (или начальное условие) и второй член — отклик на входную последовательность. Функция

$$\begin{aligned} W_{n,i} &= C_n\psi_{n,\,i+1}B_i, && i < n, \\ &= D_n, && i = n, \end{aligned} \tag{1.7}$$

называется «весовой матрицей» или «весовой моделью» системы.

Инвариантные системы

Нас в основном интересует случай, когда система инвариантна относительно времени, т. е. когда все матрицы системы не зависят от времени:

$$A_n = A, \quad B_n = B, \quad C_n = C, \quad D_n = D.$$

Тогда (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + Bu_n, \\ v_n &= Cx_n + Du_n. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В этом случае переходная матрица состояния есть

$$\psi_{n,k} = A^{n-k}$$

Поэтому

$$x_n = A^{n-k}x_k + \sum_{i=k}^{n-1} A^{n-i-1}Bu_i, \tag{1.9}$$

---

[1]) Здесь и далее I всегда будет обозначать единичную матрицу независимо от размера.

и выражение для выхода принимает следующий вид:

$$v_n = CA^{n-k}x_k + \sum_{i=k}^{n-1} CA^{n-i-1}Bu_i + Du_n. \qquad (1.10)$$

Отметим свойство «временной инвариантности»: отклик (состояние или выход) инвариантен относительно любого сдвига по времени. В частности, начальный момент времени поэтому обычно принимают равным нулю, т. е. $k=0$ в (1.9), (1.10). Весовая матрица системы зависит только от разницы времен:

$$\begin{aligned} W_{n,i} &= CA^{n-1-i}B, \quad n > i; \\ &= D, \qquad\qquad\quad n = i. \end{aligned}$$

Теперь удобнее записать

$$W_k = CA^kB, \quad k \geqslant 0.$$

Тогда для (1.10) получаем

$$v_n = CA^n x_0 + \sum_{0}^{n-1} W_{n-1-i}u_i + Du_n, \quad n \geqslant 0.$$

Можно объединить второй и третий члены и записать

$$v_n = CA^n x_0 + \sum_{0}^{n} w_i u_{n-i}, \qquad (1.10a)$$

полагая $w_i = W_{i-1}$, $i \geqslant 1$; $w_i = D$, $i = 0$.

Из многих свойств, характеризующих инвариантные системы, определенные равенством (1.8), наибольший интерес для нас представляют три:

(1) устойчивость;
(2) управляемость;
(3) наблюдаемость.

Рассмотрим последовательно каждое из них.

Устойчивость

Будем говорить, что состояние x ($x \in R^p$ — линейное пространство $(p \times 1)$-матриц) *устойчиво* (или «A-устойчиво»), если

$$\lim_n A^n x = 0. \qquad (1.12)$$

По отношению к (1.9) это означает, что член, соответствующий начальным условиям в этом выражении, будет асимптотически обращаться в нуль. То же верно и для (1.10).

Класс всех устойчивых состояний является линейным подпространством. Назовем его устойчивым подпространством. Система является устойчивой, если все ее состояния устойчивы. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы A были по модулю строго меньше 1. В этом случае говорят также, что матрица A устойчива. Отметим, что A является устойчивой, если A^*A устойчива; при этом обратное неверно.

Для устойчивой системы весовую матрицу системы можно охарактеризовать преобразованием Фурье, называемым «передаточной функцией» входа — выхода:

$$\psi(\lambda) = \sum_0^\infty w_k e^{2\pi i\lambda k} = D + e^{2\pi i\lambda} C \sum_0^\infty A^k e^{2\pi i k\lambda} B, \quad -1/2 < \lambda < 1/2. \tag{1.13}$$

Пусть z — комплексная переменная. Тогда ряд

$$\sum_0^\infty w_k z^k$$

сходится для $|z| \leqslant 1$ и называется z-преобразованием. Из (1.11) сразу получаем, что

$$\sum_0^\infty w_k z^k = zC(I - zA)^{-1} B + D, \quad |z| < 1. \tag{1.14}$$

Все свойства z-преобразования могут быть получены из передаточной функции:

$$\psi(\lambda) = C(I - e^{2\pi i\lambda} A)^{-1} B e^{2\pi i\lambda} + D, \quad -1/2 < \lambda < 1/2. \tag{1.15}$$

Заметим, что z-преобразование (1.14) остается определенным даже для неустойчивых A при $|z| < r$, где r — некоторое число r, $0 < r \leqslant 1$.

Управляемость

Скажем, что состояние x *управляемо* (лучше было бы сказать достижимо), если оно может быть достигнуто из начального состояния за некоторое конечное число шагов по времени при соответствующем входе. Более точно, состояние x управляемо, если для некоторого n и некоторой последовательности $\{u_i\}$

$$x_0 = 0,$$
$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$
$$x_n = x.$$

Это эквивалентно тому, что выражение (1.9) для произвольного момента времени имеет вид

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B u_k. \tag{1.16}$$

Управляемые состояния образуют линейное подпространство, которое назовем «управляемым подпространством». Когда оно совпадает со всем пространством состояний, говорят, что пространство состояний управляемо. Будем обозначать это сокращенно: «$(A \sim B)$ управляемо».

