Э. Картан

Интегральные инварианты

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э. Картан
Э1 Интегральные инварианты / Э. Картан – М.: Книга по Требованию, 2023. – 216 с.

ISBN 978-5-458-26336-8

Выходящая в русском переводе книга Картана в первую очередь излагает теорию интегральных инвариантов. Это понятие, введенное Пуанкаре в связи с его механическими исследованиями, получает в изложении Картана значительное упрощение в связи с введением диференциала независимого переменного; совокупность всех интегральных инвариантов оказывается легко обозримой. Далее в настоящей книге эта теория применяется к ряду проблем анализа и механики.Механические приложения требуют от читателя общей ориентировки в аналитической механике и в механике непрерывной среды. Более элементарное изложение теории интегральных инвариантов по Пуанкаре и бесконечно малых преобразований в применении к механике читатель может найти в книге Уиттекера Аналитическая динамика", ОНТИ, М. Л. 1937; эта книга является естественным введением к механическим приложениям, рассматриваемым у Картана.

ISBN 978-5-458-26336-8

ВВЕДЕНИЕ.

Эта книга является воспроизведением курса, читанного в течение летнего семестра 1920—1921 гг. на физико-математическом факультете (Faculté des Sciences) Парижского университета.

Теория интегральных инвариантов создана А. Пуанкаре (H. Poincaré) и изложена им в III томе его труда „Новые методы небесной механики“.

В двух заметках в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (16 и 30 июня 1902 г.) при изучении диференциальных уравнений, допускающих данные преобразования, автор пришел к рассмотрению некоторых диференциальных выражений, изванных им *интегральными формами*: они характеризуются тем свойством, что могут быть выражены только через первые интегралы данных диференциальных уравнений и через их диференциалы. Углубляя свои изыскания в той же области, автор пришел, с одной стороны, к основанию своего метода интегрирования систем уравнений с частными производными, которые допускают характеристики, зависящие только от произвольных постоянных [характеристики Коши (Cauchy)], с другой стороны,— к основанию своей теории структуры непрерывных групп преобразований, конечных и бесконечных.

И вот оказывается, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегрального инварианта. Сопоставление этих двух понятий легло в основу настоящего труда.

Рассмотрим, например, систему трех диференциальных уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями x, y, z и независимой переменной t; можно считать, что они определяют бесконечное множество траекторий подвижной точки. Диференциальная форма, например, $P\,dx+Q\,dy+R\,dz+H\,dt$ может рассматриваться как величина, связанная с состоянием (x, y, z, t) подвижной точки и состоянием точки бесконечно близкой $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$. Утверждение, что эта форма является *интегральной* (или *инвариантной*, согласно терминологии, принятой в этом курсе), очевидно, означает, что эта величина зависит только от траектории, которая содержит первое состояние, и от бесконечно близкой траектории, которая содержит второе состояние. Иначе говоря, инвариантная форма не меняет своего значения при перемещении каким-либо способом двух состояний (x, y, z, t), $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ на их траекториях. Тогда, если рассматривать непрерывную линейную последовательность траекторий, и если взять интеграл $\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ вдоль дуги кривой, которая является геометрическим местом положений, занимаемых подвижной точкой на этих траекториях *в один и тот же момент* t, то этот интеграл не будет зависеть от t; это — *интегральный инвариант* по терминологии А. Пуанкаре. Обратно, есть очень простой способ возвратиться от интегрального инварианта $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ Пуанкаре к соответственной инвариантной форме $P\,dx + Q\,dy + R\,dz + H\,dt$.

Эти исследования не ограничиваются линейными диференциальными формами. Всякая диференциальная инвариантная форма, которая может быть помещена под знаком интеграла, простого или кратного, порождает интегральный инвариант в смысле А. Пуанкаре, если опустить члены, которые содержат диференциал (или диференциалы) независимой переменной [1]).

Таким образом, *величина под знаком интеграла в интегральном инварианте Пуанкаре есть не что иное, как усеченная диференциальная инвариантная форма*. Инвариантный характер *дополненного* интеграла сохраняется, если он распространяется на какую-либо совокупность положений, *одновременных или нет*.

Это сближение двух понятий — интегрального инварианта и диференциальной инвариантной формы — влечет за собой многочисленные следствия. Прежде всего, все свойства, относящиеся к образованию интегральных инвариантов, к выводу одних инвариантов из других, становятся очевидными. То же можно сказать о применении к интегрированию диференциальных уравнений.