Необходимым и достаточным условием управляемости является то, что (составная) *матрица управляемости*

$$|B\ AB\ \ldots\ A^{p-1}B| \tag{1.17}$$

имеет полный ранг. Или, что эквивалентно, матрица размера $p \times p$

$$R_C = \sum_{0}^{p-1} A^l B B^* A^{*l}$$

невырожденная. (Напомним, что A имеет размер $p \times p$.) Более того, подпространство управляемых состояний в точности есть область изменения R_C.

Если пространство состояний управляемо, мы можем выразить выход v_n единственным образом через предшествующую входную последовательность. Действительно, для некоторого k имеем

$$x_0 = \sum_{0}^{k-1} A^l B u_{k-1-l},$$

и можем переписать это, обратив время, как

$$x_0 = \sum_{l=-k}^{-1} A^{-1-l} B \tilde{u}_l,$$

где

$$\tilde{u}_n = u_{k+j}, \quad -k \leqslant j \leqslant -1.$$

Другими словами, мы можем найти начальное состояние x_0, которое можно рассматривать как результат воздействия на систему подходящей входной последовательности в предыдущие моменты времени. Более того, мы можем записать текущее состояние x_n в следующем виде:

$$x_n = A^n \sum_{l=-k}^{-1} A^{-1-l} B u_l + \sum_{l=0}^{n-1} A^{n-1-l} B u_l = \sum_{l=-k}^{n-1} A^{n-1-l} B \tilde{u}_l,$$

где

$$\bar{u}_i = u_i, \quad 0 < i < n-1;$$
$$\bar{u}_i = \tilde{u}_i, \quad -k < i \leqslant -1.$$

Далее можно переписать это в «типичной» форме

$$x_n = \sum_{i=-\infty}^{n-1} A^{n-1-i} B u_i,$$

где входная последовательность u_i является нулевой для $-\infty < i \leqslant -N$. В свою очередь вход можно выразить в виде

$$v_n = \sum_{-\infty}^{n-1} W_{n-1-i} u_i + D u_n = \sum_0^{\infty} W_j u_{n-1-j} + D u_n = \sum_0^{\infty} w_j u_{n-j}. \tag{1.18}$$

Другими словами, вследствие управляемости выход полностью выражается через вход, без введения в рассмотрение состояния. Кроме того, можно получить, отправляясь от (1.18) (хотя это выходит за рамки данного рассмотрения), такое описание в терминах пространства состояний, при котором пространство состояний является управляемым.

Замечание. Из (1.10а) видно, что если система устойчива, то первый член в (1.10а) стремится к нулю при больших n, так что представление (1.18) асимптотически справедливо для устойчивых систем.

Наблюдаемость

Чтобы ввести понятия наблюдаемости, начнем с рассмотрения задачи, имеющей определенное практическое значение. Предположим, что система известна, т. е. A, B, C и D заданы. Будем также считать заданной последовательность пар (u_i, v_i), $i = 1, \ldots, n$, где u_i — вход и v_i — выход. Можем ли мы определить состояния $x_1, \ldots, x_n$, соответствующие этим данным? Чтобы ответить на этот вопрос, можно поступить следующим образом.

Поскольку

$$v_i = CA^{i-1} x_1 + \sum_1^{i-1} CA^{i-1-k} B u_k, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то, вычитая отклик на известный вход и полагая

$$\tilde{v}_i = v_i - \sum_1^{i-1} CA^{i-1-k} B u_k,$$

имеем

$$\tilde{v}_i = CA^{i-1} x_1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.19}$$

Если отсюда мы можем найти x_1, тогда, конечно,

$$x_l = A^{l-1}x_1 + \sum_{1}^{l-1} A^{l-1-k}Bu_k$$

будет определять последующие состояния. Мы можем считать (1.19) системой из n уравнений для определения x_1. Заметим, что уравнения являются линейными и поэтому (1.19) имеет единственное решение, если только однородное уравнение (относительно z)

$$0 = CA^{l-1}z, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{1.20}$$

не имеет ненулевого решения. Учитывая, что пространство состояний имеет размерность p, а матрица A — размер $p \times p$, то из равенства

$$0 = CA^{l-1}z, \qquad l = 1, \ldots, p, \tag{1.21}$$

при $n \geqslant p$ следует (1.20).

Теперь дадим определение: состояние x *ненаблюдаемо*, если

$$CA^k x = 0, \qquad k \geqslant 0. \tag{1.22}$$

Понятно, что класс ненаблюдаемых состояний является линейным подпространством. Его ортогональное дополнение называется *наблюдаемым подпространством.* Говорят, что пространство состояний *наблюдаемо*, если подпространство ненаблюдаемых состояний содержит только нулевое состояние.