Следует отметить другое следствие, относящееся к принципам механики. А. Пуанкаре показал, что общие уравнения динамики обладают тем свойством, что они допускают линейный (относительный) интегральный инвариант, а именно

$$\int p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_n\,\delta q_n, \tag{1}$$

где q и p обозначают канонические переменные Гамильтона (Hamilton). Если дополнить диференциальное выражение под знаком интеграла, интегральный инвариант принимает вид

$$\int p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_n\,\delta q_n - H\,\delta t, \tag{2}$$

где H — функция Гамильтона. Таким образом наряду с *количествами движения* $(p_1, \ldots, p_n)$ рассматриваемой материальной системы появляется ее *энергия* H. Выражение под знаком интеграла приобретает, в связи с этим, исключительно важное механическое значение; ему можно дать название *тензора „количества движения — энергии“* [2]). Элемен-

[1]) Р. Харгревс (R. Hargreaves) в статье, помещенной в Transactions of the Cambridge Philosophical Society, т. XXI (1912 г.) уже рассматривал интегралы, содержащие диференциал независимой переменной; но его точка зрения совершенно отлична от принятой нами, и независимая переменная у него всегда играет особую роль.

[2]) Указанное выражение получается совершенно естественно при вычислении вариации интеграла действия Гамильтона; это отмечалось уже неоднократно. Впрочем, этим же путем оно вводится и в нашем курсе.

тарное действие Гамильтона есть не что иное, как этот тензор, рассматриваемый вдоль траектории: понятие *действия* связано, таким образом, с понятиями количества движения и энергии.

Более того. Диференциальные уравнения движения не только допускают интегральный инвариант (2), но и являются единственными диференциальными уравнениями, обладающими этим свойством. Поэтому в основу механики можно положить следующий принцип, которому можно было бы дать название „принцип сохранения количества движения и энергии“:

Движения материальной системы (с вполне голономными связями, находящейся под действием сил, имеющих силовую функцию) управляются диференциальными уравнениями первого порядка, связывающими время, параметры положения и параметры скоростей; и эти диференциальные уравнения характеризуются тем свойством, что интеграл тензора „количества движения — энергии“, распространенный на любую непрерывную линейную замкнутую последовательность состояний системы, не меняет значения при перемещении этих состояний каким-либо способом вдоль соответственных траекторий.

В этой формулировке понятие *состояние* означает совокупность величин, определяющих положение системы в пространстве, момент, в который она рассматривается и скорости в этот момент.

Предыдущая формулировка более абстрактна и менее интуитивна, чем, например, формулировка принципа наименьшего действия Гамильтона. Тем не менее, она имеет преимущества, которые важно здесь отметить. Уравнения Лагранжа (Lagrange) позволяют дать законам механики форму, *не зависящую от установленной в пространстве координатной системы*, и в этом заключается их значение. Но время еще играет в них особую роль. Напротив, принцип сохранения количества движения и энергии дает законам механики форму, не зависящую от системы референции, принятой для вселенной (пространство — время): если производят замену переменных, относящуюся *одновременно* к параметрам положения системы и ко времени, то достаточно иметь выражение тензора „количество движения — энергии“ в новой системе координат, чтобы вывести из него уравнения движения. Таким образом получается схема, которой должны подчиняться все механические теории и которой действительно подчиняется и релятивистская механика.

Следует отметить, что эта схема относится только к материальным системам, зависящим от конечного числа параметров.

Настоящий труд оставляет в стороне большое количество приложений теории интегральных инвариантов; в частности, совершенно в стороне оставлены приложения, — исключительно важные в небесной механике, — относящиеся к теории периодических решений проблемы трех тел, к теории устойчивости по Пуассону (Poisson). Автор сознательно ограничился приложениями, относящимися, главным образом, к интегрированию диференциальных уравнений; но даже в этом кругу идей проблема лишь затронута.

Автор старался, однако, показать, что эта проблема не может рассматриваться особняком; он только сузил бы ее, если бы не рассматривал ее как частный вид более общей проблемы, в которую должно войти исследование не только интегральных инвариантов, но еще и уравнений Пфаффа (Pfaff), инвариантных для данных диференциальных уравнений, а также бесконечно малых преобразований, допускаемых этими диференциальными уравнениями. Полное изложение этой проблемы значительно расширило бы рамки настоящего курса и, сверх того, потребовало бы некоторого знания теории непрерывных групп. Автор ограничивается тем, что при случае указывает на существенную роль группы $\mathfrak{G}$ преобразований, которые, будучи применены к интегралам данных диференциальных уравнений, оставляют неизменными все данные об этих интегралах, известные *a priori* [1]). Всякая система диференциальных уравнений сводится к типичным системам, из которых каждая отвечает *простой* группе $\mathfrak{G}$. Если эта простая группа — *конечная*, получаются системы диференциальных уравнений, которые хорошо изучены С. Ли (S. Lie) и Э. Вессио (E. Vessiot), давшим им название систем Ли. Они связаны с теорией интегральных инвариантов в том смысле, что — посредством присоединения, в случае надобности, неизвестных вспомогательных функций — они допускают столько линейных интегральных инвариантов, сколько имеется неизвестных функций. Читатель найдет в XV главе этой книги некоторые общие указания с этой последней точки зрения относительно таких уравнений.

Если простая группа $\mathfrak{G}$ оказывается *бесконечной*, и если не принимать в расчет случая, когда это будет самая общая группа с n переменными — случая, при котором ничего неизвестно о соответственной системе диференциальных уравнений, — то эта группа допускает или интегральный инвариант максимальной степени [теория множителя Якоби (Jacobi)], или относительный линейный интегральный инвариант (теория уравнений, приводимых к каноническому виду), или инвариантное уравнение Пфаффа (уравнения, приводимые к уравнению с частными производными первого порядка). Главы XI—XIV посвящены этим классическим теориям.

Понятие интегрального инварианта можно рассматривать с точки зрения, несколько отличающейся от точки зрения А. Пуанкаре, которой, в общем, мы держались в этом курсе. Вместо того, чтобы рассматривать кратный интеграл, связанный с системой диференциальных уравнений, по отношению к которой он обладает свойством инвариантности, его можно рассматривать в связи с группой преобразований, относительно которой он инвариантен. Впрочем, обе точки зрения связаны между собою. Последней держался С. Ли, которому в течение некоторого времени она казалась единственно правильной. Тут понятие интегрального инварианта тоже играет важную роль, ибо, как это показал автор [2]), всякая группа преобразований, посредством присоединения

---

[1]) E. Cartan. — Les sous-groupes des groupes continus de transformations. Ann. Ec. Normale (3), т. XXV (1908 г.), стр. 57—194 (гл. 1-я).

[2]) E. Cartan. — Sur la structure des groupes infinis de transformations. Ann. Ec. Normale (3), т. XXI (1904 г.), стр. 153—206; т. XXII (1905 г.), стр. 219—308.

при надобности вспомогательных переменных, может быть определена как совокупность преобразований, допускающих известное количество линейных интегральных инвариантов. Эта точка зрения на понятие интегрального инварианта оставлена совершенно в стороне в нашем курсе.

Несколько глав посвящено правилам исчисления диференциальных форм, которые встречаются под знаками кратного интеграла. Гурса (Goursat) дает этим формам название символических выражений; я предлагаю называть их диференциальными формами с внешним умножением, или, короче, —*внешними диференциальными формами,* потому что они подчиняются правилам внешнего умножения Грассмана (Grassmann). Я предлагаю также назвать внешним диференцированием действие, которое позволяет перейти от $(p-1)$-кратного интеграла, распространенного по замкнутому многообразию $p-1$ измерений, к p-кратному интегралу, распространенному по многообразию p измерений, ограниченному первым [1]). Эта операция, сводящаяся в конечном итоге к обыкновенному диференцированию, если коэфициенты диференциальной формы под знаком интеграла допускают частные производные первого порядка, может сохранить смысл и тогда, когда последнее обстоятельство не имеет места. В связи с этим возникают интересные проблемы, которые систематически еще не изучены и заслуживают обстоятельного исследования.

Книга заканчивается двумя главами, впрочем очень сжатыми, посвященными связи теории интегральных инвариантов с вариационным исчислением и принципами оптики.

В конце книги находится не претендующий на полноту список основных трудов, относящихся к теории интегральных инвариантов. Ссылки на работы, относящиеся к классическим теориям множителя Якоби, к каноническим уравнениям и уравнениям с частными производными первого порядка, приводятся только в том случае, если работы эти непосредственно связаны с теорией интегральных инвариантов.

Le Chesnay 24 ноября 1921 г.

---

[1]) „Операция D“ у Гурса.

Глава I.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ГАМИЛЬТОНА И ТЕНЗОР „КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ — ЭНЕРГИИ".

Случай свободной материальной точки.

1. Всю небесную механику можно обосновать на принципе, который приводит определение движения материальной системы к решению проблемы вариационного исчисления: это — принцип наименьшего действия Гамильтона. Начнем его изложение со случая движения свободной материальной точки под действием силы, допускающей силовую функцию U, зависящую от прямолинейных координат точки x, y, z и от времени t.