Пусть p — размерность пространства состояний. Тогда пространство состояний наблюдаемо тогда и только тогда, когда матрица

$$R_0 = \sum_{0}^{p-1} A^{*l}C^*CA^l$$

невырождена. Или, что эквивалентно, когда составная матрица

$$\begin{vmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{p-1} \end{vmatrix}$$

является невырожденной. Кроме того, если пространство состояний наблюдаемо, можно, возвращаясь к (1.19), определить x_1 формулой

$$x_1 = R_0^{-1} \sum_{1}^{p} A^{*\,l-1}C^*v_l. \tag{1.23}$$

Мы также воспользуемся записью «$(C \sim A)$ *наблюдаемо*» для обозначения того, что пространство состояний наблюдаемо. Заметим, в частности, что $(C \sim A)$*-наблюдаемость* эквивалентна $(A^* \sim C^*)$*-управляемости.*

Задачи

Задача 1.1

Предположим, что $(C \sim A)$ наблюдаемо. Если матрица K такова, что $(I - CK)$ невырождена, то $(C \sim (I - KC)A)$ также наблюдаемо.

Указание:

$$C(I - KC)Ax = 0 \Rightarrow (I - CK)CAx = 0,$$
$$\Rightarrow CAx = 0.$$

Поэтому

$$C(I - KC)A(I - KC)Ax = 0$$
$$\Rightarrow C(I - KC)A^2x = 0,$$
$$\Rightarrow (I - CK)CA^2x = 0,$$
$$\Rightarrow CA^2x = 0.$$

Задача 1.2

Пусть A невырождена. Покажите, что $(C \sim A^{-1})$ наблюдаемо, если наблюдаемо $(C \sim A)$.

Задача 1.3

Покажите, что $(C \sim A)$-наблюдаемость эквивалентна:

(а) $(C^*C \sim A)$-наблюдаемости;

(б) $(\sqrt{C^*C} \sim A)$-наблюдаемости.

Задача 1.4

Постройте (квадратную) матрицу A, такую что для некоторого x последовательность $\|A^n x\|$ не сходится при $n \to \infty$ несмотря на ограниченность.

Задача 1.5

Покажите, что формулу (1.23) можно модифицировать следующим образом. Пусть R будет любой невырожденной (ковариационной) матрицей размера $p \times p$. Определим теперь R_0 формулой

$$R_0 = \sum_1^p A^{*\,k-1} C^* R^{-1} C A^{k-1}.$$

Тогда получим представление

$$x_1 = R_0^{-1} \sum_{1}^{p} A^{*\,k-1} C^* R^{-1} \tilde{v}_k.$$

Задача 1.6

Заданы

$$C = \begin{bmatrix} 0.1108 & 0.1389 & 0.3347 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3355 & 0.2674 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.15\times 10^{-5} & -0.53\times 10^{-5} & 0.7129\times 10^{-6} \\ 0 & 1 & 0 & 0.5672\times 10^{-5} & 0.2646\times 10^{-4} & 0.1572\times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0.416\times 10^{-6} & 0.40\times 10^{-4} & 0.223\times 10^{-3} \\ 1 & 0 & 0 & 1.074 & -0.2749\times 10^{-4} & -0.1609\times 10^{-3} \\ 0 & 1 & 0 & -0.275\times 10^{-4} & 1.071 & -0.15\times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -0.161\times 10^{-3} & -0.15\times 10^{-1} & 0.9890 \end{bmatrix}.$$

наблюдаемости; вычислите матрицу
Убедитесь в $(C \sim A)$-наблюдаемости; вычислите матрицу

$$\sum_{0}^{\infty} A^{*-k} C^* C A^{-k}.$$

Глава 2

Обзор теории сигналов

В этой главе мы приведем краткий обзор основных фактов, касающихся понятия сигнала, которые потребуются в дальнейшем. Для более детального изучения, включая подробности доказательств, можно рекомендовать работы [13], [14], [17], [18], [19].

Как и в случае систем гл. 1, будем рассматривать только дискретное время, т. е. случай, когда независимая переменная может принимать лишь целые значения. Таким образом, мы будем использовать обозначение s_n для n-го выборочного значения, считая от некоторого (произвольного) начального измерения (времени). (Выборочные значения не обязательно должны браться через равные промежутки времени, хотя это наиболее распространенная ситуация.) Будем считать s_n вектором-столбцом размера $m \times 1$. Поскольку начальный момент времени произволен, мы допускаем, если потребуется, как положительные, так и отрицательные значения n. Хотя и невозможно в каком-либо физическом устройстве обработать неограниченное число выборочных значений, но было бы столь же нереалистично ограничивать число выборочных значений неким раз и навсегда фиксированным числом. Поэтому мы идеализируем наши сигналы, рассматривая их как необрывающиеся последовательности вида $\{s_n\}$, где $n = 1, 2, \ldots$ пробегает все целые положительные значения (или, если необходимо, то и целые отрицательные).

Спектральная теория сигналов с конечной энергией

Скажем, что последовательность сигнала [1]) $\{s_n\}$ имеет конечную энергию, если

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N} \|s_n\|^2 < \infty.$$

Это понятие и связанная с ним теория нам почти не потребуются. Будем говорить, что сигнал $\{s_n\}$ имеет *конечную*

---

[1]) В дальнейшем будем писать просто «сигнал», опуская слово «последовательность».