В этом простом случае принцип Гамильтона выражается так:

Из всех возможных движений, переводящих материальную точку из данного положения (x_0, y_0, z_0) *в момент* t_0 *в другое данное положение* (x_1, y_1, z_1) *в момент* t_1, *фактически осуществляется то, при котором определенный интеграл*

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right] dt$$

принимает наименьшее значение.

В этом выражении m обозначает массу точки; x', y', z' — компоненты скорости; величина под знаком интеграла называется *элементарным действием*; интеграл W есть *действие* за промежуток времени (t_0, t_1).

Для доказательства этого принципа будем рассматривать x, y, z как функции t и произвольного параметра α и вычислим вариацию интеграла W, когда α получает приращение $\delta\alpha$, полагая при этом, что *при любых значениях* α x, y, z принимают значения x_0, y_0, z_0 при $t = t_0$ и значения x_1, y_1, z_1 при $t = t_1$. Имеем:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left[m (x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z\right] dt;$$

но

$$\delta x' = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\delta\alpha\right) = \frac{\partial(\delta x)}{\partial t};$$

интегрирование по частям (заметим, что при $t=t_0$ и $t=t_1$ вариации δx, δy, δz равны нулю) дает:

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.$$

Если потребовать, чтобы δW обращалось в нуль при $\alpha=0$, каковы бы ни были функции δx, δy, δz от t, равные нулю при $t=t_0$ и $t=t_1$, то, применяя классическое рассуждение, найдем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы при $\alpha=0$ имели место равенства:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1}$$

Отсюда следует, что *движения материальной точки под действием данной силы осуществляют экстремум интеграла W по отношению ко всем возможным бесконечно близким движениям, соответствующим тому же самому начальному и конечному положениям точки, и что, кроме того, эти движения являются единственными, обладающими указанным экстремальным свойством.*

Строго говоря, речь может итти только об *экстремуме* действия, а не о *минимуме*, так как обращение первой вариации δW в нуль есть условие необходимое, но не достаточное для минимума.

2. Может показаться, что элементарное действие

$$\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]dt$$

введено здесь при помощи чисто искусственного приема вычисления, чтобы получить возможность выразить в сжатой форме законы движения. Мы сейчас увидим, что принцип Гамильтона можно заменить другим эквивалентным принципом, который также связан с выражением, линейным относительно dx, dy, dz, dt, но у которого все коэфициенты имеют простое механическое значение.

Действительно, вернемся к действию W, но предположим теперь, что t_0 и t_1 сами являются функциями параметра α, так что соответствующие значения x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 также суть функции α. Вычисляя δW приемами диференцирования определенного интеграла, получаем:

$$\begin{aligned}\delta W=&\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]_{t=t_1}\delta t_1-\\&-\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]_{t=t_0}\delta t_0+\\&+[mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z]_{t=t_1}-[mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z]_{t=t_0}+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$[\delta x]_{t=t_1}=\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha;\quad \delta x_1=\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=t_1}\delta t_1+\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha;$$

и, следовательно,

$$[\delta x]_{t=t_1}=\delta x_1-x_1'\,\delta t_1.$$

Формула, выражающая δW, будет, таким образом, иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}\delta W&=mx_1'(\delta x_1-x_1'\delta t_1)+my_1'(\delta y_1-y_1'\delta t_1)+mz_1'(\delta z_1-z_1'\delta t_1)+\\&\quad+\left[\frac{1}{2}m(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)+U_1\right]\delta t_1-\\&-mx_0'(\delta x_0-x_0'\delta t_0)+my_0'(\delta y_0-y_0'\delta t_0)+mz_0'(\delta z_0-z_0'\delta t_0)+\\&\quad+\left[\frac{1}{2}m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2)+U_0\right]\delta t_0+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Положим

$$\left.\begin{aligned}\omega_\delta&=mx'(\delta x-x'\delta t)+my'(\delta y-y'\delta t)+mz'(\delta z-z'\delta t)+\\&+\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]\delta t=\\&=mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z-\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-U\right]\delta t.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Коэфициенты введенного таким образом диференциального выражения суть, во-первых,

$$mx',\quad my',\quad mz',$$

т. е. составляющие *количества движения* подвижной точки, затем

$$\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-U,$$

т. е. *энергия* E.

Благодаря этому обозначению можно написать

$$\delta W=[\omega_\delta]_0^1+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.$$

Предположим теперь, что мы рассматриваем последовательность реальных траекторий, зависящих от параметра α, и каждую траекторию ограничиваем промежутком времени $(t_0,\ t_1)$, зависящим от α. Формула,